

$R = (R, +, \cdot)$  Ring :

(Ring 1) :  $(R, +)$  abelsche Gruppe

(Ring 2) :  $(\cdot)$  ist assoziativ

(Ring 3) :  $\exists 1_R \in R$  mit  $1_R \cdot x = x = x \cdot 1_R$   
für  $x \in R$

(Ring 4) :  $(\cdot), (+)$  sind distributiv

---

$R$  heißt **kommutativ**, falls  $(\cdot)$  kommutativ

---

$R = \mathbb{Z}/4$  : Multiplikationstafel

$(\cdot)$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$R$ : Ring

$$\Pi = (\Pi, +, \cdot) \quad R\text{-Modul,}$$

wobei  $(+): \Pi \times \Pi \rightarrow \Pi : (u, u') \mapsto u + u'$

$$(\cdot): R \times \Pi \rightarrow \Pi : (r, u) \mapsto r \cdot u$$

(=:  $ru$ )

mit

(\(\perp\)\(\Pi.1\))  $(\Pi, +)$  ist abelsche Gruppe

(\(\perp\)\(\Pi.2\))  $r \cdot (s \cdot u) = (r \cdot s) \cdot u$  stets  
\(\uparrow\) Mult. in  $R$

(\(\perp\)\(\Pi.3\))  $1 \cdot u = u$  stets

(\(\perp\)\(\Pi.4\))  $(r + r') \cdot u = r \cdot u + r' \cdot u$

und  $r \cdot (u + u') = r \cdot u + r \cdot u'$   
 stets

In  $\mathbb{R}$  aus letztem  $F_3$ : Teilweise Abbildungen verkehrliche  
 Gesetz (traditionell) steht rechts

$R$ : Ring

$\Pi, N$ ;  $R$ -Linksmoduln

$f: \Pi \rightarrow N$  heißt  **$R$ -linear** oder **Homomorphismus von  $R$ -Linksmodulen**, falls

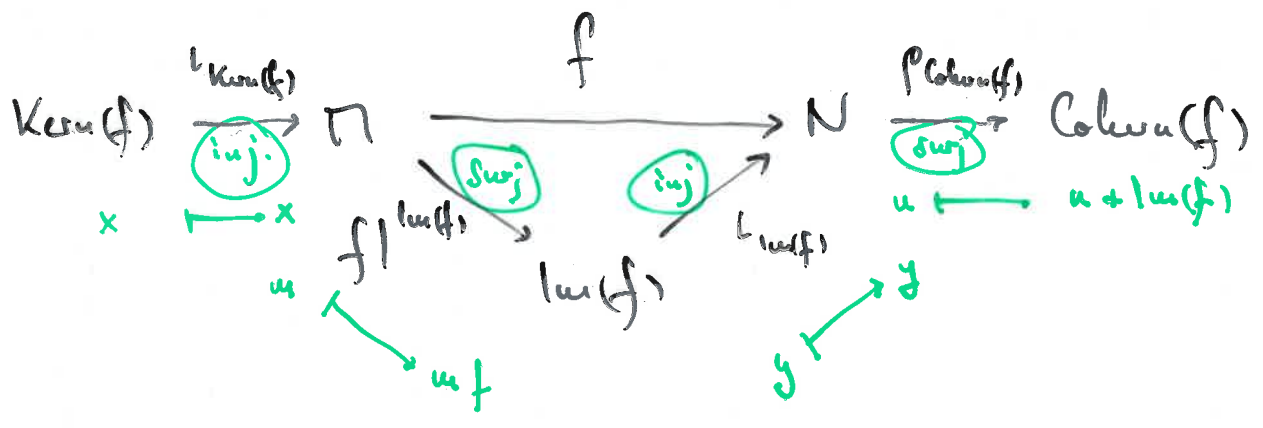
$$(r u + r' u') f = r(u f) + r'(u' f)$$

für  $r, r' \in R, u, u' \in \Pi$ .

$\text{Kern}(f) := \{ u \in \Pi : u f = 0 \} \subseteq \Pi$  : Kern

$\text{Im}(f) := \{ u f \in N : u \in \Pi \} \subseteq N$  : Bild ("image")

$\text{Cokern}(f) := N / \text{Im}(f)$  : Cokern



R: Ring

Gegeben: R-Linksmodulen  $\pi_1, \dots, \pi_\alpha; N_1, \dots, N_\beta; P_1, \dots, P_\gamma$

**Direkte Summe:**

$$\bigoplus_{i \in \{1, \dots, \alpha\}} \pi_i = \pi_1 \oplus \dots \oplus \pi_\alpha$$

$$= \{ (u_1, \dots, u_\alpha) : u_i \in \pi_i \text{ f\u00fcr } i \in \{1, \dots, \alpha\} \}$$

$$(u_1, \dots, u_\alpha) + (u'_1, \dots, u'_\alpha) := (u_1 + u'_1, \dots, u_\alpha + u'_\alpha)$$

$$r \cdot (u_1, \dots, u_\alpha) := (ru_1, \dots, ru_\alpha)$$

Gegeben:  $f_{i,j} : \pi_i \rightarrow N_j$  R-Linear, f\u00fcr  $i \in \{1, \dots, \alpha\}, j \in \{1, \dots, \beta\}$

Dann: 
$$\begin{pmatrix} f_{1,1} & \dots & f_{1,\beta} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{\alpha,1} & \dots & f_{\alpha,\beta} \end{pmatrix} = (f_{i,j})_{i,j}$$

$$\bigoplus_{i \in \{1, \dots, \alpha\}} \pi_i \longrightarrow \bigoplus_{j \in \{1, \dots, \beta\}} N_j$$

$$(u_1, \dots, u_\alpha) \longmapsto \left( \sum_{i \in \{1, \dots, \alpha\}} u_i f_{i,1}, \dots, \sum_{i \in \{1, \dots, \alpha\}} u_i f_{i,\beta} \right)$$

Bem 34: Das Kompositum von

$$\bigoplus_{i \in \{1, \dots, \alpha\}} \pi_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_{j \in \{1, \dots, \beta\}} N_j \xrightarrow{(g_{j,k})_{j,k}} \bigoplus_{k \in \{1, \dots, \gamma\}} P_k$$

ist 
$$\bigoplus_{i \in \{1, \dots, \alpha\}} \pi_i \xrightarrow{(\sum_{j \in \{1, \dots, \beta\}} f_{i,j} g_{j,k})_{i,k}} \bigoplus_{k \in \{1, \dots, \gamma\}} P_k$$

Bew: noch zu machen.

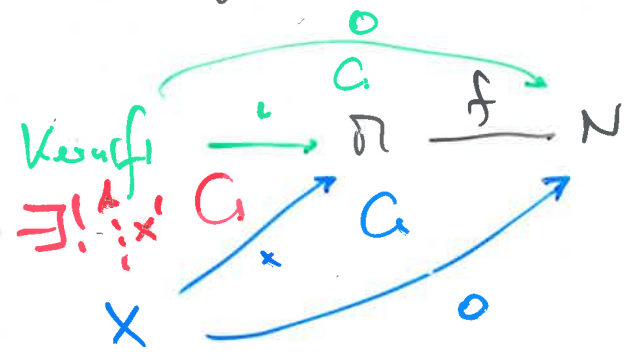
"Komposition ist Matrixmultiplikation"

$R$ : Ring

$M, N$ :  $R$ -Modul

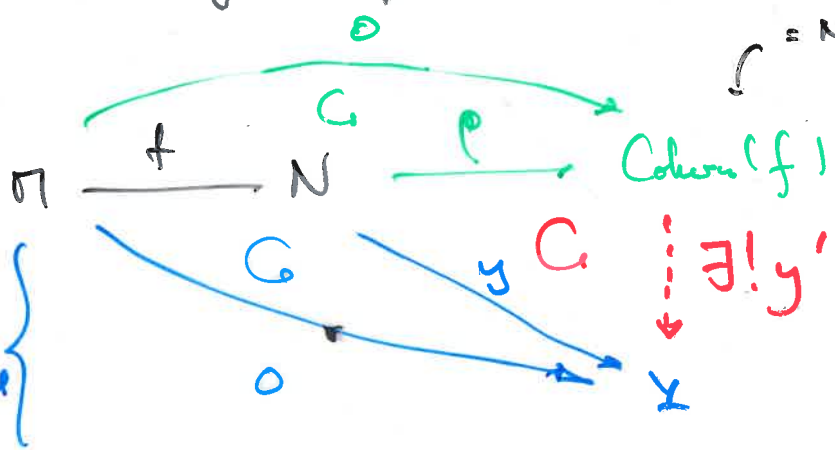
$M \xrightarrow{f} N$ :  $R$ -linear

• universelle Eigenschaft  $\text{Ker}$ :



$X$ :  $R$ -Modul  
 $X \xrightarrow{x} \text{Ker}(f)$ :  $R$ -linear

• universelle Eigenschaft  $\text{Coker}$ :



$\text{Coker}(f) = N / \text{Im}(f)$

$X$ :  $R$ -Modul

$X \xrightarrow{\gamma} X$ :  $R$ -linear

$R, S, T$  : Ringe

$\Pi = {}_R \Pi_S$  ,  $N = {}_R N_T$  : Bimodulen

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(\Pi, N) &= \text{Hom}_R({}_R \Pi_S, {}_R N_T) \\ &= \{ \Pi \xrightarrow{f} N : f \text{ ist } R\text{-linear} \} \end{aligned}$$

ist ein  $S$ - $T$ -Bimodul wa

$$m(s \cdot f * t) := (m * s) f * t$$

z.B. ist

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_R({}_R R_R, {}_R N_T) & \xrightarrow{\sim} & {}_R N_T \\ f & \longmapsto & f \end{array}$$

ein Isomorphismus von  $R$ - $T$ -Bimodulen

$R$  : Ring

$\Pi_R$  :  $R$ -Rechtsmodul

${}_R N$  :  $R$ -Linksmodul

Wir betrachten den  $\mathbb{Z}$ -Modul :

$$\coprod_{(m,n) \in \Pi \times N} \mathbb{Z}$$

$$= \left\{ (z_{m,n})_{(m,n)} : z_{m,n} \in \mathbb{Z} \text{ für } (m,n) \in \Pi \times N, \right. \\ \left. \underbrace{\{(m,n) \in \Pi \times N : z_{m,n} \neq 0\}}_{\text{"Träger"}} \text{ endlich} \right\}$$

Dabei :  $e_{m,n} = 1 \cdot e_{m,n}$  :  $\begin{cases} \text{Eintrag 1 bei } (m,n) \\ \text{Eintrag 0 sonst} \end{cases}$

$$U := \left\langle \begin{aligned} & \{ e_{m+u',n} - e_{m,n} - e_{m,u'} : m, u' \in \Pi, n \in N \} \\ & \cup \{ e_{m,u+u'} - e_{m,n} - e_{m,u'} : m \in \Pi, u, u' \in N \} \\ & \cup \{ e_{m,r,n} - e_{r,m} : m \in \Pi, n \in N, r \in R \} \end{aligned} \right\rangle$$

Dann sei das **Tensorprodukt** :

$$\Pi \otimes_R N := \left( \coprod_{(m,n) \in \Pi \times N} \mathbb{Z} \right) / U \quad \text{als } \mathbb{Z}\text{-Modul}$$

Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \Pi \times N & \xrightarrow{\tau} & \Pi \otimes_R N \\ (m, n) & \longmapsto & e_{m,n} + U =: m \otimes n \end{array}$$

Elementartensor  
↓

$$\hookrightarrow \Pi \otimes N =_{\mathbb{Z}} \langle m \otimes n : m \in \Pi, n \in N \rangle$$

$R, S, T$  : Ringe

$S \Pi_R, R N_T$  : Bimodulen

Bem 58

(1)  $S \Pi_R \otimes_R R N_T = \Pi \otimes_R N$

ist  $S-T$ -Bimodul, für welchen

$s \cdot (m \otimes n) \cdot t = (s \cdot m) \otimes (n \cdot t)$  stets

(2) Wir haben den Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc}
 R_R \otimes_R R N_T & \xrightarrow{\sim} & R N_T \\
 \uparrow \otimes \uparrow & & \uparrow \cdot \uparrow \\
 1 \otimes n & \longleftarrow & n
 \end{array}$$

von  $R-T$ -Bimodulen

(3) Wir haben den Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc}
 S \Pi_R \otimes_R R R & \xrightarrow{\sim} & S \Pi_R \\
 \downarrow \otimes \downarrow & & \downarrow * \downarrow \\
 m \otimes 1 & \longleftarrow & m
 \end{array}$$

von  $S-R$ -Bimodulen.



$R, S$ : Ringe

$$R^{\pi}_S \xleftarrow{f} R^{\pi'}_S \quad R\text{-}S\text{-linear}$$

$$R^N \xrightarrow{g} R^{N'} \quad R\text{-linear}$$

$${}_S X \xleftarrow{h} {}_S X' \quad S\text{-linear}$$

Lemma 62

(1) Wir haben den Isomorphismus von  $\mathbb{Z}$ -Modulen

$$\begin{array}{ccc}
 R(R^{\pi}_S \otimes_S {}_S X, R^N) & \xrightarrow[\sim]{\alpha_{X, \pi, N}} & {}_S({}_S X, R(R^{\pi}_S, R^N)) \\
 \downarrow \varphi & \xrightarrow{\alpha} & (x \mapsto (m \mapsto (m \otimes x) \varphi)) \\
 (m \otimes x \mapsto m(x \varphi)) & \xleftarrow{\beta} & \varphi
 \end{array}$$

Mit anderen Worten:  $m(x(\varphi \alpha)) = (m \otimes x) \varphi$   
 $(m \otimes x)(\varphi \beta) = m(x \varphi)$   
 für  $m \in \pi, x \in X$ .

Bew: Standard:  $\alpha$  wohldef. +  $\mathbb{Z}$ -linear

$\beta$ :  $\varphi \beta$  wohldef. +  $\mathbb{Z}$ -linear

$\mathbb{Z}$ :  $\varphi \beta$   $R$ -linear! - damit dann  $\beta$  wohldef.

- $\alpha \cdot \beta \stackrel{!}{=} \text{id}_{R(\pi \otimes_S X, N)}$
- $\beta \cdot \alpha \stackrel{!}{=} \text{id}_S(X, R(\pi, N))$

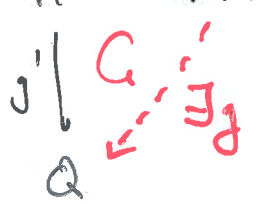
$\mathbb{Q}$ :  $\mathbb{Z}$ -Modul, für welchen gilt:

$$\forall q \in \mathbb{Q} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \exists \tilde{q} \in \mathbb{Q} : q = k\tilde{q}$$

$\mathbb{Q}$  heißt auch **divisibel**.

Bsp:  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  sind divisibel.  $\mathbb{Z}$  ist nicht divisibel.

Lemma 67 Es ist  $\mathbb{Q}$  ein injektiver  $\mathbb{Z}$ -Modul.

Bew. Sei  $\begin{array}{ccc} \pi' & \hookrightarrow & \pi \\ g' \downarrow & & \\ & & \mathbb{Q} \end{array}$  , beachte:  $\begin{array}{ccc} \pi' & \hookrightarrow & \pi \\ g' \downarrow & & \\ & & \mathbb{Q} \end{array}$  

Testgeordnete Menge:

$$\mathcal{F} = \left\{ (N, h) : \begin{array}{l} \pi' \in N \in \pi, \quad N \xrightarrow{h} \mathbb{Q} \text{ } \mathbb{Z}\text{-bi} \\ \text{mit } h|_{\pi'} = g' \end{array} \right\}$$

$$(N_1, h_1) \leq (N_2, h_2) \quad : \Leftrightarrow \quad N_1 \subseteq N_2 \wedge h_1 = h_2|_{N_1}$$

Zuse auf  $\mathcal{F}$  anwendbar  $\Rightarrow (\pi', g')$

liegt in maximalem Element  $(N, h)$ .



$\mathcal{C}$ : Kategorie

$\mathcal{C}^{\circ}$ : entgegengekehrt Kategorie

in  $\mathcal{C}$ :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{f \cdot g}$$

in  $\mathcal{C}^{\circ}$ :

$$X \xleftarrow{f} Y \xleftarrow{g} Z$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{g \circ f := f \cdot g}$$

$X \xrightarrow{f} Y$  in  $\mathcal{C}$ :

- $f$  **Isomorphismus**, falls  $X \xleftarrow{g} Y$  existiert  
mit  $f \cdot g = \text{id}_X$ ,  $g \cdot f = \text{id}_Y$
- $f$  **Retraktion**, falls  $X \xleftarrow{g} Y$  existiert  
mit  $g \cdot f = \text{id}_Y$
- $f$  **Cochjektion**, falls  $X \xleftarrow{g} Y$  existiert  
mit  $f \cdot g = \text{id}_X$
- $f$  **Monomorphismus**, falls für  
 $T \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{v} \end{array} X \xrightarrow{f} Y$  gilt:  $uf = vf \Rightarrow u = v$
- $f$  **Epimorphismus**, falls für  
 $X \xrightarrow{f} Y \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{v} \end{array} T$  gilt:  $fu = fv \Rightarrow u = v$

Isomorphismus  $\Rightarrow$  Retraktion  $\Leftrightarrow$  Epimorphismus  
 $\Rightarrow$  Cochjektion  $\Rightarrow$  Monomorphismus

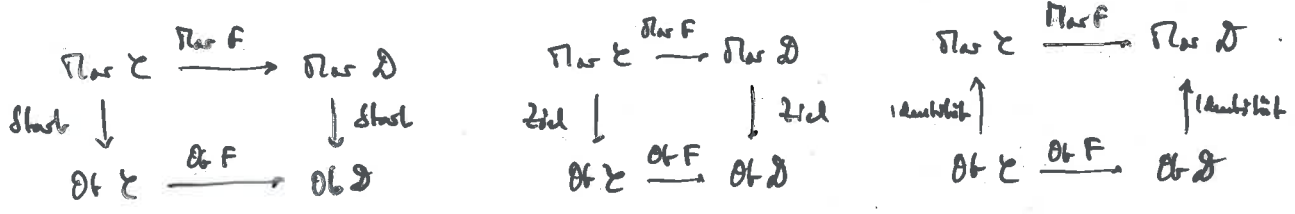
$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ : Kategorien

Ein **Funktor**  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  besteht aus zwei Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \text{Ob } \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{Obj } F} & \text{Ob } \mathcal{D} \\ \text{Mor } \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{Mor } F} & \text{Mor } \mathcal{D}, \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{die traditionell} \\ \text{dieses geschrieben werden} \\ \text{(Kommutativ)} \end{array} \right\}$$

die die Eigenschaften (Fun 1, 2) erfüllen:

(Fun 1) Es kommutieren folgende Vierecke:



(Fun 2) Für  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  in  $\mathcal{C}$  ist

$$(\text{Mor } F)(f) \cdot (\text{Mor } F)(g) = (\text{Mor } F)(f \cdot g)$$

Arbeitsbeschriftung:  $F := \text{Mor } F$   
 $F := \text{Obj } F$

Dann:  $F(X \xrightarrow{f} Y) = (FX \xrightarrow{Ff} FY)$  } durch (Fun 1)

$$F \text{ id}_X = \text{id}_{FX}$$

Für  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  in  $\mathcal{C}$  ist } durch (Fun 2)

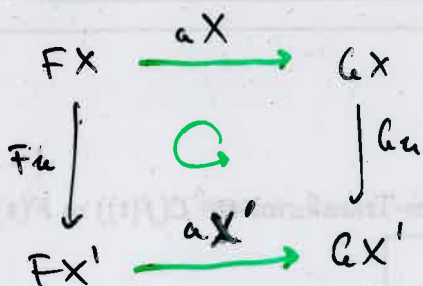
$$Ff \cdot Fg = F(f \cdot g)$$

$\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \xrightarrow{G} \end{matrix} \mathcal{D}$  : Funktoren zwischen Kategorien

Eine **Transformation**  $a : F \rightarrow G$  ist ein

Tupel  $a = (fX \xrightarrow{aX} gX)_{X \in \text{Obj } \mathcal{C}}$  von Morphismen in  $\mathcal{D}$ , für welches gilt:

Für  $X \xrightarrow{u} X'$  in  $\mathcal{C}$  haben wir das kommutative Viereck:



das Tupel  $(aX)_{X \in \text{Obj } \mathcal{C}}$  ist natürlich

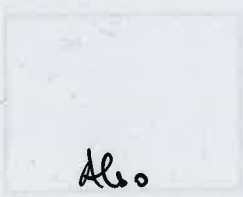
Schreibweise:  $F \xrightarrow{a} G$  oder  $\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow a \\ \xrightarrow{G} \end{matrix} \mathcal{D}$

Identität:  $\text{id}_F = (\text{id}_F X)_{X \in \text{Obj } \mathcal{C}} := (\text{id}_{FX})_{X \in \text{Obj } \mathcal{C}}$

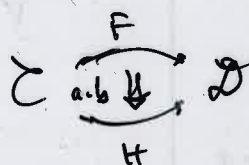
Komposition: Für  $\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{a} \mathcal{D} \\ \xrightarrow{b} \mathcal{E} \end{matrix}$  ist

$$a \cdot b = ((a \cdot b) X)_{X \in \text{Obj } \mathcal{C}}$$

$$:= (aX \cdot bX)_{X \in \text{Obj } \mathcal{C}}$$



Also



$\leadsto$  Funktorkategorie  $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$  : — Objekte: Funktoren von  $\mathcal{C}$  nach  $\mathcal{D}$   
 — Morphismen: Transformationen dazwischen

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$  : Kategorien

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$  : Funktor

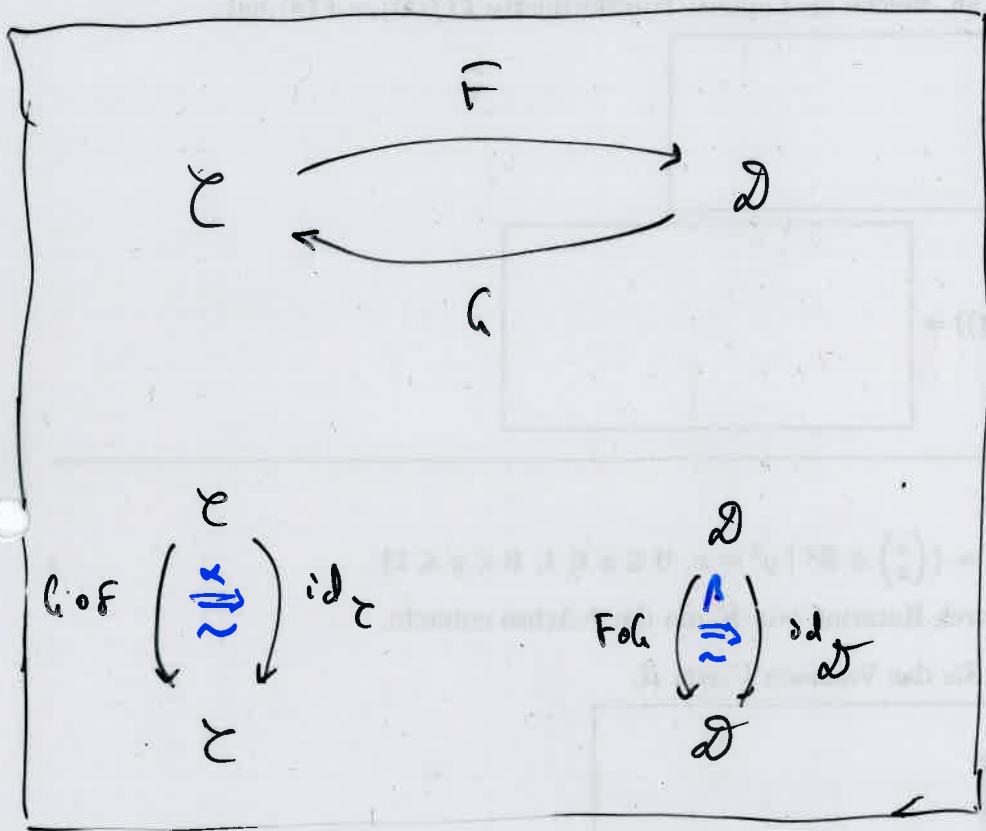
$F$  heißt **Äquivalenz** von Kategorien, wenn

es einen Funktor  $\mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{D}$  gibt

mit  $G \circ F \cong id_{\mathcal{C}}$  und  $F \circ G \cong id_{\mathcal{D}}$ .

dh. es existiert eine Isotransformation; dh. es existiert eine Isotransformation

$$G \circ F \xrightarrow{\alpha} id_{\mathcal{C}} \quad \left| \quad F \circ G \xrightarrow{\beta} id_{\mathcal{D}} \right.$$



$$\begin{array}{ccc}
 GFx & \xrightarrow{\alpha x} & x \\
 GFu \downarrow & G & \downarrow u \\
 GFx' & \xrightarrow{\alpha x'} & x'
 \end{array}$$

mits

$$\begin{array}{ccc}
 FGy & \xrightarrow{\beta y} & y \\
 FGv \downarrow & G & \downarrow v \\
 FGy' & \xrightarrow{\beta y'} & y'
 \end{array}$$

mits



$\mathcal{A}$ : Kategorie mit Nullobjekt  $0 = \emptyset_{\mathcal{A}}$

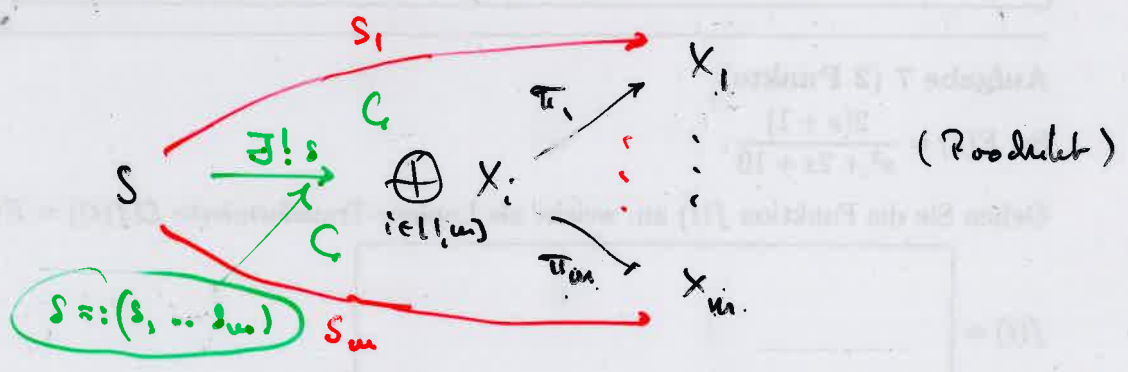
$X_1, \dots, X_m \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ ,  $Y_1, \dots, Y_n \in \text{Ob}(\mathcal{A})$

**Direct Summe:**

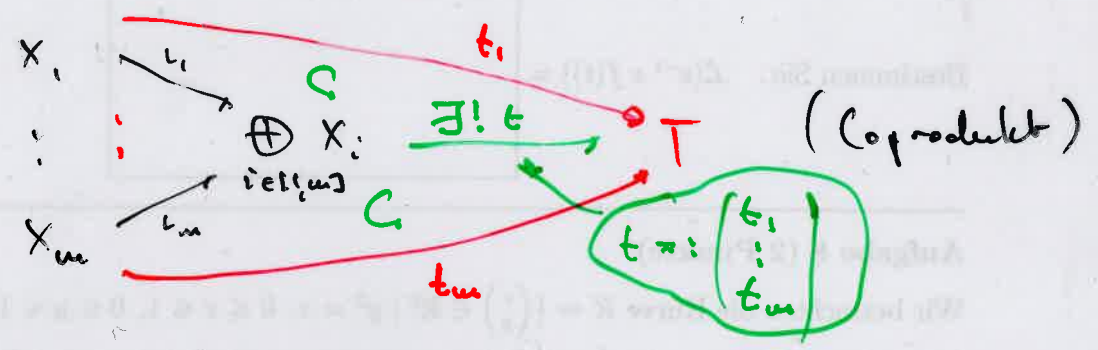
$$\begin{cases} \bigoplus_{i \in [1, m]} X_i = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_m \in \text{Ob}(\mathcal{A}) \\ \iota_j : X_j \rightarrow \bigoplus_{i \in [1, m]} X_i \quad \text{für } j \in [1, m] \\ \pi_j : \bigoplus_{i \in [1, m]} X_i \rightarrow X_j \quad \text{für } j \in [1, m] \end{cases}$$

wert:

(Summe 1)



(Summe 2)



(Summe 3)  $\iota_j \pi_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } j=k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}$

Sei  $X_i \xrightarrow{f_{i,j}} Y_j$  in  $\mathcal{A}$  gegeben für  $i \in [1, m], j \in [1, n]$

$$\bigoplus_{i \in [1, m]} X_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_{j \in [1, n]} Y_j$$

ist charakteristisch durch  $\iota_k (f_{i,j})_{i,j} \pi_\ell = f_{k,\ell}$  für  $k \in [1, n], \ell \in [1, n]$

Man kann auch schreiben:  $\iota_k = (0 \dots 0 \underset{\text{Pos. } k}{1} 0 \dots 0)$ ,  $\pi_\ell = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  } Pos.  $\ell$



$\mathcal{A}, \mathcal{B}$  : additive Kategorien

$F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor

$F$  heißt **additiv**, falls :

- $F 0_{\mathcal{A}} \cong 0_{\mathcal{B}}$

- $F(X_1 \oplus X_2) \xrightleftharpoons[(F_{f_2})]{(F_{f_1}, F_{f_2})} FX_1 \oplus FX_2$

sind sich inverse Isomorphismen

$\begin{pmatrix} F_{f_1} \\ F_{f_2} \end{pmatrix}$  epimorphie  
genügend links

$(F_{f_1}, F_{f_2})$  monomorphie  
genügend links

für  $X_1, X_2 \in \text{Ob}(\mathcal{A})$

Dabei : für  $X \xrightleftharpoons[f_2]{f_1} X' \in \mathcal{A}$

ist  $F(f_1 + f_2) = Ff_1 + Ff_2$



$\mathcal{A}$  : all. Kat.

$\mathcal{A}$  heißt **abelsch**, falls  $(Ab 1, 1^\circ, 2, 2^\circ)$  gelten

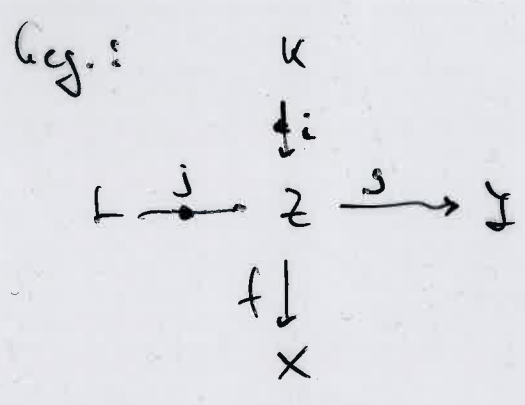
definiert über universelle Eigenschaft

- (Ab 1) Jeder Morphismus in  $\mathcal{A}$  hat einen Kern / einen Cobern
- (Ab 1<sup>o</sup>) Jeder Morphismus in  $\mathcal{A}$  hat einen Cobern
- (Ab 2) Jeder Monomorphismus in  $\mathcal{A}$  ist Kern eines Morphismus in  $\mathcal{A}$
- (Ab 2<sup>o</sup>) Jeder Epimorphismus in  $\mathcal{A}$  ist Cobern eines Morphismus in  $\mathcal{A}$

Bsp. R-Mod ist abelsch

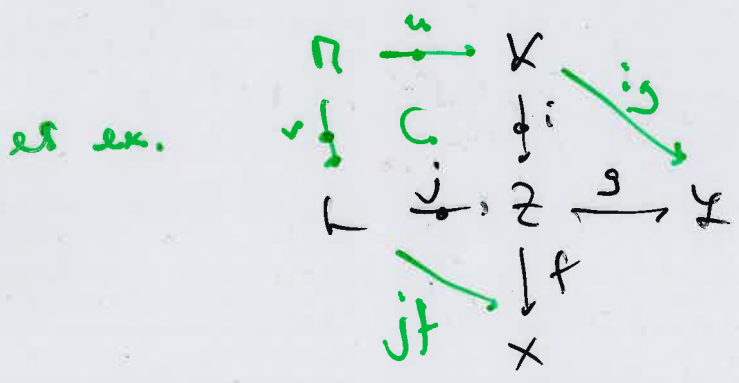
•  $\mathcal{A}$  abelsch  $\Rightarrow \mathcal{A}^\circ$  abelsch

Wechsellemma:  $\mathcal{A}$  : ab. Kat.



with:  $i$  Kern von  $f$   
 $j$  Kern von  $g$

Dann:



with:  $u$  Kern von  $ig$   
 $v$  Kern von  $jf$

Dabei darf  $v$  auch vorgegeben werden

$A, B$  : abelsche Kategorien

$F: A \rightarrow B$  : additiver Funktor

$X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$  in  $A$  heißt

- **kurz exakt**, falls  $i$  Kern von  $r$  und  $r$  Kohern von  $i$
- Äquivalent:  $i$  Kern von  $r$  und  $r$  ep.
- Äquivalent:  $r$  Kohern von  $i$  und  $i$  mon.

- **links exakt**, falls  $i$  Kern von  $r$
- **rechts exakt**, falls  $r$  Kohern von  $i$

**Ideal fall**

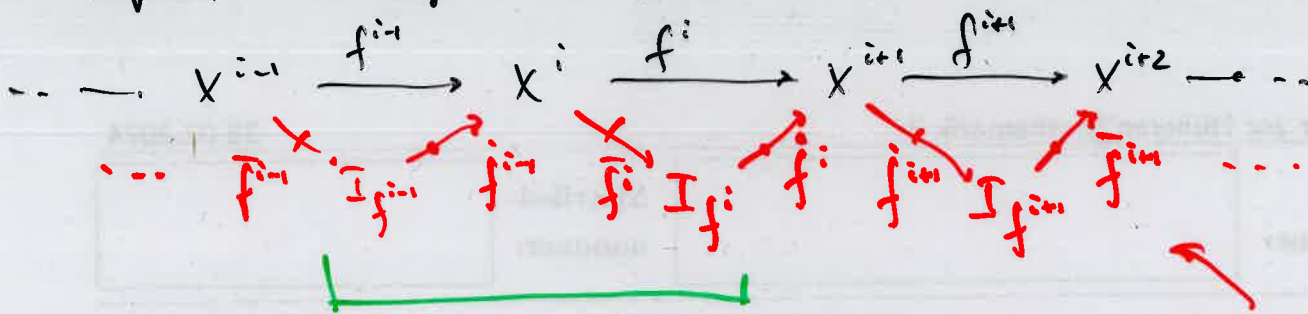
$F$  heißt

- **exakt**, falls (kurz exakt)  $\xrightarrow{F}$  (kurz exakt)
- **links exakt**, falls (kurz exakt)  $\xrightarrow{F}$  (links exakt)
- **rechts exakt**, falls (kurz exakt)  $\xrightarrow{F}$  (rechts exakt)

Natural fall, z. B. Hom-Funktoren

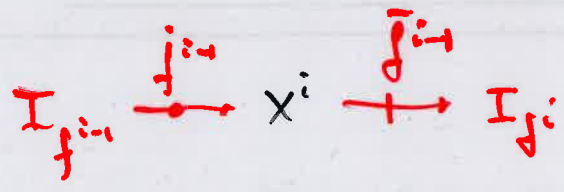
Natural fall, z. B. Tensorprodukt-Funktoren

Sequenz (oder Folge) in  $\mathcal{A}$ :

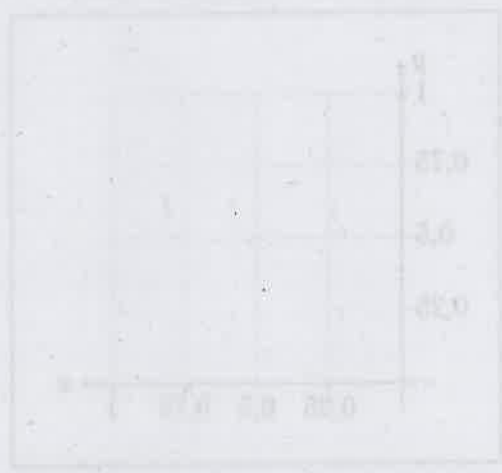


Bilder können  
eingetragen  
werden

Diese Sequenz heißt **lang exakt**, falls

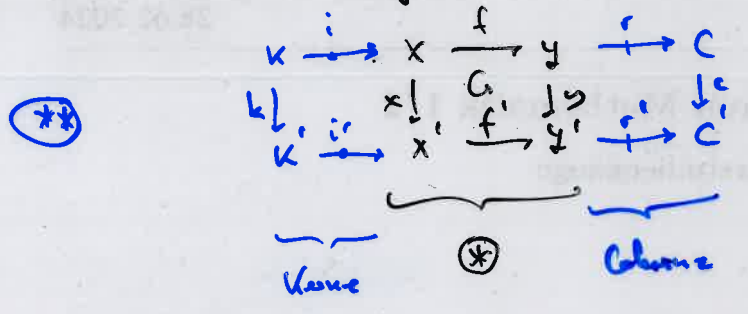


kurz exakt ist für alle  $i$ .



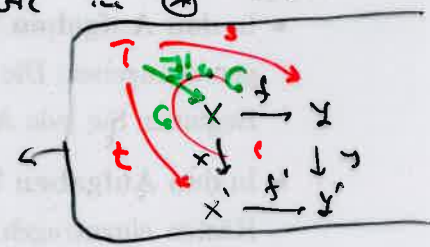


A: abelsche Kategorie



Lemma 134

Für ein kommutatives Vierfeld  $(X, Y, X', Y')$  wie in **\*\*** sind äquivalent:



(1) Es ist  $(X, Y, X', Y')$  ein Pullback

(2) Es ist die Diagonalsequenz

$$X \xrightarrow{(x \ f)} X' \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f' \\ -y \end{pmatrix}} Y'$$

links exakt, d.h. es ist  $(x \ f)$  ein Kern von  $\begin{pmatrix} f' \\ -y \end{pmatrix}$

(3) In einer Veralltänderung wie in **\*\*** ist  $k$  ein Isomorphismus und  $c$  ein Monomorphismus.

(4) In jeder Veralltänderung wie in **\*\*** ist  $k$  ein Isomorphismus und  $c$  ein Monomorphismus.

Beweis

$(1) \Leftrightarrow (2)$



$(3) \Leftrightarrow (4)$

noch zu machen

es gilt in  $\textcircled{*}$   
eine Veralltänderung **\*\***  
durch Lem 124.(2).