Homologische Algebra, SoSe 24

Blatt 3

Hausaufgabe 9 (A21.(1))
Seien R, S, T Ringe. Seien $M = {}_R M_S$ und $N = {}_R N_T$ Bimoduln.

(1) Man zeige: $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ ist vermittels $m(f + g) := mf + mg$ für $f,\, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ und $m \in M$ eine abelsche Gruppe.

(2) Man zeige: Es gibt eine S-T-Bimodulstruktur auf der abelschen Gruppe $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ aus (1), für welche
$$m(s \cdot f * t) \;=\; ((m * s)f) * t$$
ist für $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, $s \in S$, $t \in T$, $m \in M$.

(3) Man zeige: Es ist $u : \mathrm{Hom}_R({}_R R_R\,,\; {}_R N_T) \to {}_R N_T : f \mapsto fu := 1f$ ein Isomorphismus von R-T-Bimoduln.

Hausaufgabe 10 (A20.(1))
Sei $R = (R, +, \cdot_R)$ ein Ring.
Seien α, β, γ, δ Ringisomorphismen von R nach R, auch Ringautomorphismen von R genannt.

(1) Man zeige: Es gibt eine R-R-Bimodulstruktur auf R, für welche $r \cdot x * s = r\alpha \cdot_R x \cdot_R s\beta$ ist für $r, s \in R$ und $x \in R$.

Dieser Bimodul werde ${}_\alpha R_\beta$ geschrieben.

(2) Man finde Ringisomorphismen ε, ϑ von R nach R und einen Isomorphismus von R-R-Bimoduln
$$u \;:\; \mathrm{Hom}_R({}_\alpha R_\beta,\, {}_\gamma R_\delta) \;\xrightarrow{\sim}\; {}_\varepsilon R_\vartheta\ .$$

Hausaufgabe 11
Sei $M := \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/9$. Sei $X := \mathbb{Z}/3$. Sei $N := \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/27$.

(1) Man beschreibe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$ und bestimme damit $|\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)|$.

(2) Sei
$$H_X \;:=\; \{\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N) \;:\; \text{es gibt } u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, X) \text{ und } v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, N) \text{ mit } f = u \cdot v \,\}$$
Man bestimme $|H_X|$. Ist H_X eine Untergruppe von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$?

Hausaufgabe 12
Sei R ein Ring.

Seien R-Linksmoduln M', M, M'' und R-lineare Abbildungen $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ gegeben.
Sei $\mathrm{Kern}(g) \xrightarrow{\iota} M$ die Inklusionsabbildung. Sei $M \xrightarrow{\rho} \mathrm{Cokern}(f)$ die Restklassenabbildung.

(1) Man zeige: Es ist $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ genau dann exakt in der Mitte, wenn $f \cdot g = 0$ und $\iota \cdot \rho = 0$ ist.

(2) Man zeige: Es ist $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ genau dann kurz exakt, wenn es einen Isomorphismus $M' \xrightarrow{u} \mathrm{Kern}(g)$ mit $u \cdot \iota = f$ und einen Isomorphismus $\mathrm{Cokern}(f) \xrightarrow{v} M''$ mit $\rho \cdot v = g$ gibt.