$R = (R, +, \cdot)$ **Ring** :

(Ring 1) : $(R, +)$ abelsche Gruppe

(Ring 2) : $(\cdot)$ ist assoziativ

(Ring 3) : $\exists\, 1_R \in R$ mit $1_R \cdot x = x = x \cdot 1_R$ für $x \in R$

(Ring 4) : $(\cdot), (+)$ sind distributiv

R heißt **kommutativ**, falls $(\cdot)$ kommutativ

$R = \mathbb{Z}/4$: Multiplikationstafel

$(\cdot)$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

R: Ring

$M = (M, +, \cdot)$ R-Linksmodul,

wobei $(+) : M \times M \longrightarrow M : (m, m') \longmapsto m + m'$

$(\cdot) : R \times M \longrightarrow M : (r, m) \longmapsto r \cdot m$
$(=: rm)$

mit

(LMod 1) $(M, +)$ ist abelsche Gruppe

(LMod 2) $r \cdot (s \cdot m) = (r \underset{\uparrow}{\cdot} s) \cdot m$ stets
Mult. in R

(LMod 3) $1 \cdot m = m$ stets

(LMod 4) $(r + r') \cdot m = r \cdot m + r' \cdot m$

und $r \cdot (m + m') = r \cdot m + r' \cdot m$

stets

In Ü am letzten Fr: Teilweise Abbildungen versehentlich links (traditionell) statt rechts

R: Ring

M, N: R-Linksmoduln

$f : M \longrightarrow N$ heißt **R-linear** oder **Morphismus von R-Linksmoduln**, falls

$$(rm + r'm')\,f = r(mf) + r'(m'f)$$

für $r, r' \in R$, $m, m' \in M$.

$\mathrm{Kern}(f) := \{ m \in M : mf = 0 \} \subseteq M$: **Kern**

$\mathrm{Im}(f) := \{ mf \in N : m \in M \} \subseteq N$: **Bild** **("image")**

$\mathrm{Cokern}(f) := N / \mathrm{Im}(f)$: **Cokern**

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Kern}(f) \arrow[r, "\iota_{\mathrm{Kern}(f)}", "\text{inj.}"'] & M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f|^{\mathrm{Im}(f)}"', "\text{surj}"] & & N \arrow[r, "p_{\mathrm{Cokern}(f)}", "\text{surj}"'] & \mathrm{Cokern}(f) \\
& & \mathrm{Im}(f) \arrow[ur, "\iota_{\mathrm{Im}(f)}"', "\text{inj}"] & &
\end{tikzcd}$$

$x \longmapsto x$

$m \longmapsto mf$

$y \longmapsto y$

$n \mapsfrom n + \mathrm{Im}(f)$

R: Ring

Gegeben: R-Linksmoduln $M_1, .., M_\alpha$; $N_1, .., N_\beta$; $P_1, .., P_\gamma$

Direkte Summe:

$$\bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i = M_1 \oplus .. \oplus M_\alpha$$
$$= \{(m_1, .., m_\alpha) : m_i \in M_i \text{ für } i \in [1,\alpha]\}$$

$$(m_1, .., m_\alpha) + (m_1', .., m_\alpha') := (m_1 + m_1', .., m_\alpha + m_\alpha')$$

$$r \cdot (m_1, .., m_\alpha) := (rm_1, .., rm_\alpha)$$

Gegeben: $f_{i,j} : M_i \to N_j$ R-linear, für $i \in [1,\alpha]$, $j \in [1,\beta]$

Dann:

$$\begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,\beta} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{\alpha,1} & \cdots & f_{\alpha,\beta} \end{pmatrix} = (f_{i,j})_{i,j}$$

$$\bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i \longrightarrow \bigoplus_{j\in[1,\beta]} N_j$$

$$(m_1, .., m_\alpha) \longmapsto \Big(\sum_{i\in[1,\alpha]} m_i f_{i,1}, .., \sum_{i\in[1,\alpha]} m_i f_{i,\beta}\Big)$$

Bem 34: Das Kompositum von

$$\bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_{j\in[1,\beta]} N_j \xrightarrow{(g_{j,k})_{j,k}} \bigoplus_{k\in[1,\gamma]} P_k$$

ist

$$\bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i \xrightarrow{\left(\sum_{j\in[1,\beta]} f_{i,j}\, g_{j,k}\right)_{i,k}} \bigoplus_{k\in[1,\gamma]} P_k$$

"Komposition ist Matrixmultiplikation"

Bew: noch zu machen.

R : Ring

M, N : R-Linksmoduln

$M \xrightarrow{f} N$: R-linear

- Universelle Eigenschaft Kern :

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Kern}(f) \arrow[r, "\iota"] \arrow[rr, bend left, "0"] & M \arrow[r, "f"] & N \\
& X \arrow[ul, dashed, "\exists!\, x'"] \arrow[u, "x"] \arrow[ur, bend right, "0"'] &
\end{tikzcd}
$$

X : R-Linksmodul

$X \xrightarrow{x} M$: R-linear

- Universelle Eigenschaft Cokern

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & N \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "y"] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[d, dashed, "\exists!\, y'"] \\
& & Y
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{Coker}(f) = N/\mathrm{im}(f)$

Y : R-Linksmodul

$N \xrightarrow{y} Y$: R-linear

R, S, T : Ringe

$M = {}_R M_S$, $N = {}_R N_T$: Bimoduln

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) = \mathrm{Hom}_R({}_R M_S, {}_R N_T)$$
$$= \{ M \xrightarrow{f} N : f \text{ ist } R\text{-linear} \}$$

ist ein S-T-Bimodul via

$$m(s \cdot f * t) := (m * s) f * t$$

z.B. ist

$$\mathrm{Hom}_R({}_R R_R, {}_R N_T) \xrightarrow{\sim} {}_R N_T$$
$$f \longmapsto 1f$$

ein Isomorphismus von R-T-Bimoduln

R : Ring

M_R : R-Rechtsmodul

${}_RN$: R-Linksmodul

Wir betrachten den $\mathbb{Z}$-Modul:

$$\coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbb{Z}$$

$$= \Big\{ (z_{m,n})_{(m,n)} : z_{m,n} \in \mathbb{Z} \text{ für } (m,n) \in M\times N, \underbrace{\{(m,n)\in M\times N : z_{m,n} \neq 0\}}_{\text{"Träger"}} \text{ endlich} \Big\}$$

Darin: $\cdot\; e_{m,n} = \mathbb{1}_{m,n}$: $\begin{cases} \text{Eintrag } 1 \text{ bei } (m,n) \\ \text{Eintrag } 0 \text{ sonst} \end{cases}$

$$\cdot\; U := {}_{\mathbb{Z}}\Big\langle \{ e_{m+m',n} - e_{m,n} - e_{m',n} : m,m' \in M,\ n\in N\} \cup \{ e_{m,n+n'} - e_{m,n} - e_{m,n'} : m\in M,\ n,n'\in N\} \cup \{ e_{mr,n} - e_{m,rn} : m\in M,\ n\in N,\ r\in R\} \Big\rangle$$

Damit sei das Tensorprodukt:

$$M \underset{R}{\otimes} N := \Big(\coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbb{Z} \Big) \Big/ U \quad \text{als } \mathbb{Z}\text{-Modul}$$

Abbildung

Elementartensor

$$\begin{aligned} M\times N &\xrightarrow{\tau} M \underset{R}{\otimes} N \\ (m,n) &\longmapsto e_{m,n} + U =: m\otimes n \end{aligned}$$

$\hookrightarrow M\underset{R}{\otimes} N = {}_{\mathbb{Z}}\langle m\otimes n : m\in M,\ n\in N\rangle$

R, S, T : Ringe

${}_S M_R\,,\ {}_R N_T$: Bimoduln

Bem 58

(1) $${}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R N_T = M \underset{R}{\otimes} N$$

ist S-T-Bimodul, für welchen

$$s \cdot (m \otimes n) * t = (s \cdot m) \otimes (n * t) \quad \text{stets}$$

(2) Wir haben den Isomorphismus

$$\begin{array}{ccccc} {}_R R_R & \underset{R}{\otimes} & {}_R N_T & \xrightarrow{\sim} & {}_R N_T \\ r & \otimes & n & \longmapsto & r \cdot n \\ 1 & \otimes & n & \longleftarrow & n \end{array}$$

von R-T-Bimoduln

(3) Wir haben den Isomorphismus

$$\begin{array}{ccccc} {}_S M_R & \underset{R}{\otimes} & {}_R R_R & \xrightarrow{\sim} & {}_S M_R \\ m & \otimes & r & \longmapsto & m * r \\ m & \otimes & 1 & \longleftarrow & m \end{array}$$

von S-R-Bimoduln.

R, S : Ringe

$${}_R M_S \xleftarrow{\ f\ } {}_R M'_S \qquad R\text{-}S\text{-linear}$$

$${}_R N \xrightarrow{\ g\ } {}_R N' \qquad R\text{-linear}$$

$${}_S X \xleftarrow{\ h\ } {}_S X' \qquad S\text{-linear}$$

<u>Lemma 62</u>

(1) Wir haben den Isomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln

$${}_R({}_R M_S \underset{S}{\otimes} {}_S X\, ,\ {}_R N) \xrightarrow[\sim]{\ \alpha_{X,M,N}\ } {}_S({}_S X\, ,\ {}_R({}_R M_S\, ,\ {}_R N))$$

$$\varphi \overset{\alpha}{\longmapsto} (x \longmapsto (m \longmapsto (m\otimes x)\varphi))$$

$$(m\otimes x \longmapsto m(x\psi)) \overset{\beta}{\longmapsfrom} \psi$$

Mit anderen Worten: $m\,(x(\varphi\alpha)) = (m\otimes x)\,\varphi$

$$(m\otimes x)(\psi\beta) = m(x\,\psi)$$

für $m \in M$, $x \in X$.

<u>Bew</u>: Stand: α wohldef. + $\mathbb{Z}$-linear

β : $\psi\beta$ wohldef. + $\mathbb{Z}$-linear

Zz: • $\psi\beta$ R-linear! – damit dann β wohldef.

• $\alpha\cdot\beta \overset{!}{=} \mathrm{id}_{R(M\underset{S}{\otimes}X,\,N)}$

• $\beta\cdot\alpha \overset{!}{=} \mathrm{id}_{S(X,\,R(M,N))}$

Q : $\mathbb{Z}$-Modul, für welchen gilt:

$$\forall q \in Q \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \exists \tilde{q} \in Q : q = k\tilde{q}$$

Q heißt auch divisibel.

Bsp: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sind divisibel. $\mathbb{Z}$ ist nicht divisibel.

<u>Lemma 67</u> Es ist $\mathbb{Q}$ ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul.

<u>Bew.</u> Sei

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, hook] \arrow[d, "g'"'] & M \\ \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

Gesucht:

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, hook] \arrow[d, "g'"'] & M \arrow[dl, dashed, "\exists g"] \\ \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

Teilgeordnete Menge:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} = \{ (N, h) : M' \subseteq N \subseteq M, \; N \xrightarrow{h} \mathbb{Q} \ \mathbb{Z}\text{-lin} \\ \qquad\qquad \text{und } h|_{M'} = g' \} \\ (N_1, h_1) \leq (N_2, h_2) \;:\Longleftrightarrow\; N_1 \subseteq N_2 \wedge h_1 = h_2|_{N_1} \end{array} \right.$$

Zorn auf $\mathcal{F}$ anwendbar $\Rightarrow$ (M', g') liegt in maximalem Element (N, h).

Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht aus

- einer Menge $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ von **Objekten**
- einer Menge $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ von **Morphismen**
- Abbildungen

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \arrow[r, shift left=3, "\text{Start}"] \arrow[r, shift right=3, "\text{Ziel}"'] & \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \arrow[l, "\text{Identität}" description] \end{tikzcd}$$

- einer Abbildung

$$\{(f,g) \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \times \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} : f\,\text{Ziel} = g\,\text{Start}\} \xrightarrow{\text{Komposition}} \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$$

$$(f,g) \longmapsto (f,g)\,\text{Komposition} =: f \cdot g = fg$$

Also: $\mathcal{C} = (\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}, \text{Start}, \text{Identität}, \text{Ziel}, \text{Komposition})$.

Schreibweisen:

- $X\,\text{Identität} =: \mathrm{id}_X = \mathrm{id} = 1_X = 1$ für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$
- $f\,\text{Start} = X$, $f\,\text{Ziel} = Y$ ⇝ $X \xrightarrow{f} Y$ oder $f : X \to Y$ für $f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$

Die Eigenschaften (Kat 1 – 4) sollen gelten:

(Kat 1) Für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ist

$$X\,\text{Identität}\,\text{Start} = X \wedge X\,\text{Identität}\,\text{Ziel} = X$$

Kurz: $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X$

(Kat 2 – 4) folgen ...

$\mathcal{C}$: Kategorie

$\mathcal{C}^\circ$: entgegengesetzte Kategorie

In $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f \cdot g"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

In $\mathcal{C}^\circ$:

$$\begin{tikzcd} X & Y \arrow[l, dashed, "f"'] & Z \arrow[l, dashed, "g"'] \arrow[ll, dashed, bend left] \end{tikzcd}$$

$$g \circ^\circ f := f \cdot g$$

$X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}$:

- f Isomorphismus, falls $X \xleftarrow{g} Y$ existiert und $f \cdot g = id_X$, $g \cdot f = id_Y$
- f Retraktion, falls $X \xleftarrow{g} Y$ existiert und $g \cdot f = id_Y$
- f Coretraktion, falls $X \xleftarrow{g} Y$ existiert und $f \cdot g = id_X$
- f Monomorphismus, falls für $T \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$ gilt: $uf = vf \Rightarrow u = v$
- f Epimorphismus, falls für $X \xrightarrow{f} Y \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} T$ gilt: $fu = fv \Rightarrow u = v$

$$\begin{tikzcd} & \text{Retraktion} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Epimorphismus} \\ \text{Isomorphismus} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\ & \text{Coretraktion} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Monomorphismus} \end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$: Kategorien

Ein Funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ besteht aus zwei Abbildungen

$$\operatorname{Ob}\mathcal{C} \xrightarrow{\operatorname{Ob} F} \operatorname{Ob}\mathcal{D}$$

$$\operatorname{Mor}\mathcal{C} \xrightarrow{\operatorname{Mor} F} \operatorname{Mor}\mathcal{D},$$

die traditionell beides geschrieben werden (Kompromiß)

die die Eigenschaften (Fun 1, 2) erfüllen:

(Fun 1) Es kommutieren folgende Vierecke:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Mor}\mathcal{C} \arrow[r, "\operatorname{Mor} F"] \arrow[d, "\text{Start}"'] & \operatorname{Mor}\mathcal{D} \arrow[d, "\text{Start}"] \\
\operatorname{Ob}\mathcal{C} \arrow[r, "\operatorname{Ob} F"] & \operatorname{Ob}\mathcal{D}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\operatorname{Mor}\mathcal{C} \arrow[r, "\operatorname{Mor} F"] \arrow[d, "\text{Ziel}"'] & \operatorname{Mor}\mathcal{D} \arrow[d, "\text{Ziel}"] \\
\operatorname{Ob}\mathcal{C} \arrow[r, "\operatorname{Ob} F"] & \operatorname{Ob}\mathcal{D}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\operatorname{Mor}\mathcal{C} \arrow[r, "\operatorname{Mor} F"] & \operatorname{Mor}\mathcal{D} \\
\operatorname{Ob}\mathcal{C} \arrow[r, "\operatorname{Ob} F"] \arrow[u, "\text{Identität}"] & \operatorname{Ob}\mathcal{D} \arrow[u, "\text{Identität}"']
\end{tikzcd}$$

(Fun 2) Für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}$ ist

$$(\operatorname{Mor} F)(f) \cdot (\operatorname{Mor} F)(g) = (\operatorname{Mor} F)(f \cdot g)$$

Arbeitsschreibung: $F := \operatorname{Mor} F$

$F := \operatorname{Ob} F$

Dann:

- $F(X \xrightarrow{f} Y) = (FX \xrightarrow{Ff} FY)$
- $F\,\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{FX}$

$\Big\}$ dank (Fun 1)

- Für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}$ ist

$$Ff \cdot Fg = F(f \cdot g)$$

$\Big\}$ dank (Fun 2)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$: Funktoren zwischen Kategorien

Eine Transformation $a : F \to G$ ist ein Tupel $a = (FX \xrightarrow{aX} GX)_{X \in Ob\,\mathcal{C}}$ von Morphismen in $\mathcal{D}$, für welches gilt:

Für $X \xrightarrow{u} X'$ in $\mathcal{C}$ haben wir das kommutative Viereck:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "aX"] \arrow[d, "Fu"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & GX \arrow[d, "Gu"] \\ FX' \arrow[r, "aX'"] & GX' \end{tikzcd}$$

das Tupel $(aX)_{X \in Ob\,\mathcal{C}}$ ist natürlich

Schreibweise: $F \xrightarrow{a} G$ oder $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=L}] & \mathcal{D} \arrow[from=U, to=L, Rightarrow, "a"] \end{tikzcd}$

Identität: $id_F = (id_F X)_{X \in Ob\,\mathcal{C}} := (id_{FX})_{X \in Ob\,\mathcal{C}}$

Komposition: Für $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=50, "H"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$ mit $a \Downarrow$, $b \Downarrow$ ist

$$a \cdot b = ((a \cdot b)X)_{X \in Ob\,\mathcal{C}}$$

$$:= (aX \cdot bX)_{X \in Ob\,\mathcal{C}}$$

Also $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "H"'{name=L}] & \mathcal{D} \arrow[from=U, to=L, Rightarrow, "a \cdot b"'] \end{tikzcd}$.

$\rightsquigarrow$ Funktorkategorie $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$:
- Objekte: Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$
- Morphismen: Transformationen dazwischen

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$: Kategorien

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$: Funktor

F heißt **Äquivalenz** von Kategorien, wenn es einen Funktor $\mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{D}$ gibt mit $\underbrace{G \circ F \simeq id_{\mathcal{C}}}$ und $\underbrace{F \circ G \simeq id_{\mathcal{D}}}$.

d.h. es existiert eine Isotransformation $G \circ F \xrightarrow[\sim]{\alpha} id_{\mathcal{C}}$

d.h. es existiert eine Isotransformation $F \circ G \xrightarrow[\sim]{\beta} id_{\mathcal{D}}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, bend right, "G \circ F"'] \arrow[d, bend left, "id_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\underset{\sim}{\Rightarrow}}"] \\
\mathcal{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[d, bend right, "F \circ G"'] \arrow[d, bend left, "id_{\mathcal{D}}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\beta}{\underset{\sim}{\Rightarrow}}"] \\
\mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
GFX \arrow[r, "\alpha X", "\sim"'] \arrow[d, "GFu"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "u"] \\
GFX' \arrow[r, "\alpha X'", "\sim"'] & X'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FGY \arrow[r, "\beta Y", "\sim"'] \arrow[d, "FGv"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "v"] \\
FGY' \arrow[r, "\beta Y'", "\sim"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

stets   stets

$\mathcal{A}$: Kategorie mit Nullobjekt $0 = 0_{\mathcal{A}}$

$X_1, \dots, X_m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, $Y_1, \dots, Y_n \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$

Direkte Summe:
$$\begin{cases} \bigoplus\limits_{i\in[1,m]} X_i = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \\ \iota_j : X_j \longrightarrow \bigoplus\limits_{i\in[1,m]} X_i \quad \text{für } j \in [1,m] \\ \pi_j : \bigoplus\limits_{i\in[1,m]} X_i \longrightarrow X_j \quad \text{für } j \in [1,m] \end{cases}$$

mit:

(Summ 1)
$$\begin{tikzcd} & & X_1 \\ S \arrow[r, "\exists! s"] \arrow[urr, bend left, "s_1"] \arrow[drr, bend right, "s_m"'] & \bigoplus\limits_{i\in[1,m]} X_i \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_m"'] & \vdots \\ & & X_m \end{tikzcd}$$
(Produkt)

$s =: (s_1 \dots s_m)$

(Summ 2)
$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[dr, "\iota_1"] \arrow[drr, bend left, "t_1"] & & \\ \vdots & \bigoplus\limits_{i\in[1,m]} X_i \arrow[r, "\exists! t"] & T \\ X_m \arrow[ur, "\iota_m"'] \arrow[urr, bend right, "t_m"'] & & \end{tikzcd}$$
(Coprodukt)

$t =: \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}$

(Summ 3) $\quad \iota_j \pi_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}$

Sei $X_i \xrightarrow{f_{i,j}} Y_j$ in $\mathcal{A}$ gegeben für $i \in [1,m]$, $j \in [1,n]$

$$\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \dots & f_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m,1} & \dots & f_{m,n} \end{pmatrix}} \bigoplus_{j\in[1,n]} Y_j$$

ist charakterisiert durch $\iota_k (f_{i,j})_{i,j} \pi_\ell = f_{k,\ell}$ für $k \in [1,m]$, $\ell \in [1,n]$

Man kann auch schreiben: $\iota_k = (0 \dots 0 \underset{\text{Pos. } k}{1} 0 \dots 0)$, $\pi_\ell = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \}$ Pos. ℓ .

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$: additive Kategorien

$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ Funktor

F heißt additiv, falls:

- $F 0_{\mathcal{A}} \simeq 0_{\mathcal{B}}$

- $F(X_1 \oplus X_2) \underset{\binom{F\iota_1}{F\iota_2}}{\overset{(F\pi_1,\, F\pi_2)}{\rightleftarrows}} FX_1 \oplus FX_2$

  sind sich invertierende Isomorphismen

  für $X_1, X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$

$\binom{F\iota_1}{F\iota_2}$ epimorph geeignet hinreichend

$(F\pi_1, F\pi_2)$ monomorph geeignet hinreichend

Dann: Für $X \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} X'$ in $\mathcal{A}$

ist $F(f_1 + f_2) = Ff_1 + Ff_2$

$\mathcal{A}$: additive Kat.

$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$: volle add. Teilkategorie

$\mathcal{A}/\mathcal{N}$: Faktorkategorie

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$
- $${}_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}(X,Y) := \overbrace{{}_{\mathcal{A}}(X,Y) \Big/ \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y)}^{\text{Faktormodul}} \,,$$

wobei $\mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y)$

$$:= \left\{ X \xrightarrow{f} Y : \exists \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & Y \\ & \underbrace{N}_{\in \mathrm{Ob}(\mathcal{N})} \arrow[ur, "f''"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd} \right\}$$

$$\underset{\mathbb{Z}\text{-Teilmodul}}{\subseteq} {}_{\mathcal{A}}(X,Y)$$

- Komposition repräsentantenweise :

$$X \xrightarrow{f + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y)} Y \xrightarrow{g + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(Y,Z)} Z$$

komponiert zu

$$X \xrightarrow{\quad f \cdot g + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Z) \quad} Z$$

Oft : $\bar{f} \overset{\text{kurz}}{:=} f + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y)$

Universelle Eigenschaft : $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ additiv, $FN \cong 0_{\mathcal{B}}$ für $N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N})$

$$\Longrightarrow \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "R"'] & \mathcal{B} \\ \mathcal{A}/\mathcal{N} \arrow[ur, "\exists!\, \bar{F} \text{ additiv}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", near start] & \end{tikzcd}$$

Restklassenfunktor

$\mathcal{A}$: add. Kat.

$\mathcal{A}$ heißt abelsch, falls (Ab 1, 1°, 2, 2°) gelten

definiert über universelle Eigenschaft

(Ab 1) Jeder Morphismus in $\mathcal{A}$ hat einen Kern

(Ab 1°) Jeder Morphismus in $\mathcal{A}$ hat einen Cokern

(Ab 2) Jeder Monomorphismus in $\mathcal{A}$ ist Kern eines Morphismus in $\mathcal{A}$

(Ab 2°) Jeder Epimorphismus in $\mathcal{A}$ ist Cokern eines Morphismus in $\mathcal{A}$

Bsp. • R-Mod ist abelsch

• $\mathcal{A}$ abelsch $\Rightarrow$ $\mathcal{A}^\circ$ abelsch

---

Wechselkernlemma: $\mathcal{A}$: ab. Kat.

Geg.:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[d, "i"] & \\ L \arrow[r, "j"] & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Y \\ & X & \end{tikzcd}$$

mit: i Kern von f, j Kern von g

Dann:

es ex.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "C"] & K \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "ig"] & \\ L \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "jf"'] & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Y \\ & X & \end{tikzcd}$$

mit: u Kern von ig, v Kern von jf

Dabei darf v auch vorgegeben werden.

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$: abelsche Kategorien

$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$: additiver Funktor

---

$X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ in $\mathcal{A}$ heißt

- kurz exakt, falls: i Kern von r
  und r Cokern von i

  Äquivalent: i Kern von r und r epi.

  Äquivalent: r Cokern von i und i mono

- linksexakt, falls: i Kern von r

- rechtsexakt, falls r Cokern von i

Idealfall

F heißt

- exakt, falls (kurz exakt) $\overset{F}{\longmapsto}$ (kurz exakt)
- linksexakt, falls (kurz exakt) $\overset{F}{\longmapsto}$ (linksexakt)
- rechtsexakt, falls (kurz exakt) $\overset{F}{\longmapsto}$ (rechtsexakt)

Normalfall, z.B. Hom-Funktoren

Normalfall, z.B. Tensorprodukt-Funktoren

Sequenz (oder Folge) in $\mathcal{A}$:

$$\cdots \longrightarrow X^{i-1} \xrightarrow{f^{i-1}} X^i \xrightarrow{f^i} X^{i+1} \xrightarrow{f^{i+1}} X^{i+2} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \quad \bar f^{i-1} \quad I_{f^{i-1}} \quad j^{i-1} \quad \bar f^{i} \quad I_{f^{i}} \quad j^{i} \quad \bar f^{i+1} \quad I_{f^{i+1}} \quad j^{i+1} \quad \cdots$$

Bilder können eingezogen werden

Diese Sequenz heißt lang exakt, falls

$$I_{f^{i-1}} \xrightarrow{j^{i-1}} X^i \xrightarrow{\bar f^{i-1}} I_{f^i}$$

kurz exakt ist für alle i.

A: abelsche Kategorie

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "k"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x", "!"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & Y \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[d, "c"] \\
K' \arrow[r, "i'"] & X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "r'"] & C
\end{tikzcd}$$

(**)

Kerne ⊛ Cokerne

Lemma 134

Für ein kommutatives Viereck (X, Y, X', Y') wie in ⊛ sind äquivalent:

(1) Es ist (X, Y, X', Y') ein Pullback.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "s"] \arrow[ddr, bend right, "t"'] & & \\
& X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X' \arrow[r, "f'"] & Y'
\end{tikzcd}$$

(2) Es ist die Diagonalsequenz
$$X \xrightarrow{(x\ f)} X' \oplus Y \xrightarrow{\binom{f'}{-g}} Y'$$
linksexakt, d.h. es ist $(x\ f)$ ein Kern von $\binom{f'}{-g}$.

(3) In einer Vervollständigung wie in (**) ist k ein Isomorphismus und c ein Monomorphismus.

(4) In jeder Vervollständigung wie in (**) ist k ein Isomorphismus und c ein Monomorphismus.

Beweis

$$\begin{array}{ccc}
(1) & \Longleftrightarrow & (2) \\
\Uparrow\,! & & \Downarrow \\
(3) & \Longleftarrow & (4)
\end{array}$$

noch zu machen

es gibt zu ⊛ eine Vervollständigung (**) dank Bem. 124.(2).