Homologische Algebra, SoSe 24

Blatt 1

Hausaufgabe 1 (cf. A3.(2), A8.(1))

Sei R ein Ring. Sei $I \subseteq R$ ein Ideal.

(1) Man zeige: Es wird $R/I := \{r + I \;:\; r \in R\}$ mittels $(r + I) + (r' + I) := (r + r') + I$ und $(r + I) \cdot (r' + I) := (r \cdot r') + I$ ein Ring.

(2) Man finde ein Ideal $I \subseteq \mathbb{Q}[X]$ und einen Ringisomorphismus $\mathbb{Q}[X]/I \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

(3) Sei $f : R \to S$ ein bijektiver Ringmorphismus.
Man zeige: Auch $f^{-1} : S \to R$ ist ein Ringmorphismus.

Hausaufgabe 2 (cf. A7)

Sei R ein Ring. Sei M ein R-Linksmodul. Sei $N \subseteq M$ ein Teilmodul.

(1) Man zeige: Es ist M/N via $(m + N) + (m' + N) := (m + m') + N$ für $m,\, m' \in M$ und via $r \cdot (m + N) := (r \cdot m) + N$ für $r \in R$ und $m \in M$ ein R-Linksmodul.

(2) Man zeige: Ist M als Menge endlich, dann ist $|N| \cdot |M/N| = |M|$.

Hausaufgabe 3

(1) Sei $R = (R, +_R, \cdot_R)$ ein Ring. Sei $R^\circ = (R^\circ, +_{R^\circ}, \cdot_{R^\circ})$ der Ring, für welchen $(R^\circ, +_{R^\circ}) = (R, +_R) =: (R, +)$ ist und für welchen $r \cdot_{R^\circ} s = s \cdot_R r$ gilt für $r,\, s \in R$.

Sei nun $R = \mathbb{Q}^{2\times 2}$. Man finde einen Ringisomorphismus $f : R \to R^\circ$.

(2) Sei R ein Ring. Sei $M = (M, +)$ eine abelsche Gruppe.

Sei $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M) = \{\, M \xrightarrow{f} M \;:\; f \text{ ist Gruppenmorphismus} \,\}$ der Endomorphismenring von M. Darin werde $f + g$ durch $m(f + g) := mf + mg$ definiert für $f,\, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$. Die Multiplikation ist gegeben durch die Komposition.

Sei $\varphi : R^\circ \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ ein Ringmorphismus. Man zeige: Vermittels $r \cdot m := m(r\varphi)$ wird M zu einem R-Linksmodul.

Hausaufgabe 4 (cf. A10)

Seien $m,\, n \geqslant 0$. Sei $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$.

(1) Man zeige: Falls $m,\, n \geqslant 1$, dann gibt es ganzzahlig invertierbare Matrizen $S \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ und $T \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, für welche SAT von der Blockmatrixform $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & A' \end{smallmatrix}\right)$ ist, wobei $a \in \mathbb{Z}$ ein Teiler jedes Eintrags von $A' \in \mathbb{Z}^{(m-1)\times(n-1)}$ ist.

(2) Man zeige: Es gibt ganzzahlig invertierbare Matrizen $S \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ und $T \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, für welche SAT eine Matrix ist, deren Einträge an jeder Position $(i, j) \in [1, m] \times [1, n]$ mit $i \neq j$ gleich 0 sind (rechteckige Diagonalmatrix) und deren Eintrag an Position (i, i) den Eintrag an Position $(i + 1, i + 1)$ teilt für $i \in [1, \min\{m, n\} - 1]$.