M. Künzer

Homologische Algebra, SoSe 24

Lösung 4

Hausaufgabe 13 (A21.(2))
Seien R, S, T Ringe.
Seien Bimoduln $M = {}_S M_R$ und $N = {}_R N_T$ gegeben.
Man zeige unter Verwendung der Abbildung $\lambda_{s,t}$ aus dem Beweis zu Bemerkung 58:
Es gibt auf der abelschen Gruppe ${}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R N_T$ eine S-T-Bimodulstruktur, für welche

$$s \cdot (m \otimes n) * t \;=\; (s \cdot m) \otimes (n * t)$$

ist für $m \in M$, $n \in N$, $s \in S$, $t \in T$.

Lösung. Für $s \in S$ und $t \in T$ verfügen wir über die $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} M \underset{R}{\otimes} N & \xrightarrow{\lambda_{s,t}} & M \underset{R}{\otimes} N \\ m \otimes n & \longmapsto & (s \cdot m) \otimes (n * t)\ . \end{array}$$

Sei $x = \sum_{i \in I} m_i \otimes n_i \in M \underset{R}{\otimes} N$, für eine endliche Menge I. Es wird

$$x\lambda_{s,t} \;=\; (\sum_{i\in I} m_i \otimes n_i)\lambda_{s,t} \;=\; \sum_{i \in I} (s \cdot m_i) \otimes (n_i * t)\ .$$

Für $x \in M \otimes N$ und $s \in S$ sei

$$s \cdot x \;:=\; x\lambda_{s,1}\ .$$

Für $x \in M \otimes N$ und $s \in S$ sei

$$x * t \;:=\; x\lambda_{1,t}\ .$$

Schreiben wir $x = \sum_{i \in I} m_i \otimes n_i \in M \underset{R}{\otimes} N$, für eine endliche Menge I, so ist also

$$s \cdot (\sum_{i\in I} m_i \otimes n_i) \;=\; (\sum_{i\in I} m_i \otimes n_i)\lambda_{s,1} \;=\; \sum_{i\in I} (s \cdot m_i) \otimes n_i$$

und

$$(\sum_{i\in I} m_i \otimes n_i) * t \;=\; (\sum_{i\in I} m_i \otimes n_i)\lambda_{1,t} \;=\; \sum_{i\in I} m_i \otimes (n_i * t)\ .$$

Zu (BiMod 1).
Zu (LMod 1). Es ist $(M \underset{R}{\otimes} N, +)$ eine abelsche Gruppe. Zu (LMod 2). Seien $s, s' \in S$ und $x = \sum_{i\in I} m_i \otimes n_i \in M \underset{R}{\otimes} N$, für eine endliche Menge I. Es wird

$$\begin{array}{rcl} s \cdot (s' \cdot x) & = & s \cdot (s' \cdot (\sum_{i\in I} m_i \otimes n_i)) \\ & = & s \cdot (\sum_{i\in I} (s' \cdot m_i) \otimes n_i)) \\ & = & \sum_{i\in I} (s \cdot (s' \cdot m_i)) \otimes n_i \\ & = & \sum_{i\in I} ((s \cdot s') \cdot m_i) \otimes n_i \\ & = & (s \cdot s') \cdot (\sum_{i\in I} m_i \otimes n_i) \\ & = & (s \cdot s') \cdot x\ . \end{array}$$

Zu (LMod 3). Sei $x = \sum_{i\in I} m_i \otimes n_i \in M \underset{R}{\otimes} N$, für eine endliche Menge I. Es wird

$$1 \cdot x \;=\; 1 \cdot (\sum_{i\in I} m_i \otimes n_i) \;=\; \sum_{i\in I} (1 \cdot m_i) \otimes n_i \;=\; x\ .$$

Zu (LMod 4). Seien $s, s' \in S$. Seien $x, x' \in M \underset{R}{\otimes} N$. Wir können $x = \sum_{i\in I} m_i \otimes n_i$ und $x' = \sum_{i\in I'} m_i \otimes n_i$ schreiben für disjunkte Mengen I und I'.
Zum einen wird

$$\begin{array}{rcl} (s+s')\cdot x & = & (s+s')\cdot(\sum_{i\in I} m_i\otimes n_i) \\ & = & \sum_{i\in I}((s+s')\cdot m_i)\otimes n_i \\ & = & \sum_{i\in I}(s\cdot m_i + s'\cdot m_i)\otimes n_i \\ & = & \sum_{i\in I}((s\cdot m_i)\otimes n_i + (s'\cdot m_i)\otimes n_i) \\ & = & (\sum_{i\in I}(s\cdot m_i)\otimes n_i) + (\sum_{i\in I}(s'\cdot m_i)\otimes n_i) \\ & = & s\cdot(\sum_{i\in I} m_i\otimes n_i) + s'\cdot(\sum_{i\in I} m_i\otimes n_i) \\ & = & s\cdot x + s'\cdot x\ . \end{array}$$

Zum anderen wird

$$\begin{array}{rcl} s\cdot(x+x') & = & s\cdot((\sum_{i\in I} m_i\otimes n_i) + (\sum_{i\in I'} m_i\otimes n_i)) \\ & = & s\cdot(\sum_{i\in I\sqcup I'} m_i\otimes n_i) \\ & = & \sum_{i\in I\sqcup I'}(s\cdot m_i)\otimes n_i \\ & = & (\sum_{i\in I}(s\cdot m_i)\otimes n_i) + (\sum_{i\in I'}(s\cdot m_i)\otimes n_i) \\ & = & s\cdot(\sum_{i\in I} m_i\otimes n_i) + s\cdot(\sum_{i\in I'} m_i\otimes n_i) \\ & = & s\cdot x + s\cdot x'\ . \end{array}$$

Zu (BiMod 2).
Zu (RMod 1). Es ist $(M \underset{R}{\otimes} N, +)$ eine abelsche Gruppe.
Zu (RMod 2). Seien $t, t' \in S$ und $x = \sum_{i\in I} m_i \otimes n_i \in M \underset{R}{\otimes} N$, für eine endliche Menge I. Es wird

$$\begin{array}{rcl} (x*t)*t' & = & ((\sum_{i\in I} m_i\otimes n_i)*t)*t' \\ & = & (\sum_{i\in I} m_i\otimes(n_i*t))*t' \\ & = & \sum_{i\in I} m_i\otimes((n_i*t)*t') \\ & = & \sum_{i\in I} m_i\otimes(n_i*(t\cdot t')) \\ & = & (\sum_{i\in I} m_i\otimes n_i)*(t\cdot t') \\ & = & x*(t\cdot t')\ . \end{array}$$

Zu (RMod 3). Sei $x = \sum_{i\in I} m_i \otimes n_i \in M \underset{R}{\otimes} N$, für eine endliche Menge I. Es wird

$$x*1 \;=\; (\sum_{i\in I} m_i\otimes n_i)*1 \;=\; \sum_{i\in I} m_i\otimes(n_i*1) \;=\; x\ .$$

Zu (RMod 4).Seien $s, s' \in S$. Seien $x,\ x' \in M \underset{R}{\otimes} N$. Wir können $x = \sum_{i\in I} m_i \otimes n_i$ und $x' = \sum_{i\in I'} m_i \otimes n_i$ schreiben für disjunkte endliche Mengen I und I'.
Zum einen wird

$$\begin{array}{rcl} x*(t+t') & & \\ & = & (\sum_{i\in I} m_i\otimes n_i)*(t+t') \\ & = & \sum_{i\in I} m_i\otimes(n_i*(t+t')) \\ & = & \sum_{i\in I} m_i\otimes(n_i*t + n_i*t') \\ & = & \sum_{i\in I}(m_i\otimes(n_i*t) + m_i\otimes(n_i*t')) \\ & = & (\sum_{i\in I} m_i\otimes(n_i*t)) + (\sum_{i\in I} m_i\otimes(n_i*t')) \\ & = & (\sum_{i\in I} m_i\otimes n_i)*t + (\sum_{i\in I} m_i\otimes n_i)*t' \\ & = & x*t + x*t'\ . \end{array}$$

Zum anderen wird

$$\begin{array}{rcl} (x+x')*t & = & ((\sum_{i\in I} m_i\otimes n_i) + (\sum_{i\in I'} m_i\otimes n_i))*t \\ & = & (\sum_{i\in I\sqcup I'} m_i\otimes n_i)*t \\ & = & \sum_{i\in I\sqcup I'} m_i\otimes(n_i*t) \\ & = & (\sum_{i\in I} m_i\otimes(n_i*t)) + (\sum_{i\in I'} m_i\otimes(n_i*t)) \\ & = & (\sum_{i\in I} m_i\otimes n_i)*t + (\sum_{i\in I'} m_i\otimes n_i)*t \\ & = & x*t + x'*t\ . \end{array}$$

Zu (BiMod 3). Sei $s \in S$. Sei $t \in T$. Sei $x = \sum_{i\in I} m_i \otimes n_i \in M \underset{R}{\otimes} N$, für eine endliche Menge I. Es wird

$$\begin{array}{rcl}
s \cdot (x * t) & = & s \cdot ((\sum_{i\in I} m_i \otimes n_i) * t) \\
& = & s \cdot (\sum_{i\in I} m_i \otimes (n_i * t)) \\
& = & \sum_{i\in I} (s \cdot m_i) \otimes (n_i * t) \\
& = & (\sum_{i\in I} (s \cdot m_i) \otimes n_i) * t \\
& = & (s \cdot (\sum_{i\in I} m_i \otimes n_i)) * t \\
& = & (s \cdot x) * t \,.
\end{array}$$

Diese Rechnung zeigt insbesondere im Falle eines einzigen Summanden, daß

$$s \cdot (m \otimes n) * t \;:=\; s \cdot ((m \otimes n) * t) \;=\; (s \cdot m) \otimes (n * t)$$

ist für $m \in M$, $n \in N$, $s \in S$, $t \in T$.

Hausaufgabe 14 (A20.(2))

Sei $R = (R, +, \cdot_R)$ ein Ring.
Seien α, β, γ, δ Ringisomorphismen von R nach R.
Wir betrachten die R-R-Bimoduln ${}_\alpha R_\beta$, ${}_\gamma R_\delta$; vgl. Hausaufgabe 10.
Man finde Ringisomorphismen ε, ϑ von R nach R und einen Isomorphismus von R-R-Bimoduln

$${}_\alpha R_\beta \underset{R}{\otimes} {}_\gamma R_\delta \stackrel{\sim}{\longrightarrow} {}_\varepsilon R_\vartheta$$

Lösung. Sei $\varepsilon := \alpha \cdot \beta^{-1}$. Sei $\vartheta := \delta \cdot \gamma^{-1}$.
Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rcl}
{}_\alpha R_\beta \times {}_\gamma R_\delta & \stackrel{\hat\varphi}{\longrightarrow} & {}_\varepsilon R_\vartheta \\
(r, r') & \mapsto & (r, r')\hat\varphi := r\beta^{-1} \cdot_R r'\gamma^{-1}
\end{array}$$

Behauptung 1: Es ist $\hat\varphi$ R-bilinear.
Für $r, \tilde r, r' \in R$ ist

$$(r+\tilde r, r')\hat\varphi \;=\; (r+\tilde r)\beta^{-1} \cdot_R r'\gamma^{-1} \;=\; (r\beta^{-1} + \tilde r\beta^{-1}) \cdot_R r'\gamma^{-1} \;=\; r\beta^{-1} \cdot_R r'\gamma^{-1} + \tilde r\beta^{-1} \cdot_R r'\gamma^{-1} \;=\; (r, r')\hat\varphi + (\tilde r, r')\hat\varphi \,.$$

Für $r, r', \tilde r' \in R$ ist

$$(r, r'+\tilde r')\hat\varphi \;=\; r\beta^{-1} \cdot_R (r'+\tilde r')\gamma^{-1} \;=\; r\beta^{-1} \cdot_R (r'\gamma^{-1} + \tilde r'\gamma^{-1}) \;=\; r\beta^{-1} \cdot_R r'\gamma^{-1} + r\beta^{-1} \cdot_R \tilde r'\gamma^{-1} \;=\; (r, r')\hat\varphi + (r, \tilde r')\hat\varphi \,.$$

Für $r, r' \in R$ und $x \in R$ ist

$$\begin{array}{rcl}
(r * x, r')\hat\varphi & = & (r \cdot_R x\beta, r')\hat\varphi \\
& = & (r \cdot_R x\beta)\beta^{-1} \cdot_R r'\gamma^{-1} \\
& = & r\beta^{-1} \cdot_R x \cdot_R r'\gamma^{-1} \\
& = & r\beta^{-1} \cdot_R (x\gamma \cdot_R r')\gamma^{-1} \\
& = & (r, x\gamma \cdot_R r')\hat\varphi \\
& = & (r, x \cdot r')\hat\varphi \,.
\end{array}$$

Dies zeigt *Behauptung* 1.
Mit der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts erhalten wir die $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl}
{}_\alpha R_\beta \underset{R}{\otimes} {}_\gamma R_\delta & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & {}_\varepsilon R_\vartheta \\
r \otimes r' & \mapsto & (r \otimes r')\varphi = r\beta^{-1} \cdot_R r'\gamma^{-1}
\end{array}$$

Behauptung 2. Jedes Element von ${}_\alpha R_\beta \underset{R}{\otimes} {}_\gamma R_\delta$ ist von der Form $x \otimes 1$ für ein gewisses Element $x \in R$.

Sei $\xi \in {}_\alpha R_\beta \underset{R}{\otimes} {}_\gamma R_\delta$. Wir können $\xi = \sum_{i\in I} r_i \otimes r'_i$ schreiben, wobei I eine endliche Menge ist. Es wird

$$\begin{array}{rcl} \xi & = & \sum_{i\in I} r_i \otimes r'_i \\ & = & \sum_{i\in I} r_i \otimes r'_i \cdot_R 1 \\ & = & \sum_{i\in I} r_i \otimes r'_i\gamma^{-1}\gamma \cdot_R 1 \\ & = & \sum_{i\in I} r_i \otimes r'_i\gamma^{-1} \cdot 1 \\ & = & \sum_{i\in I} r_i * r'_i\gamma^{-1} \otimes 1 \\ & = & (\sum_{i\in I} r_i * r'_i\gamma^{-1}) \otimes 1\ . \end{array}$$

Dies zeigt *Behauptung* 2.

Behauptung 3. Es ist φ eine R-R-lineare Abbildung. Sei $\xi \in {}_\alpha R_\beta \underset{R}{\otimes} {}_\gamma R_\delta$. Dank Behauptung 2 können wir $\xi = x \otimes 1$ schreiben für ein $x \in R$. Seien $r, r' \in R$. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl} (r \cdot \xi * r')\varphi & = & (r \cdot (x \otimes 1) * r')\varphi \\ & = & ((r\alpha \cdot_R x) \otimes (1 \cdot_R r'\delta))\varphi \\ & = & (r\alpha \cdot_R x)\beta^{-1} \cdot_R r'\delta\gamma^{-1} \\ & = & r\alpha\beta^{-1} \cdot_R x\beta^{-1} \cdot_R r'\delta\gamma^{-1} \\ & = & r\varepsilon \cdot_R (x\beta^{-1} \cdot_R 1\gamma^{-1}) \cdot_R r'\vartheta \\ & = & r \cdot (x\beta^{-1} \cdot_R 1\gamma^{-1}) * r' \\ & = & r \cdot (x \otimes 1)\varphi * r' \\ & = & r \cdot \xi\varphi * r'\ . \end{array}$$

Da φ bereits als $\mathbb{Z}$-linear bekannt ist, zeigt dies *Behauptung* 3.

Sei

$$\begin{array}{rcl} {}_\alpha R_\beta \underset{R}{\otimes} {}_\gamma R_\delta & \xleftarrow{\varphi} & {}_\varepsilon R_\vartheta \\ r\beta \otimes 1 =: r\psi & \leftarrow\!\shortmid & r \end{array}$$

Behauptung 4. Es ist $\varphi \cdot \psi = \mathrm{id}$ und $\psi \cdot \varphi = \mathrm{id}$.

Zu $\varphi \cdot \psi \overset{!}{=} \mathrm{id}$. Sei $\xi \in {}_\alpha R_\beta \underset{R}{\otimes} {}_\gamma R_\delta$. Dank Behauptung 2 können wir $\xi = x \otimes 1$ schreiben für ein $x \in R$. Wir erhalten

$$\xi\varphi\psi \;=\; (x \otimes 1)\varphi\psi \;=\; (x\beta^{-1} \cdot_R 1\gamma^{-1})\psi \;=\; x\beta^{-1}\psi \;=\; x\beta^{-1}\beta \otimes 1 \;=\; x \otimes 1 \;=\; \xi\ .$$

Zu $\psi \cdot \varphi \overset{!}{=} \mathrm{id}$. Sei $r \in {}_\varepsilon R_\vartheta$. Wir erhalten

$$r\psi\varphi \;=\; (r\beta \otimes 1)\varphi \;=\; r\beta\beta^{-1} \cdot_R 1\gamma^{-1} \;=\; r\ .$$

Dies zeigt *Behauptung* 4.

Alles in allem ist nun φ als Isomorphismus von R-R-Bimoduln nachgewiesen.

Hausaufgabe 15

Seien R, S, T Ringe.

(1) Sei ${}_S M_R \xrightarrow{u} {}_S M'_R$ eine S-R-lineare Abbildung zwischen Bimoduln. Sei ${}_R N_T \xrightarrow{v} {}_R N'_T$ eine R-T-lineare Abbildung zwischen Bimoduln.

Man konstruiere die S-T-lineare Abbildung

$$ {}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R N_T \xrightarrow{u \underset{R}{\otimes} v} {}_S M'_R \underset{R}{\otimes} {}_R N'_T\ ,$$

für welche $(m \otimes n)(u \underset{R}{\otimes} v) = (mu) \otimes (nv)$ ist für $m \in M$ und $n \in N$.

(2) Seien ${}_S M_R$, ${}_R N_T$ und ${}_R N'_T$ Bimoduln. Man finde einen Isomorphismus

$$ {}_S M_R \underset{R}{\otimes} (\,{}_R N_T \oplus {}_R N'_T) \;\to\; {}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R N_T \oplus {}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R N'_T$$

von S-T-Bimoduln, sowie sein Inverses.

Lösung.
Zu (1). Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} {}_S M_R \times {}_R N_T & \xrightarrow{\varphi} & {}_S M'_R \underset{R}{\otimes} {}_R N'_T \\ (m,n) & \mapsto & (m,n)\varphi := mu \otimes nv \, . \end{array}$$

Behauptung: Die Abbildung φ ist R-bilinear.
Seien m, $m' \in M$. Seien n, $n' \in N$. Sei $r \in R$.
Es wird

$$(m+m',n)\varphi \;=\; (m+m')u \otimes nv \;=\; (mu + m'u) \otimes nv \;=\; mu \otimes nv + +m'u \otimes nv \;=\; (m,n)\varphi + (m',n)\varphi \, .$$

Es wird

$$(m,n+n')\varphi \;=\; mu \otimes (n+n')v \;=\; mu \otimes (nv + n'v) \;=\; mu \otimes nv + mu \otimes n'v \;=\; (m,n)\varphi + (m,n')\varphi \, .$$

Es wird

$$(m * r, n)\varphi \;=\; (m*r)u \otimes nv \;=\; (mu) * r \otimes nv \;=\; mu \otimes r \cdot (nv) \;=\; mu \otimes (r \cdot n)v \;=\; (m, r \cdot n)\varphi \, .$$

Dies zeigt die *Behauptung*.
Die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts liefert daraus die $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} {}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R N_T & \xrightarrow{u \underset{R}{\otimes} v} & {}_S M'_R \underset{R}{\otimes} {}_R N'_T \\ m \otimes n & \mapsto & (m \otimes n)(u \underset{R}{\otimes} v) \;=\; mu \otimes nv \, . \end{array}$$

Für $x \in {}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R N_T$ können wir $x = \sum_{i \in I} m_i \otimes n_i$ schreiben, wobei I eine endliche Menge ist. Es wird

$$(\sum_{i \in I} m_i \otimes n_i)(u \underset{R}{\otimes} v) \;=\; \sum_{i \in I} (m_i \otimes n_i)(u \underset{R}{\otimes} v) \;=\; \sum_{i \in I} m_i u \otimes n_i v \, .$$

Wir wollen die S-T-Linearität von $u \underset{R}{\otimes} v$ zeigen. Da die $\mathbb{Z}$-Linearität bereits bekannt ist, genügt es zu zeigen, daß für gegebene $s \in S$, $x \in {}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R N_T$ und $t \in T$ sich $(s \cdot x * t)(u \underset{R}{\otimes} v) \overset{!}{=} s \cdot (x(u \underset{R}{\otimes} v)) * t$ ergibt. Dazu schreiben wir $x = \sum_{i \in I} m_i \otimes n_i$ schreiben, wobei I eine endliche Menge ist. Es wird

$$\begin{array}{rcl} (s \cdot x * t)(u \underset{R}{\otimes} v) & = & (s \cdot (\sum_{i \in I} m_i \otimes n_i) * t)(u \underset{R}{\otimes} v) \\ & = & (\sum_{i \in I} (s \cdot m_i) \otimes (n_i * t))(u \underset{R}{\otimes} v) \\ & = & \sum_{i \in I} (s \cdot m_i)u \otimes (n_i * t)v \\ & = & \sum_{i \in I} (s \cdot (m_i u)) \otimes ((n_i v) * t) \\ & = & \sum_{i \in I} s \cdot (m_i u \otimes n_i v) * t \\ & = & s \cdot (\sum_{i \in I} m_i u \otimes n_i v) * t \\ & = & s \cdot (x(u \underset{R}{\otimes} v)) * t \, . \end{array}$$

Zu (2). Wir haben die S-T-lineare Abbildung

$$\varphi \;:=\; \left(M \underset{R}{\otimes} \binom{1}{0} \;\; M \underset{R}{\otimes} \binom{0}{1} \right) \;:\; {}_S M_R \underset{R}{\otimes} ({}_R N_T \oplus {}_R N'_T) \;\to\; {}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R N_T \oplus {}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R N'_T$$

Wir haben die S-T-lineare Abbildung

$$\psi \;:=\; \begin{pmatrix} M \underset{R}{\otimes} (1\;0) \\ M \underset{R}{\otimes} (0\;1) \end{pmatrix} \;:\; {}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R N_T \oplus {}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R N'_T \;\to\; {}_S M_R \underset{R}{\otimes} ({}_R N_T \oplus {}_R N'_T)$$

Es ist

$$\begin{array}{rcl}
\varphi \cdot \psi & = & \left(M \underset{R}{\otimes} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \;\; M \underset{R}{\otimes} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} M \underset{R}{\otimes} (1\;0) \\ M \underset{R}{\otimes} (0\;1) \end{smallmatrix} \right) \\
& = & (M \underset{R}{\otimes} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) \cdot (M \underset{R}{\otimes} (\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix})) + (M \underset{R}{\otimes} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) \cdot (M \underset{R}{\otimes} (\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix})) \\
& = & M \underset{R}{\otimes} (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot (\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix})) + M \underset{R}{\otimes} (\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot (\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix})) \\
& = & M \underset{R}{\otimes} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + M \underset{R}{\otimes} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\
& = & M \underset{R}{\otimes} (\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)) \\
& = & M \underset{R}{\otimes} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\
& = & M \underset{R}{\otimes} \mathrm{id}_{N \oplus N'} \\
& = & \mathrm{id}_{M \underset{R}{\otimes} (N \oplus N')} \; .
\end{array}$$

Es ist

$$\begin{array}{rcl}
\psi \cdot \varphi & = & \left(\begin{smallmatrix} M \underset{R}{\otimes} (1\;0) \\ M \underset{R}{\otimes} (0\;1) \end{smallmatrix} \right) \cdot \left(M \underset{R}{\otimes} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \;\; M \underset{R}{\otimes} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right) \\
& = & \left(\begin{smallmatrix} (M \underset{R}{\otimes} (1\;0)) \cdot (M \underset{R}{\otimes} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) & (M \underset{R}{\otimes} (1\;0)) \cdot (M \underset{R}{\otimes} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) \\ (M \underset{R}{\otimes} (0\;1)) \cdot (M \underset{R}{\otimes} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) & (M \underset{R}{\otimes} (0\;1)) \cdot (M \underset{R}{\otimes} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) \end{smallmatrix} \right) \\
& = & \left(\begin{smallmatrix} M \underset{R}{\otimes} ((1\;0) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) & M \underset{R}{\otimes} ((1\;0) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) \\ M \underset{R}{\otimes} ((0\;1) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) & M \underset{R}{\otimes} ((0\;1) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) \end{smallmatrix} \right) \\
& = & \left(\begin{smallmatrix} M \underset{R}{\otimes} 1 & M \underset{R}{\otimes} 0 \\ M \underset{R}{\otimes} 0 & M \underset{R}{\otimes} 1 \end{smallmatrix} \right) \\
& = & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\
& = & \mathrm{id}_{M \underset{R}{\otimes} N \oplus M \underset{R}{\otimes} N'} \; .
\end{array}$$

Hausaufgabe 16

(1) Wir betrachten den $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-$\mathbb{Q}$-Bimodul $\mathbb{Q}^{2\times 1}$. Wir betrachten den $\mathbb{Q}$-$\mathbb{Q}^{3\times 3}$-Bimodul $\mathbb{Q}^{1\times 3}$. Wir betrachten den $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-$\mathbb{Q}^{3\times 3}$-Bimodul $\mathbb{Q}^{2\times 3}$.

Man finde einen Isomorphismus von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-$\mathbb{Q}^{3\times 3}$-Bimoduln

$$\mathbb{Q}^{2\times 1} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{Q}^{1\times 3} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}^{2\times 3} \; .$$

Man finde ein Element in $\mathbb{Q}^{2\times 1} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{Q}^{1\times 3}$, das kein Elementartensor ist.

(2) Seien $m,\, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Man zeige: Jedes Element von $\mathbb{Z}/m \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}/n$ ist ein Elementartensor.

Lösung.
Zu (1). Es ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{Q}^{2\times 1} \times \mathbb{Q}^{1\times 3} & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \mathbb{Q}^{2\times 3} \\
(\left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right), (\begin{smallmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{smallmatrix})) & \mapsto & \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right) \cdot (\begin{smallmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{smallmatrix})
\end{array}$$

$\mathbb{Q}$-bilinear und liefert also die $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{Q}^{2\times 1} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{Q}^{1\times 3} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Q}^{2\times 3} \\
\left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right) \otimes (\begin{smallmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{smallmatrix}) & \mapsto & \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right) \cdot (\begin{smallmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{smallmatrix})
\end{array}$$

Wir überprüfen die $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-$\mathbb{Q}^{3\times 3}$-Linearität. Sei $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ und $B \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$. Sei $a \in \mathbb{Q}^{2\times 1}$. Sei $b \in \mathbb{Q}^{1\times 3}$. Auf Elementartensoren wird

$$\begin{array}{rcl}
(A \cdot (a \otimes b) * B)\varphi & = & (Aa \otimes bB)\varphi \\
& = & AabB \\
& = & A \cdot ab * B \\
& = & A \cdot (a,b)\varphi * B \; .
\end{array}$$

Seien $e_1 := \binom{1}{0}$, $e_2 := \binom{0}{1}$ in $\mathbb{Q}^{2\times 1}$.
Seien $f_1 := (\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$, $f_2 := (\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix})$, $f_3 := (\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix})$ in $\mathbb{Q}^{1\times 3}$.
Wir haben die $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^{2\times 3} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Q}^{2\times 1} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{Q}^{1\times 3} \\ \left(\begin{smallmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \end{smallmatrix}\right) & \mapsto & \sum_{i\in[1,2]} \sum_{j\in[1,3]} c_{i,j} e_i \otimes f_j \ . \end{array}$$

Stets wird

$$\left(\begin{smallmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \end{smallmatrix}\right) \psi\varphi \;=\; \sum_{i\in[1,2]} \sum_{j\in[1,3]} c_{i,j}(e_i \otimes f_j)\varphi \;=\; \sum_{i\in[1,2]} \sum_{j\in[1,3]} c_{i,j} e_i f_j \;=\; \left(\begin{smallmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \end{smallmatrix}\right) \ .$$

Stets wird

$$\Big(\sum_{i\in[1,2]} \sum_{j\in[1,3]} c_{i,j} e_i \otimes f_j\Big)\varphi\psi \;=\; \Big(\sum_{i\in[1,2]} \sum_{j\in[1,3]} c_{i,j} e_i f_j\Big)\psi \;=\; \left(\begin{smallmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \end{smallmatrix}\right) \psi \;=\; \sum_{i\in[1,2]} \sum_{j\in[1,3]} c_{i,j} e_i \otimes f_j \ .$$

Folglich ist φ bijektiv. Damit ist es ein Isomorphismus von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-$\mathbb{Q}^{3\times 3}$-Moduln.
Jeder Elementartensor wird unter φ auf eine Matrix von Rang $\leqslant 1$ abgebildet. Es ist

$$(e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2)\varphi \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

von Rang 2. Also ist z.B. $e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2$ kein Elementartensor (sondern Summe aus 2 Elementartensoren).

Zu (2). Sei $x \in \mathbb{Z}/m \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}/n$. Wir können

$$x \;=\; \sum_{i\in I} (z_i + m\mathbb{Z}) \otimes (w_i + n\mathbb{Z})$$

schreiben, wobei I eine endliche Menge ist und wobei $z_i,\, w_i \in \mathbb{Z}$ für $i \in I$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} x & = & \sum_{i\in I} (z_i + m\mathbb{Z}) \otimes (w_i + n\mathbb{Z}) \\ & = & \sum_{i\in I} (z_i + m\mathbb{Z}) \otimes w_i \cdot (1 + n\mathbb{Z}) \\ & = & \sum_{i\in I} (z_i + m\mathbb{Z}) * w_i \otimes (1 + n\mathbb{Z}) \\ & = & \sum_{i\in I} (z_i w_i + m\mathbb{Z}) \otimes (1 + n\mathbb{Z}) \\ & = & (\sum_{i\in I} z_i w_i + m\mathbb{Z}) \otimes (1 + n\mathbb{Z}) \ , \end{array}$$

und dies ist ein Elementartensor.