M. Künzer

Homologische Algebra, SoSe 24

Lösung 6

Hausaufgabe 21

(1) Sei P eine Menge. Sei $(\leqslant)$ eine Relation auf P, die reflexiv und transitiv ist. Es ist $P = (P, \leqslant)$ also eine präteilgeordnete Menge.

Wir wollen die Kategorie P^{k} konstruieren. Sie habe

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ob}(P^{\mathrm{k}}) & := & P \\ \mathrm{Mor}(P^{\mathrm{k}}) & := & \{ (i,j) \in P \times P \,:\, i \leqslant j \} \,. \end{array}$$

Sei $i \xrightarrow{(i,j)} j$ für $(i,j) \in \mathrm{Mor}(P^{\mathrm{k}})$. Sei $\mathrm{id}_i = (i,i)$ für $i \in \mathrm{Ob}(P^{\mathrm{k}})$.

Für $i \xrightarrow{(i,j)} j \xrightarrow{(j,k)} k$ sei das Kompositum definiert durch $(i,j) \cdot (j,k) := (i,k)$.

Man zeige: Es ist P^{k} eine Kategorie.

(2) Seien $P = (P, \leqslant)$ und $Q = (Q, \leqslant)$ präteilgeordnete Mengen. Sei $f : P \to Q$ eine Abbildung, für welche für $i,\, j \in P$ gilt: $i \leqslant j \Rightarrow if \leqslant jf$.

Man konstruiere den Funktor $f^{\mathrm{k}} : P^{\mathrm{k}} \to Q^{\mathrm{k}}$, für welchen $\mathrm{Ob}(f^{\mathrm{k}}) = f$ ist.

Lösung.

Zu (1). Für $i \in \mathrm{Ob}(P^{\mathrm{k}}) = P$ ist $i \leqslant i$, also $(i,i) \in \mathrm{Mor}(P^{\mathrm{k}})$. Somit ist $\mathrm{id}_i = (i,i)$ wohldefiniert.
Für $(i,j),\ (j,k) \in \mathrm{Mor}(P^{\mathrm{k}})$ ist $i \leqslant j$ und $j \leqslant k$, folglich $i \leqslant k$. Somit ist $(i,j)\cdot(j,k) := (i,k)$ wohldefiniert.

Zu (Kat 1). Für $\mathrm{id}_i = (i,i)$ ist tatsächlich $i \xrightarrow{(i,i)} i$.

Zu (Kat 2). Für $i \xrightarrow{(i,j)} j$ in P^{k} ist $\mathrm{id}_i \cdot (i,j) = (i,i)\cdot(i,j) = (i,j)$ und $(i,j)\cdot \mathrm{id}_j = (i,j)\cdot(j,j) = (i,j)$.

Zu (Kat 3). Für $i \xrightarrow{(i,j)} j \xrightarrow{(j,k)} k$ in P^{k} ist $(i,j)\cdot(j,k) = (i,k)$ und also in der Tat $i \xrightarrow{(i,j)\cdot(j,k)} k$.

Zu (Kat 4). Für $i \xrightarrow{(i,j)} j \xrightarrow{(j,k)} k \xrightarrow{(k,\ell)} \ell$ in P^{k} ist $(i,j)\cdot((j,k)\cdot(k,\ell)) = (i,j)\cdot(j,\ell) = (i,\ell)$
und $((i,j)\cdot(j,k))\cdot(k,\ell) = (i,k)\cdot(k,\ell) = (i,\ell)$, was dasselbe ist.

Zu (2). Sei $(\mathrm{Ob}(f^{\mathrm{k}}))(i) = if$ für $i \in \mathrm{Ob}(P^{\mathrm{k}}) = P$. Es ist dann $if \in Q = \mathrm{Ob}(Q^{\mathrm{k}})$.
Sei $(\mathrm{Mor}(f^{\mathrm{k}}))((i,j)) = (if, jf)$ für $(i,j) \in \mathrm{Mor}(P^{\mathrm{k}})$. Es ist dann $if \leqslant jf$ in Q, also $(if,jf) \in \mathrm{Mor}(Q^{\mathrm{k}})$.

Zu (Fun 1). Für $i \xrightarrow{(i,j)} j$ in P^{k} ist

$$f^{\mathrm{k}}(i \xrightarrow{(i,j)} j) \;=\; (if \xrightarrow{(if,jf)} jf) \;=\; (f^{\mathrm{k}}i \xrightarrow{f^{\mathrm{k}}(i,j)} f^{\mathrm{k}}j)\,.$$

Für $i \in \mathrm{Ob}(P^{\mathrm{k}}) = P$ ist

$$f^{\mathrm{k}}\,\mathrm{id}_i \;=\; f^{\mathrm{k}}(i,i) \;=\; (if,if) \;=\; \mathrm{id}_{if} \;=\; \mathrm{id}_{f^{\mathrm{k}}i}\,.$$

Zu (Fun 2). Für $i \xrightarrow{(i,j)} j \xrightarrow{(j,k)} k$ in P^{k} wird

$$f^{\mathrm{k}}(i,j)\cdot f^{\mathrm{k}}(j,k) \;=\; (if,jf)\cdot(jf,kf) \;=\; (if,kf) \;=\; f^{\mathrm{k}}(i,k)\,.$$

Hausaufgabe 22 Sei $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien. Man zeige oder widerlege.

(1) Es ist $\mathrm{Ob}(F) : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ injektiv.

(2) Es ist $\mathrm{Mor}(F) : \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ surjektiv.

(3) Sei $X \xrightarrow{u} X'$ in $\mathcal{C}$. Es ist u ein Monomorphismus in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn Fu ein Monomorphismus in $\mathcal{D}$ ist.

Lösung.
Zu (1). Die Aussage ist falsch. Wir verwenden Hausaufgabe 21 zur Konstruktion eines Gegenbeispiels.
Sei $P := \{1, 1'\}$. Sei $(\leqslant) := P \times P$, sei also insbesondere $1 \leqslant 1'$ und $1' \leqslant 1$. Dann ist $P = (P, \leqslant)$ präteilgeordnet. Sei $\mathcal{C} := P^{\mathrm{k}}$.
Sei $Q := \{1\}$. Sei $(\leqslant) := Q \times Q = \{(1,1)\}$. Dann ist $Q = (Q, \leqslant)$ präteilgeordnet. Sei $\mathcal{D} := Q^{\mathrm{k}}$.
Sei $f : P \to Q$ mit $1f := 1$ und $1'f := 1$. Für $i,\ j \in P$ gilt: $i \leqslant j \Rightarrow if \leqslant jf$. Sei $F := f^{\mathrm{k}} : \mathcal{C} = P^{\mathrm{k}} \to Q^{\mathrm{k}} = \mathcal{D}$.
Wir zeigen, daß $F : \mathcal{C} \to Dl$ eine Äquivalenz von Kategorien ist.
Da für alle $x,\ y \in P^{\mathrm{k}}$ die Menge ${}_{P^{\mathrm{k}}}(x,y)$ aus genau einem Element besteht, da ${}_{Q^{\mathrm{k}}}(1,1) = \{(1,1)\}$ ist und da eine Abbildung von einer einelementigen Menge in eine einelementige Menge bijektiv ist, ist f^{k} voll und treu.
Da $\mathrm{Ob}(f^{\mathrm{k}}) : \{1, 1'\} \to \{1\}$ surjektiv ist, ist f^{k} strikt dicht, insbesondere dicht.
Also ist $F = f^{\mathrm{k}}$ eine Äquivalenz von Kategorien. Aber $\mathrm{Ob}(F) = \mathrm{Ob}(f^{\mathrm{k}})$ ist nicht injektiv.

Zu (2). Die Aussage ist falsch. Wir verwenden die in (1) konstruierten Kategorien $\mathcal{C} := Q^{\mathrm{k}}$ und $\mathcal{D} := P^{\mathrm{k}}$ zur Konstruktion eines Gegenbeispiels.
Sei $g : Q \to P : 1 \mapsto 1$. Für $i,\ j \in Q$ gilt: $i \leqslant j \Rightarrow ig \leqslant jg$. Sei $F := g^{\mathrm{k}} : \mathcal{C} = Q^{\mathrm{k}} \to P^{\mathrm{k}} = \mathcal{D}$.
Da ${}_{Q^{\mathrm{k}}}(1,1)$ und ${}_{P^{\mathrm{k}}}(1g, 1g) = {}_{P^{\mathrm{k}}}(1,1)$ beide aus einem Element bestehen, ist g^{k} voll und treu.
In P^{k} haben wir den Isomorphismus $1 \xrightarrow{(1,1')} 1'$ mit Inversem $1' \xrightarrow{(1',1)} 1$. Insbesondere ist $1 \simeq 1'$.
Somit ist g^{k} dicht.
Folglich ist $F = g^{\mathrm{k}}$ eine Äquivalenz von Kategorien.
Aber $\mathrm{Mor}(F) = \mathrm{Mor}(g^{\mathrm{k}})$ ist nicht surjektiv, da z.B. $\mathrm{id}_{1'} = (1', 1')$ nicht im Bild von $\mathrm{Mor}(g^{\mathrm{k}})$ liegt.

Zu (3). Die Aussage ist richtig.

Als Äquivalenz von Kategorien ist F voll, treu und dicht.
Wir wählen ein $\mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$, eine Isotransformation $G \circ F \underset{\sim}{\xrightarrow{a}} \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und eine Isotransformation $F \circ G \underset{\sim}{\xrightarrow{b}} \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.
Es ist auch G eine Äquivalenz von Kategorien. Somit ist auch G voll, treu und dicht.

Sei zum einen Fu ein Monomorphismus in $\mathcal{D}$. Wir haben zu zeigen, daß $X \xrightarrow{u} X'$ ein Monomorphismus in $\mathcal{C}$ ist. Seien $T \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} X$ mit $s \cdot u = t \cdot u$ gegeben. Wir haben $s \overset{!}{=} t$ zu zeigen.
Anwendung von F gibt $Fs \cdot Fu = Ft \cdot Fu$. Da Fu monomorph ist, folgt $Fs = Ft$. Da F treu ist, folgt $s = t$.

Sei zum anderen $X \xrightarrow{u} X'$ ein Monomorphismus in $\mathcal{C}$. Wir haben zu zeigen, daß $FX \xrightarrow{Fu} FX'$ ein Monomorphismus in $\mathcal{D}$ ist. Seien $T \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} FX$ mit $s \cdot Fu = t \cdot Fu$ gegeben. Wir haben $s \overset{!}{=} t$ zu zeigen.
Anwendung von G gibt $Gs \cdot GFu = Gt \cdot GFu$. Nun ist $GFu \cdot aX' = aX \cdot u$.

$$\begin{tikzcd}
GT \arrow[r, shift left, "Gs"] \arrow[r, shift right, "Gt"'] & GFX \arrow[r, "GFu"] \arrow[d, "aX"', "\wr"] & GFX' \arrow[d, "aX'", "\wr"'] \\
& X \arrow[r, "u"] & X'
\end{tikzcd}$$

Also wird $Gs \cdot aX \cdot u = Gs \cdot GFu \cdot aX' = Gt \cdot GFu \cdot aX' = Gt \cdot aX \cdot u$. Da aX und u monomorph sind, folgt $Gs = Gt$. Da G treu ist, folgt $s = t$.

Hausaufgabe 23 Wir betrachten die Funktoren

$$\begin{array}{rcrcl}
F & := & \mathbb{Z}/2 \underset{\mathbb{Z}/4}{\otimes} - : & \mathbb{Z}/4\text{-Mod} & \to & \mathbb{Z}/2\text{-Mod} \\
G & := & {}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, -) : & \mathbb{Z}/4\text{-Mod} & \to & \mathbb{Z}/2\text{-Mod}
\end{array}$$

(1) Man konstruiere eine Transformation von F nach G ungleich $(0)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathbb{Z}/4\text{-Mod})}$.

(2) Man zeige: F und G sind nicht isomorph in $[\![\mathbb{Z}/4\text{-Mod}, \mathbb{Z}/2\text{-Mod}]\!]$.

Lösung.
Zu (1). Sei $M \in \mathrm{Ob}(\mathbb{Z}/4\text{-Mod})$. Wir wollen eine $\mathbb{Z}/2$-lineare Abbildung von $\mathbb{Z}/2 \underset{\mathbb{Z}/4}{\otimes} M$ nach ${}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, M)$ angegeben.
Sei zunächst

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2 \times M & \xrightarrow{\hat{a}M} & {}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, M) \\ (z + 2\mathbb{Z}, m) & \mapsto & (w + 2\mathbb{Z} \mapsto (2wz + 4\mathbb{Z})m) \;. \end{array}$$

Dies ist wohldefiniert, da für $w \equiv_2 w'$ sich $2wz \equiv_4 2w'z$ ergibt und da für $z \equiv_2 z'$ sich $2wz \equiv_4 2wz'$ ergibt.
Es ist $\hat{a}M$ eine $\mathbb{Z}/4$-bilineare Abbildung:
Zum einen ist die Abbildung $\hat{a}M$ additiv in $z + 2\mathbb{Z}$ und in m.
Denn für $z,\, z' \in \mathbb{Z}$ und $m \in M$ wird $(z + z' + 2\mathbb{Z}, m)$ abgebildet auf

$$(w + 2\mathbb{Z} \mapsto (2w(z + z') + 4\mathbb{Z})m) \;=\; (w + 2\mathbb{Z} \mapsto (2wz + 4\mathbb{Z})m) + (w + 2\mathbb{Z} \mapsto (2wz' + 4\mathbb{Z})m) \;.$$

Für $z \in \mathbb{Z}$ und $m,\, m' \in M$ wird $(z + z' + 2\mathbb{Z}, m)$ abgebildet auf

$$(w + 2\mathbb{Z} \mapsto (2wz + 4\mathbb{Z})(m + m')) \;=\; (w + 2\mathbb{Z} \mapsto (2wz + 4\mathbb{Z})m) + (w + 2\mathbb{Z} \mapsto (2wz + 4\mathbb{Z})m') \;.$$

Zum anderen wird für $s + 4\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/4$ sowohl $(zs + 2\mathbb{Z}, m)$ als auch $(z + 2\mathbb{Z}, (s + 4\mathbb{Z})m)$ auf

$$(w + 2\mathbb{Z} \mapsto (2wzs + 4\mathbb{Z})m)$$

abgebildet.
Folglich erhalten wir die additive Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2 \underset{\mathbb{Z}/4}{\otimes} M & \xrightarrow{aM} & {}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, M) \\ (z + 2\mathbb{Z}) \otimes m & \mapsto & (w + 2\mathbb{Z} \mapsto (2wz + 4\mathbb{Z})m) \;. \end{array}$$

Diese ist daher auch $\mathbb{Z}/2$-linear.
Wir wollen zeigen, daß $a := (aM)_{M \in \mathrm{Ob}(\mathbb{Z}/4\text{-Mod})}$ eine Transformation ist. Wir haben die Natürlichkeit zu zeigen.
Sei $M \xrightarrow{f} N$ eine $\mathbb{Z}/4$-lineare Abbildung zwischen $\mathbb{Z}/4$-Moduln. Wir haben die Kommutativität des folgenden Vierecks nachzuweisen.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/2 \underset{\mathbb{Z}/4}{\otimes} M \arrow[r, "aM"] \arrow[d, "\mathbb{Z}/2 \underset{\mathbb{Z}/4}{\otimes} f"'] & {}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, M) \arrow[d, "{}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, f)"] \\ \mathbb{Z}/2 \underset{\mathbb{Z}/4}{\otimes} N \arrow[r, "aN"] & {}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, N) \end{tikzcd}$$

Wegen Additivität aller auftretenden Abbildungen genügt es zu zeigen, daß für $z \in \mathbb{Z}$ und $m \in M$ das Element $(z + 2\mathbb{Z}) \otimes m \in \mathbb{Z}/2 \underset{\mathbb{Z}/4}{\otimes} M$ auf beiden Wegen im Diagramm auf dasselbe Element in ${}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, N)$ abgebildet wird.
Zum einen wird

$$\begin{array}{rcl} ((z + 2\mathbb{Z}) \otimes m)(aM)\, {}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, f) & = & (w + 2\mathbb{Z} \mapsto (2wz + 4\mathbb{Z})m)\, {}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, f) \\ & = & (w + 2\mathbb{Z} \mapsto ((2wz + 4\mathbb{Z})m)f) \;. \\ & = & (w + 2\mathbb{Z} \mapsto (2wz + 4\mathbb{Z})(mf)) \;. \end{array}$$

Zum anderen wird

$$\begin{array}{rcl} ((z + 2\mathbb{Z}) \otimes m)(\mathbb{Z}/2 \underset{\mathbb{Z}/4}{\otimes} f)(aN) & = & ((z + 2\mathbb{Z}) \otimes mf)(aN) \\ & = & (w + 2\mathbb{Z} \mapsto ((2wz + 4\mathbb{Z})(mf)) \;. \end{array}$$

Das ist dasselbe.
Ferner ist $a \neq 0$, da z.B. für $M = \mathbb{Z}/4$, $m = 1 + 4\mathbb{Z}$ und $z = 1$ sich

$$((1 + 2\mathbb{Z}) \otimes (1 + 4\mathbb{Z}))(a(\mathbb{Z}/4)) \;=\; (w + 2\mathbb{Z} \mapsto 2w + 4\mathbb{Z})$$

ergibt, und diese Abbildung schickt $1 + 2\mathbb{Z}$ nach $2 + 4\mathbb{Z}$, was ungleich 0 ist.

Zu (2). *Annahme,* wir können eine Isotransformation $b : \mathbb{Z}/2 \underset{\mathbb{Z}/4}{\otimes} \xrightarrow{\sim} {}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, -)$ wählen.

Wir betrachten den Morphismus $(M \xrightarrow{f} N) = (\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4)$ in $\mathbb{Z}/4$-Mod. Wir haben folgendes kommutative Viereck.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/2 \underset{\mathbb{Z}/4}{\otimes} \mathbb{Z}/2 \arrow[r, "b(\mathbb{Z}/2)", "\sim"'] \arrow[d, "\mathbb{Z}/2 \underset{\mathbb{Z}/4}{\otimes} 2"'] & {}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/4) \arrow[d, "{}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, 2)"] \\
\mathbb{Z}/2 \underset{\mathbb{Z}/4}{\otimes} \mathbb{Z}/4 \arrow[r, "b(\mathbb{Z}/4)", "\sim"'] & {}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/4)
\end{tikzcd}$$

Auf der linken Seite steht vertikal der Nullmorphismus, da für $z,\ s\ \in\ \mathbb{Z}$ das Element $(z + 2\mathbb{Z}) \otimes (s + 2\mathbb{Z})$ abgebildet wird auf

$$(z+2\mathbb{Z})\otimes(2s+4\mathbb{Z}) \;=\; (z+2\mathbb{Z})\otimes(2+4\mathbb{Z})(s+4\mathbb{Z}) \;=\; (z+2\mathbb{Z})(2+4\mathbb{Z})\otimes(s+4\mathbb{Z}) \;=\; (2z+2\mathbb{Z})\otimes(s+4\mathbb{Z}) \;=\; 0\,.$$

Auf der rechten Seite steht vertikal nicht der Nullmorphismus, da z.B. die Abbildung $\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}/2$ abgebildet wird auf $\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4$, was ungleich 0 ist.
Aus der Kommutativität des Vierecks und den beiden darin vertretenenen horizontalen Isomorphismen folgt aber, daß auch auf der rechten Seite vertikal der Nullmorphismus steht. Wir haben einen *Widerspruch.*

Hausaufgabe 24 Sei $P = \{0, 1\}$, wobei $0 < 1$. Sei $D := P^{\mathrm{k}}$. Sei R ein Ring.
Sei $\mathcal{C} := [\![D, R\text{-Mod}]\!]$. Objekte in $\mathcal{C}$ sind also Funktoren von D nach R-Mod, die wir als Diagramme der Form $X_0 \xrightarrow{u_{0,1}} X_1$ in R-Mod darstellen.

(1) Man konstruiere einen Funktor $E_0 : \mathcal{C} \to R$-Mod, welcher das Objekt $X_0 \xrightarrow{u_{0,1}} X_1$ nach X_0 abbildet.

(2) Man konstruiere einen Funktor $K : \mathcal{C} \to R$-Mod, welcher das Objekt $X_0 \xrightarrow{u_{0,1}} X_1$ nach $\mathrm{Kern}(u_{0,1})$ abbildet.

(3) Man konstruiere eine Transformation $\alpha : K \to E_0$, welche als Tupel gesehen aus injektiven R-linearen Abbildungen besteht.

Lösung.
Die Objekte in $\mathcal{C} = [\![D, R\text{-Mod}]\!]$ sind Diagramme der Form $X_0 \xrightarrow{u_{0,1}} X_1$ in R-Mod.
Ein Morphismus in $\mathcal{C} = [\![D, R\text{-Mod}]\!]$ von $(X_0 \xrightarrow{u_{0,1}} X_1)$ nach $(Y_0 \xrightarrow{v_{0,1}} Y_1)$ ist ein Paar aus R-linearen Abbildungen $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$ und $X_1 \xrightarrow{f_1} Y_1$, für welche das Viereck

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "u_{0,1}"] \arrow[d, "f_0"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\
Y_0 \arrow[r, "v_{0,1}"] & Y_1
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Zu (1). Sei

$$\begin{array}{cccc}
E_0 : & \mathcal{C} & \to & R\text{-Mod} \\
& \left(\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "u_{0,1}"] \arrow[d, "f_0"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\
Y_0 \arrow[r, "v_{0,1}"] & Y_1
\end{tikzcd}\right) & \mapsto & \left(\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[d, "f_0"'] \\
Y_0
\end{tikzcd}\right)
\end{array} .$$

Start- und Zielobjekt werden nach Konstruktion respektiert.
Da die Identität auf $(X_0 \xrightarrow{u_{0,1}} X_1)$ gegeben ist durch $(\mathrm{id}_{X_0}, \mathrm{id}_{X_1})$, welche von E_0 auf die Identität von $X_0 = E_0(X_0 \xrightarrow{u_{0,1}} X_1)$ abgebildet wird.
Seien in $\mathcal{C}$ Morphismen $(X_0 \xrightarrow{u_{0,1}} X_1) \xrightarrow{(f_0,f_1)} (Y_0 \xrightarrow{v_{0,1}} Y_1) \xrightarrow{(g_0,g_1)} (Z_0 \xrightarrow{w_{0,1}} Z_1)$ gegeben. Es wird

$$(f_0, f_1) \cdot (g_0, g_1) \;=\; (f_0 \cdot g_0, f_1 \cdot g_1)\,.$$

Folglich wird

$$E_0((f_0, f_1) \cdot (g_0, g_1)) \;=\; E_0((f_0 \cdot g_0, f_1 \cdot g_1)) \;=\; f_0 \cdot g_0 \;=\; E_0((f_0, f_1)) \cdot E_0((g_0, g_1))\,.$$

Zu (2). Sei

$$\begin{array}{cccc} K \;: & \mathcal{C} & \to & R\text{-Mod} \\ & \left(\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "u_{0,1}"] \arrow[d, "f_0"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ Y_0 \arrow[r, "v_{0,1}"] & Y_1 \end{tikzcd}\right) & \mapsto & \left(\begin{tikzcd} \mathrm{Kern}(u_{0,1}) \arrow[d, "f_0|^{\mathrm{Kern}(v_{0,1})}_{\mathrm{Kern}(u_{0,1})}"'] \\ \mathrm{Kern}(v_{0,1}) \end{tikzcd}\right)\,. \end{array}$$

Hierbei ist $f_0|^{\mathrm{Kern}(v_{0,1})}_{\mathrm{Kern}(u_{0,1})}$ eine wohldefinierte R-lineare Abbildung, da für $x_0 \in \mathrm{Kern}(u_{0,1})$ sich

$$x_0 f_0 v_{0,1} \;=\; x_0 u_{0,1} f_1 \;=\; 0$$

und also $x_0 f_0 \in \mathrm{Kern}(v_{0,1})$ ergibt.
Start- und Zielobjekt werden nach Konstruktion respektiert.
Da die Identität auf $(X_0 \xrightarrow{u_{0,1}} X_1)$ gegeben ist durch $(\mathrm{id}_{X_0}, \mathrm{id}_{X_1})$, wird sie von K auf $\mathrm{id}_{X_0}|^{\mathrm{Kern}(u_{0,1})}_{\mathrm{Kern}(u_{0,1})} = \mathrm{id}_{\mathrm{Kern}(u_{0,1})}$ abgebildet.
Seien in $\mathcal{C}$ Morphismen $(X_0 \xrightarrow{u_{0,1}} X_1) \xrightarrow{(f_0,f_1)} (Y_0 \xrightarrow{v_{0,1}} Y_1) \xrightarrow{(g_0,g_1)} (Z_0 \xrightarrow{w_{0,1}} Z_1)$ gegeben. Es wird

$$(f_0, f_1) \cdot (g_0, g_1) \;=\; (f_0 \cdot g_0, f_1 \cdot g_1)\,.$$

Folglich wird

$$\begin{array}{rcl} K((f_0, f_1) \cdot (g_0, g_1)) & = & K((f_0 \cdot g_0, f_1 \cdot g_1)) \\ & = & (f_0 \cdot g_0)|^{\mathrm{Kern}(w_{0,1})}_{\mathrm{Kern}(u_{0,1})} \\ & = & f_0|^{\mathrm{Kern}(v_{0,1})}_{\mathrm{Kern}(u_{0,1})} \cdot g_0|^{\mathrm{Kern}(w_{0,1})}_{\mathrm{Kern}(v_{0,1})} \\ & = & K((f_0, f_1)) \cdot K((g_0, g_1))\,. \end{array}$$

Zu (3). Für $X = (X_0 \xrightarrow{u_{0,1}} X_1) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ sei

$$\begin{array}{ccc} KX & \xrightarrow{\alpha X} & E_0 X \\ x & \mapsto & x\,, \end{array}$$

d.h. sei αX die Inklusionsabbildung von $\mathrm{Kern}(u_{0,1})$ nach X_0. Dies ist eine injektive R-lineare Abbildung.
Sei ein Morphismus $f := (f_0, f_1) : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ gegeben.
Nach Konstruktion haben wir das kommutative Viereck

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Kern}(u_{0,1}) \arrow[r, "\alpha X"] \arrow[d, "f_0|^{\mathrm{Kern}(v_{0,1})}_{\mathrm{Kern}(u_{0,1})}"'] & X_0 \arrow[d, "f_0"] \\ \mathrm{Kern}(v_{0,1}) \arrow[r, "\alpha Y"] & Y_0\,, \end{tikzcd}$$

d.h. das kommutative Viereck

$$\begin{tikzcd} KX \arrow[r, "\alpha X"] \arrow[d, "Kf"'] & E_0 X \arrow[d, "E_0 f"] \\ KY \arrow[r, "\alpha Y"] & E_0 Y\,. \end{tikzcd}$$

Folglich ist das Tupel $\alpha = (\alpha X)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ natürlich und damit eine Transformation.