M. Künzer    Abgabe im Ilias bis Do 25.04.2024 oder in der Übung

Homologische Algebra, SoSe 24

# Blatt 2

**Hausaufgabe 5 (cf. §1.2.7)** Sei $R$ ein Ring. Sei $I \subseteq R$ ein Ideal.

(1) Sei $M$ ein $R$-Linksmodul, für welchen $xm = 0$ ist für $x \in I$ und $m \in M$.

Man zeige: $M$ wird vermöge $(r + I) \cdot m := r \cdot m$ zu einem $R/I$-Linksmodul, wobei $r \in R$ und $m \in M$.

(2) Sei $N$ ein $R/I$-Linksmodul. Man zeige: $N$ wird vermöge $r \cdot n := (r + I) \cdot n$ zu einem $R$-Linksmodul, wobei $r \in R$ und $n \in N$.

(3) Seien $R/I$-Linksmoduln $N$ und $N'$ gegeben, welche dank (2) auch als $R$-Linksmoduln angesehen werden können. Sei $f : N \to N'$ eine Abbildung.

Man zeige: Es ist $f$ genau dann $R/I$-linear, wenn $f$ $R$-linear ist.

(4) Man bestimme bis auf Isomorphie alle $\mathbb{Z}/9$-Moduln, die 81 Elemente enthalten.

**Hausaufgabe 6 (cf. A8.(2))** Sei $R$ ein Ring.

(1) Seien $R$-Linksmoduln $M$ und $N$ gegeben. Sei $f : M \to N$ eine bijektive $R$-lineare Abbildung. Man zeige: Es ist auch $f^{-1} : N \to M$ eine $R$-lineare Abbildung.

(2) Sei $M$ ein $R$-Linksmodul. Seien $U \subseteq V \subseteq M$ Teilmoduln.

Man bestimme einen Isomorphismus $f : M/V \to (M/U)/(V/U)$.

**Hausaufgabe 7**

(1) Man bestimme alle $\mathbb{Z}$-linearen Abbildungen von $\mathbb{Z}/9$ nach $\mathbb{Z}/27$.

(2) Zu jeder Abbildung aus (1) bestimme man Kern, Bild und Cokern.

**Hausaufgabe 8**

Wir betrachten die $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/27 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)} \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/9$.

(1) Man bestimme $|\,\mathrm{Kern}(f)|$, $|\,\mathrm{Im}(f)|$ und $|\,\mathrm{Cokern}(f)|$.

(2) Wieviele $\mathbb{Z}$-lineare Abbildungen von $\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/27$ nach $\mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/9$ gibt es?