M. Künzer

Homologische Algebra, SoSe 24

Lösung 5

Hausaufgabe 17 (A26) Seien R und S Ringe.
Sei ${}_RM_S \overset{f}{\leftarrow} {}_RM'_S$ eine R-S-lineare Abbildung zwischen R-S-Bimoduln.
Sei ${}_RN \overset{g}{\to} {}_RN'$ eine R-lineare Abbildung zwischen R-Linksmoduln.
Sei ${}_SX \overset{h}{\leftarrow} {}_SX'$ eine S-lineare Abbildung zwischen S-Linksmoduln.
Sei $\alpha_{X,M,N}$ wie in Lemma 62 gegeben.
Man zeige, daß folgendes Viereck von $\mathbb{Z}$-Moduln und $\mathbb{Z}$-linearen Abbildungen kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
{}_R(\,{}_RM_S \underset{S}{\otimes} {}_SX,\ {}_RN) \arrow[r, "\alpha_{X,M,N}", "\sim"'] \arrow[d, "{}_R(f \underset{S}{\otimes} h,\, g)"'] & {}_S(\,{}_SX,\ {}_R(\,{}_RM_S\,,\ {}_RN)) \arrow[d, "{}_S(h,\, {}_R(f,g))"] \\
{}_R(\,{}_RM'_S \underset{S}{\otimes} {}_SX',\ {}_RN') \arrow[r, "\alpha_{X',M',N'}", "\sim"'] & {}_S(\,{}_SX',\ {}_R(\,{}_RM'_S\,,\ {}_RN'))
\end{tikzcd}$$

Lösung. Für $\varphi \in {}_R(M_S \underset{S}{\otimes} X, N)$ ist $\varphi\alpha_{X,M,N} \in {}_S(X, {}_R(M,N))$. Für $x \in X$ ist $x(\varphi\alpha_{X,M,N}) \in {}_R(M,N)$. Für $m \in M$ ist

$$m(x(\varphi\alpha_{X,M,N})) \;=\; (m \otimes x)\varphi\;;$$

vgl. Lemma 62. Analog ist für $\varphi' \in {}_R(M_S \underset{S}{\otimes} X, N)$, $m' \in M'$ und $x' \in X'$

$$m'(x'(\varphi'\alpha_{X',M',N'})) \;=\; (m' \otimes x')\varphi'\;.$$

Für $\varphi \in {}_R(M_S \underset{S}{\otimes} X, N)$ haben wir $\varphi\alpha_{X,M,N}\,{}_S(h,\, {}_R(f,g)) \overset{!}{=} \varphi(f \underset{S}{\otimes} h,\, g)\alpha_{X',M',N'}$ zu zeigen, d.h.

$$h \cdot (\varphi\alpha_{X,M,N}) \cdot {}_R(f,g) \;\overset{!}{=}\; ((f \underset{S}{\otimes} h) \cdot \varphi \cdot g)\alpha_{X',M',N'} \;\in\; {}_S(X',\, {}_R(M',N'))\;.$$

Sei $x' \in X'$. Wir haben $x'(h \cdot (\varphi\alpha_{X,M,N}) \cdot {}_R(f,g)) \overset{!}{=} x'(((f \underset{S}{\otimes} h) \cdot \varphi \cdot g)\alpha_{X',M',N'})$ zu zeigen, d.h.

$$f \cdot (x'h(\varphi\alpha_{X,M,N})) \cdot g \;\overset{!}{=}\; x'(((f \underset{S}{\otimes} h) \cdot \varphi \cdot g)\alpha_{X',M',N'}) \;\in\; {}_R(M',N')\;.$$

Sei $m' \in M'$. Wir haben $m'f \cdot (x'h(\varphi\alpha_{X,M,N})) \cdot g \overset{!}{=} m'(x'(((f \underset{S}{\otimes} h) \cdot \varphi \cdot g)\alpha_{X',M',N'}))$ zu zeigen, d.h.

$$m'(f \cdot (x'h(\varphi\alpha_{X,M,N})) \cdot g) \;\overset{!}{=}\; m'(x'(((f \underset{S}{\otimes} h) \cdot \varphi \cdot g)\alpha_{X',M',N'})) \;\in\; N'\;.$$

Die linke Seite wird

$$\begin{array}{rcl} m'(f \cdot (x'h(\varphi\alpha_{X,M,N})) \cdot g) & = & m'f(x'h(\varphi\alpha_{X,M,N}))g \\ & = & (m'f \otimes x'h)\varphi g\;. \end{array}$$

Die rechte Seite wird

$$\begin{array}{rcl} m'(x'(((f \underset{S}{\otimes} h) \cdot \varphi \cdot g)\alpha_{X',M',N'})) & = & (m' \otimes x')((f \underset{S}{\otimes} h) \cdot \varphi \cdot g) \\ & = & (m' \otimes x')(f \underset{S}{\otimes} h)\varphi g \\ & = & (m'f \otimes x'h)\varphi g\;. \end{array}$$

Das ist dasselbe.

Wir haben also eine Isotransformation von ${}_R(= \underset{S}{\otimes} -, \equiv)$ nach ${}_S(-,\, {}_R(=, \equiv))$ konstruiert, also zwischen Funktoren von $(S\text{-Mod})^\circ \times (R\text{-Mod-}S)^\circ \times R\text{-Mod}$ nach $\mathbb{Z}\text{-Mod}$.

Hausaufgabe 18 (A28) Sei R ein Ring. Man zeige folgende Aussagen.

(1) Sei A eine Menge. Sei für jedes $\alpha \in A$ ein projektiver R-Linksmodul P_α gegeben. Dann ist $\coprod_{\alpha\in A} P_\alpha$ projektiv.

(2) Seien R-Linksmoduln X und Y gegeben mit $X \oplus Y$ projektiv. Dann sind auch X und Y projektiv.

(3) Ein R-Linksmodul X ist genau dann projektiv, wenn es eine Menge B und einen R-Linksmodul Y gibt mit $X \oplus Y \simeq \coprod_{\beta\in B} R$. Insbesondere ist $R^{\oplus n}$ projektiv für $n \geqslant 0$.

(4) Für jeden R-Linksmodul M gibt es einen projektiven R-Linksmodul P und eine surjektive R-lineare Abbildung $P \to M$.

Lösung.
Zu (1). Sei folgendes Diagramm von R-Linksmoduln und R-linearen Abbildungen gegeben.

$$\begin{tikzcd} & \coprod_{\alpha\in A} P_\alpha \arrow[d, "u"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Dabei sei f surjektiv. Zu finden ist eine R-lineare Abbildung $\coprod_{\alpha\in A} P_\alpha \xrightarrow{v} M$ mit $v \cdot f \overset{!}{=} u$.

Sei $\beta \in A$. Da P_β projektiv ist, können wir eine R-lineare Abbildung $P_\beta \xrightarrow{v_\beta} M$ wählen, für welche folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} & P_\beta \arrow[dl, "v_\beta"'] \arrow[d, "\iota_\beta \cdot u"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Dank universeller Eigenschaft des Coprodukts gibt es eine eindeutige R-lineare Abbildung $\coprod_{\alpha\in A} P_\alpha \xrightarrow{v} M$ mit $\iota_\beta \cdot v = v_\beta$ für $\beta \in A$.
Für $\beta \in A$ wird

$$\iota_\beta \cdot (v \cdot f) \;=\; v_\beta \cdot f = \iota_\beta \cdot u\ .$$

Wegen der Eindeutigkeit aus der universellen Eigenschaft des Coprodukts folgt $v \cdot f = u$, wie verlangt.

Zu (2). Es genügt zu zeigen, daß X projektiv ist.
Sei folgendes Diagramm von R-Linksmoduln und R-linearen Abbildungen gegeben.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "u"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Dabei sei f surjektiv. Zu finden ist eine R-lineare Abbildung $X \xrightarrow{v} M$ mit $v \cdot f \overset{!}{=} u$.

Wir betrachten die R-lineare Abbildung $X \oplus Y \xrightarrow{\binom{u}{0}} N$. Da $X \oplus Y$ projektiv ist, können wir eine R-lineare Abbildung $X \oplus Y \xrightarrow{\binom{v}{w}} M$ wählen, die folgendes Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{tikzcd} & X \oplus Y \arrow[dl, "\binom{v}{w}"'] \arrow[d, "\binom{u}{0}"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Es ist also $\binom{u}{0} = \binom{v}{w} \cdot f = \binom{v\cdot f}{w\cdot f}$. Insbesondere ist $u = v \cdot f$, wie verlangt.

Zu (3). *Vorbemerkung* 1: Es ist R ein projektiver R-Linksmodul.

Sei folgendes Diagramm von R-Linksmoduln und R-linearen Abbildungen gegeben.

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, "u"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Dabei sei f surjektiv. Zu finden ist eine R-lineare Abbildung $R \xrightarrow{v} M$ mit $v \cdot f \overset{!}{=} u$.

Es ist $ru = r \cdot 1u$. Wir wählen $m \in M$ mit $mf = 1u$, möglich, da f surjektiv ist. Wir setzen $rv := r \cdot m$ für $r \in R$.

Es ist v eine R-lineare Abbildung: Für $s,\, s' \in R$ und $r,\, r' \in R$ wird $(s \cdot r + s' \cdot r')v = (s \cdot r + s' \cdot r') \cdot m = s \cdot (r \cdot m) + s' \cdot (r' \cdot m) = s \cdot rv + s' \cdot r'v$.

Für $r \in R$ ist $r(v \cdot f) = rvf = (r \cdot m)f = r \cdot mf = r \cdot 1u = ru$. Also ist $v \cdot f = u$.

Dies zeigt *Vorbemerkung* 1.

Vorbemerkung 2: Seien R-Linksmoduln P und Q gegeben. Sei $P \simeq Q$. Genau dann ist P projektiv, wenn Q projektiv ist.

Es genügt zu zeigen, daß aus der Projektivität von P die Projektivität von Q folgt. Wir wählen einen Isomorphismus $P \underset{\sim}{\xrightarrow{a}} Q$.

Sei folgendes Diagramm von R-Linksmoduln und R-linearen Abbildungen gegeben.

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[d, "u"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Dabei sei f surjektiv. Zu finden ist eine R-lineare Abbildung $Q \xrightarrow{v} M$ mit $v \cdot f \overset{!}{=} u$.

Da P projektiv ist, finden wir eine R-lineare Abbildung $w : P \to M$ mit $w \cdot f = a \cdot u$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "w"'] \arrow[d, "a \cdot u"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Sei $v := a^{-1} \cdot w : Q \to M$. Es wird $v \cdot f = a^{-1} \cdot w \cdot f = a^{-1} \cdot a \cdot u = u$, wie verlangt.

Dies zeigt *Vorbemerkung* 2.

Vorbemerkung 3: Sei $M \xrightarrow{g} X$ eine surjektive R-lineare Abbildung zwischen R-Linksmoduln. Sei X projektiv. Dann ist $M \simeq X \oplus \mathrm{Kern}(g)$.

Da X projektiv ist, finden wir eine R-lineare Abbildung $X \xrightarrow{v} M$ mit $v \cdot g = \mathrm{id}_X$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "v"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] \\ M \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

Wir betrachten die Inklusionsabbildung $\mathrm{Kern}(g) \xrightarrow{i} M$.

Nun ist $(\mathrm{id}_M - g \cdot v) \cdot g = g - g \cdot v \cdot g = g - g \cdot \mathrm{id}_X = 0$. Dank universeller Eigenschaft des Kerns gibt es genau eine R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{w} \mathrm{Kern}(g)$ mit $w \cdot i = \mathrm{id}_M - g \cdot v$.

Es ist $i \cdot w \cdot i = i \cdot (\mathrm{id}_M - g \cdot v) = i + 0 = 1 \cdot i$. Wegen i injektiv folgt $i \cdot w = 1$.

Es ist $v \cdot w \cdot i = v \cdot (\mathrm{id}_M - g \cdot v) = v - v \cdot g \cdot v = v - \mathrm{id}_X \cdot v = 0 = 0 \cdot i$. Wegen i injektiv folgt $v \cdot w = 0$.

Wir haben die R-linearen Abbildungen $M \xrightarrow{(g\ w)} X \oplus \mathrm{Kern}(g)$ und $M \xleftarrow{\binom{v}{i}} X \oplus \mathrm{Kern}(g)$.

Es ist $(g\ w) \cdot \binom{v}{i} = g \cdot v + w \cdot i = \mathrm{id}_M = 1$.

Es ist $\binom{v}{i} \cdot (g\ w) = \begin{pmatrix} v \cdot g & v \cdot w \\ i \cdot g & i \cdot w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Also sind diese beiden R-linearen Abbildungen sich invertierende Isomorphismen.

Insbesondere ist $M \simeq X \oplus \mathrm{Kern}(g)$, wie behauptet. Dies zeigt *Vorbemerkung* 3.

Sei X ein R-Linksmodul.

Falls wir eine Menge B und einen R-Linksmodul Y haben mit $X \oplus Y \simeq \coprod_{\beta \in B} R$, dann können wir mit der Vorbemerkung 1 und (1) folgern, daß $\coprod_{\beta \in B} R$ projektiv ist. Mit Vorbemerkung 2 folgt, daß $X \oplus Y$ projektiv ist. Mit (2) folgt, daß X projektiv ist.

Sei nun umgekehrt X projektiv. Für $x \in X$ haben wir die R-lineare Abbildung $g_x : R \to X : r \mapsto rg_x := r \cdot x$. Denn für $s,\, s' \in R$ und $r,\, r' \in R$ wird $(s\cdot r + s'\cdot r')g_x = (s\cdot r + s'\cdot r')\cdot x = s\cdot(r\cdot x) + s'\cdot(r'\cdot x) = s\cdot rg_x + s'\cdot r'g_x$.

Mit der universellen Eigenschaft des Coprodukts erhalten wir die R-lineare Abbildung $\coprod_{x\in X} R \xrightarrow{g} X$ mit $\iota_x \cdot g = g_x$ für $x \in X$. Diese ist surjektiv, da für ein gegebenes $x_0 \in X$ dieses geschrieben werden kann als $(1\iota_{x_0})g = 1(\iota_{x_0}\cdot g) = 1g_{x_0} = x_0$. Dank Vorbemerkung 3 folgt nun aus X projektiv, daß $\coprod_{x\in X} R \simeq X \oplus \mathrm{Kern}(g)$.

Zu (4). Für $m \in M$ haben wir die R-lineare Abbildung $g_m : R \to M : r \mapsto rg_m := r \cdot m$. Dank (3) ist $P := \coprod_{m\in M} R$ projektiv. Mit der universellen Eigenschaft des Coprodukts erhalten wir die R-lineare Abbildung

$$P \;=\; \coprod_{m\in M} R \xrightarrow{g} M$$

mit $\iota_m \cdot g = g_m$ für $m \in M$. Diese ist surjektiv, da für $m_0 \in M$ sich $(1\iota_{m_0})g = m_0$ ergibt.

Hausaufgabe 19 (A29) Sei R ein Ring. Man zeige folgende Aussagen.

(1) Sei A eine Menge. Sei für jedes $\alpha \in A$ ein injektiver R-Linksmodul I_α gegeben. Dann ist $\prod_{\alpha\in A} I_\alpha$ injektiv.

(2) Sind X und Y zwei R-Linksmoduln so, daß $X \oplus Y$ injektiv ist, dann sind auch X und Y injektiv.

(3) Aus dem Beweis von Satz 68 wissen wir: Ist ${}_{\mathbb{Z}}J$ ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul, dann ist ${}_{\mathbb{Z}}({}_{\mathbb{Z}}R_R,\, {}_{\mathbb{Z}}J)$ ein injektiver R-Linksmodul.

Man verwende dies, um zu zeigen: Sei $n \geqslant 1$. Es ist $\mathbb{Z}/n$ ein injektiver $\mathbb{Z}/n$-Modul.

Lösung.

Zu (1). Sei folgendes Diagramm von R-Linksmoduln und R-linearen Abbildungen gegeben.

$$\begin{tikzcd} & \prod_{\alpha\in A} I_\alpha \\ M & N \arrow[l, "f"'] \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd}$$

Dabei sei f injektiv. Zu finden ist eine R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{v} \prod_{\alpha\in A} I_\alpha$ mit $f\cdot v \overset{!}{=} u$.

Sei $\beta \in A$. Da I_β injektiv ist, können wir eine R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{v_\beta} I_\beta$ wählen, für welche folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} & I_\beta \\ M \arrow[ur, "v_\beta"] & N \arrow[l, "f"'] \arrow[u, "u\cdot\pi_\beta"'] \end{tikzcd}$$

Dank universeller Eigenschaft des Produkts gibt es eine eindeutige R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{v} \prod_{\alpha\in A} I_\alpha$ mit $v\cdot\pi_\beta = v_\beta$ für $\beta\in A$.

Für $\beta \in A$ wird

$$(f\cdot v)\cdot\pi_\beta \;=\; f\cdot v_\beta = u\cdot\pi_\beta\;.$$

Wegen der Eindeutigkeit aus der universellen Eigenschaft des Produkts folgt $f\cdot v = u$, wie verlangt.

Zu (2). Es genügt zu zeigen, daß X injektiv ist.

Sei folgendes Diagramm von R-Linksmoduln und R-linearen Abbildungen gegeben.

$$\begin{tikzcd} & X \\ M & N \arrow[l, "f"'] \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd}$$

Dabei sei f injektiv. Zu finden ist eine R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{v} X$ mit $f\cdot v \overset{!}{=} u$.

Wir betrachten die R-lineare Abbildung $N \xrightarrow{(u\;0)} X \oplus Y$.

Da $X \oplus Y$ injektiv ist, können wir eine R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{(\, v \; w \,)} X \oplus Y$ wählen, die folgendes Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{tikzcd} & X \oplus Y \\ M \arrow[ur, "(\, v \; w \,)"] & N \arrow[l, "f"'] \arrow[u, "(\, u \; 0 \,)"'] \end{tikzcd}$$

Es ist also $(\, u \; 0 \,) = f \cdot (\, v \; w \,) = (\, f{\cdot}v \; f{\cdot}w \,)$. Insbesondere ist $u = f \cdot v$, wie verlangt.

Zu (3). Wir wissen: Es ist $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul.
Wir wissen dann auch: Es ist ${}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ein injektiver $\mathbb{Z}/n$-Modul.
Es genügt zeigen: Es ist ${}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \overset{!}{\simeq} \mathbb{Z}/n$ als $\mathbb{Z}/n$-Modul, d.h. als abelsche Gruppe.
Eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist durch Angabe eines Elements $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ bestimmt, indem wir $z \in \mathbb{Z}$ nach $z \cdot x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ abbilden. Wir schreiben diese Abbildung

$$g_x \;:\; \mathbb{Z} \;\to\; \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \;:\; z \;\mapsto\; zg_x \;:=\; z \cdot x \;.$$

Dank universeller Eigenschaft des Faktormoduls ist eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung von $\mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ also durch Angabe eines Elements $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ bestimmt, für welches $w \cdot x = 0$ ist für $w \in n\mathbb{Z}$. Mit anderen Worten, dafür sollte $n \cdot x = 0$ sein.
Wir schreiben diese Abbildung

$$\bar{g}_x \;:\; \mathbb{Z}/n \;\to\; \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \;:\; (z + n\mathbb{Z}) \;\mapsto\; (z + n\mathbb{Z})\bar{g}_x \;:=\; z \cdot x \;.$$

Es ist

$$\{\, x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \,:\, n \cdot x = 0 \,\} \;=\; \{\, \tfrac{k}{n} + \mathbb{Z} \,:\, k \in \mathbb{Z} \,\} \;.$$

Also ist

$${}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \;=\; \{\, \bar{g}_{\frac{k}{n}+\mathbb{Z}} \,:\, k \in \mathbb{Z} \,\} \;=\; {}_{\mathbb{Z}}\langle \bar{g}_{\frac{1}{n}+\mathbb{Z}} \rangle \;.$$

Darin hat $\bar{g}_{\frac{1}{n}+\mathbb{Z}}$ die Ordnung n. Folglich haben wir den folgenden Isomorphismus abelscher Gruppen.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}/n & \overset{\sim}{\longrightarrow} & {}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ k + n\mathbb{Z} & \mapsto & \bar{g}_{\frac{k}{n}+\mathbb{Z}} \;. \end{array}$$

Hausaufgabe 20 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Sei darin $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ gegeben. Man zeige:

(1) Ist $f \cdot g$ ein Monomorphismus, dann ist f ein Monomorphismus.

(2) Ist f ein Monomorphismus und eine Retraktion, dann ist f ein Isomorphismus.

(3) Sind f und g Epimorphismen, dann auch $f \cdot g$.

(4) Es ist f genau dann ein Monomorphismus in $\mathcal{C}$ wenn f ein Epimorphismus in $\mathcal{C}^\circ$ ist.

Lösung.

Zu (1). Seien $T \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$ mit $u \cdot f = v \cdot f$ gegeben. Wir haben $u \overset{!}{=} v$ zu zeigen.
Es wird $u \cdot f \cdot g = v \cdot f \cdot g$. Da $f \cdot g$ monomorph ist, folgt in der Tat $u = v$.

Zu (2). Sei f ein Monomorphismus und eine Retraktion. Wegen letzterem können wir ein $X \xleftarrow{g} Y$ wählem mit $g \cdot f = \mathrm{id}_Y$. Es folgt

$$f \cdot g \cdot f \;=\; f \cdot \mathrm{id}_Y \;=\; f = \mathrm{id}_X \cdot f \;.$$

Da f monomorph ist, folgt $f \cdot g = \mathrm{id}_X$.
Folglich sind f und g sich invertierende Isomorphismen.

Zu (3). Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} T$ mit $f \cdot g \cdot u = f \cdot g \cdot v$ gegeben. Wir haben $u \overset{!}{=} v$ zu zeigen.
Da f epimorph ist, folgt $g \cdot u = g \cdot v$.

Da g epimorph ist, folgt in der Tat $u = v$.

Zu (4).
Sei f ein Monomorphismus in $\mathcal{C}$. Zu zeigen ist: Es ist f ein Epimorphismus in $\mathcal{C}^\circ$.
In $\mathcal{C}^\circ$ sei $Y \xrightarrow{f} X \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} T$ gegeben mit $f \cdot^\circ u = f \cdot^\circ v$. Wir haben $u \overset{!}{=} v$ zu zeigen.
Es ist $u \cdot f = f \cdot^\circ u = f \cdot^\circ v = v \cdot f$. Da f ein Monomorphismus in $\mathcal{C}$ ist, folgt in der Tat $u = v$.

Sei nun f ein Epimorphismus in $\mathcal{C}^\circ$. Zu zeigen ist: Es ist f ein Monomorphismus in $\mathcal{C}$.
In $\mathcal{C}$ sei $T \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$ gegeben mit $u \cdot f = v \cdot f$. Wir haben $u \overset{!}{=} v$ zu zeigen.
Es ist $f \cdot^\circ u = u \cdot f = v \cdot f = f \cdot^\circ v$. Da f ein Epimorphismus in $\mathcal{C}^\circ$ ist, folgt in der Tat $u = v$.

`pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/halg24/`