M. Künzer Abgabe im Ilias bis Do 02.05.2024 oder in der Übung

Homologische Algebra, SoSe 24

Blatt 3

Hausaufgabe 9 (A21.(1))

Seien R, S, T Ringe. Seien $M = {}_R M_S$ und $N = {}_R N_T$ Bimoduln.

(1) Man zeige: $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ ist vermittels $m(f+g) := mf + mg$ für $f,\, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ und $m \in M$ eine abelsche Gruppe.

(2) Man zeige: Es gibt eine S-T-Bimodulstruktur auf der abelschen Gruppe $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ aus (1), für welche

$$m(s \cdot f * t) \;=\; ((m * s)f) * t$$

ist für $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, $s \in S$, $t \in T$, $m \in M$.

(3) Man zeige: Es ist $u : \mathrm{Hom}_R({}_R R_R\,,\ {}_R N_T) \to {}_R N_T : f \mapsto fu := 1f$ ein Isomorphismus von R-T-Bimoduln.

Lösung.

Zu (1). Seien $f,\, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Wir haben zu zeigen, daß $f + g$ wieder eine R-lineare Abbildung ist. Seien $m,\, m' \in M$ und $r,\, r' \in R$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} (r \cdot m + r' \cdot m')(f+g) & = & (r \cdot m + r' \cdot m')f + (r \cdot m + r' \cdot m')g \\ & = & r \cdot mf + r' \cdot m'f + r \cdot mg + r' \cdot m'g \\ & = & r \cdot (mf + mg) + r' \cdot (m'f + m'g) \\ & = & r \cdot m(f+g) + r' \cdot m'(f+g)\ . \end{array}$$

Wir zeigen, daß $(\mathrm{Hom}_R(M, N), +)$ eine abelsche Gruppe ist.

Wir zeigen: $(f+g)+h \overset{!}{=} f+(g+h)$ für $f,\, g,\, h \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Für $m \in M$ wird

$$\begin{array}{rcl} m((f+g)+h) & = & m(f+g) + mh \\ & = & (mf + mg) + mh \\ & = & mf + (mg + mh) \\ & = & mf + m(g+h) \\ & = & m(f+(g+h))\ . \end{array}$$

Wir zeigen: $f + g \overset{!}{=} g + f$ für $f,\, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Für $m \in M$ wird

$$m(f+g) \;=\; mf + mg \;=\; mg + mf \;=\; m(g+f)\ .$$

Sei $0 \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ die Abbildung, für die $m0 = 0$ ist für $m \in M$. Es ist 0 in der Tat eine R-lineare Abbildung, da für $m,\, m' \in M$ und $r,\, r' \in R$ sich

$$(r \cdot m + r' \cdot m')0 \;=\; 0 \;=\; r \cdot 0 + r' \cdot 0 \;=\; r \cdot m0 + r' \cdot m'0$$

ergibt.

Wir zeigen: $f + 0 \overset{!}{=} f$. Für $m \in M$ wird

$$m(f+0) \;=\; mf + m0 \;=\; mf + 0 = mf\ .$$

Für $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ sei $-f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ die R-lineare Abbildung, für die $m(-f) = -mf$ ist für $m \in M$. Es ist $-f$ in der Tat eine R-lineare Abbildung, da für $m,\, m' \in M$ und $r,\, r' \in R$ sich

$$(r{\cdot}m{+}r'{\cdot}m')(-f) \;=\; -(r{\cdot}m{+}r'{\cdot}m')f \;=\; -(r{\cdot}mf{+}r'{\cdot}m'f) \;=\; r{\cdot}(-mf){+}r'{\cdot}(-m'f) \;=\; r{\cdot}m(-f){+}r'{\cdot}m'(-f)$$

ergibt.

Wir zeigen: $f + (-f) \overset{!}{=} 0$. Für $m \in M$ wird

$$m(f + (-f)) \;=\; mf + m(-f) \;=\; mf + (-mf) \;=\; 0 \;=\; m0\,.$$

Zu (2).

Zu (BiMod 1). Sei $s \in S$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Wir definieren $s \cdot f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ durch

$$m(s \cdot f) \;:=\; (m * s)f \qquad \text{für } m \in M\,.$$

Es ist $s \cdot f$ in der Tat eine R-lineare Abbildung, da für $m,\, m' \in M$ und $r,\, r' \in R$ sich

$$(r{\cdot}m{+}r'{\cdot}m')(s{\cdot}f) \;=\; ((r{\cdot}m{+}r'{\cdot}m'){*}s)f \;=\; (r{\cdot}m{*}s{+}r'{\cdot}m'{*}s)f \;=\; r{\cdot}(m{*}s)f{+}r'{\cdot}(m'{*}s)f \;=\; r{\cdot}m(s{\cdot}f){+}r'{\cdot}m'(s{\cdot}f)$$

ergibt.

Zu (LMod 1). Es ist $(\mathrm{Hom}_R(M,N), +)$ eine abelsche Gruppe; vgl. (1).

Zu (LMod 2). Seien $s,\, s' \in S$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Wir zeigen $(s \cdot s') \cdot f \overset{!}{=} s \cdot (s' \cdot f)$. Sei $m \in M$. Es wird

$$m((s \cdot s') \cdot f) \;=\; (m * (s \cdot s'))f \;=\; ((m * s) * s')f \;=\; (m * s)(s' \cdot f) \;=\; m(s \cdot (s' \cdot f))\,.$$

Zu (LMod 3). Sei $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Wir zeigen $1 \cdot f \overset{!}{=} f$. Sei $m \in M$. Es wird

$$m(1 \cdot f) \;=\; (m * 1)f \;=\; mf\,.$$

Zu (LMod 4). Seien $f,\, f' \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Seien $s,\, s' \in S$.

Wir zeigen $(s + s') \cdot f \overset{!}{=} s \cdot f + s' \cdot f$. Sei $m \in M$. Es wird

$$m((s{+}s'){\cdot}f) \;=\; (m{*}(s{+}s'))f \;=\; (m{*}s{+}m{*}s')f \;=\; (m{*}s)f{+}(m{*}s')f \;=\; m(s{\cdot}f){+}m(s'{\cdot}f) \;=\; m(s{\cdot}f{+}s'{\cdot}f)\,.$$

Wir zeigen $s \cdot (f + f') \overset{!}{=} s \cdot f + s \cdot f'$. Sei $m \in M$. Es wird

$$m(s \cdot (f + f')) \;=\; (m * s)(f + f') \;=\; (m * s)f + (m * s)f' \;=\; m(s \cdot f) + m(s \cdot f') \;=\; m(s \cdot f + s \cdot f')\,.$$

Zu (BiMod 2). Sei $t \in T$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Wir definieren $f * t \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ durch

$$m(f * t) \;:=\; mf * t \qquad \text{für } m \in M\,.$$

Es ist $f * t$ in der Tat eine R-lineare Abbildung, da für $m,\, m' \in M$ und $r,\, r' \in R$ sich

$$(r{\cdot}m{+}r'{\cdot}m')(f{*}t) \;=\; (r{\cdot}m{+}r'{\cdot}m')f{*}t \;=\; (r{\cdot}mf{+}r'{\cdot}m'f){*}t \;=\; r{\cdot}mf{*}t{+}r'{\cdot}m'f{*}t \;=\; r{\cdot}m(f{*}t){+}r'{\cdot}m'(f{*}t)$$

ergibt.

Zu (RMod 1). Es ist $(\mathrm{Hom}_R(M,N), +)$ eine abelsche Gruppe; vgl. (1).

Zu (RMod 2). Seien $t,\, t' \in T$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Wir zeigen $f * (t \cdot t') \overset{!}{=} (f * t) * t'$. Sei $m \in M$. Es wird

$$m(f * (t \cdot t')) \;=\; mf * (t \cdot t') \;=\; (mf * t) * t' \;=\; (m(f * t)) * t' \;=\; m((f * t) * t')\,.$$

Zu (RMod 3). Sei $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Wir zeigen $f * 1 \overset{!}{=} f$. Sei $m \in M$. Es wird

$$m(f * 1) \;=\; mf * 1 \;=\; mf\,.$$

Zu (RMod 4). Seien $f,\, f' \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Seien $t,\, t' \in T$.

Wir zeigen $f * (t + t') \overset{!}{=} f * t + f * t'$. Sei $m \in M$. Es wird

$$m(f * (t + t')) \;=\; mf * (t + t') \;=\; mf * t + mf * t' \;=\; m(f * t) + m(f * t') \;=\; m(f * t + f * t')\,.$$

Wir zeigen $(f + f') * t \overset{!}{=} f * t + f' * t$. Sei $m \in M$. Es wird

$$m((f{+}f'){*}t) \;=\; m(f{+}f'){*}t \;=\; (mf{+}mf'){*}t \;=\; mf{*}t{+}mf'{*}t \;=\; m(f{*}t){+}m(f'{*}t) \;=\; m(f{*}t{+}f'{*}t)\,.$$

Zu (BiMod 3). Sei $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Sei $s \in S$. Sei $t \in T$. Wir zeigen $s \cdot (f * t) \overset{!}{=} (s \cdot f) * t$. Sei $m \in M$. Es wird

$$m(s \cdot (f * t)) \;=\; (m * s)(f * t) \;=\; (m * s)f * t \;=\; (m(s \cdot f)) * t \;=\; m((s \cdot f)) * t) \;.$$

Wir können also $s \cdot f * t := s \cdot (f * t) = (s \cdot f) * t$ schreiben und erhalten

$$m(s \cdot f * t) \;=\; (m * s)f * t$$

für $m \in M$, wie der vorstehenden Rechnung zu entnehmen.

Zu (3). Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_R(R,N) & \overset{u}{\to} & {}_R N_T \\ f & \mapsto & fu \;:=\; 1f \;. \end{array}$$

Wir zeigen: Es ist u eine R-T-lineare Abbildung. Seien $f,\ f' \in \mathrm{Hom}_R(R,N)$. Seien $r,\ r' \in R$. Seien $t,\ t' \in T$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} (r \cdot f * t + r' \cdot f' * t')u & = & 1(r \cdot f * t + r' \cdot f' * t') \\ & = & 1(r \cdot f * t) + 1(r' \cdot f' * t') \\ & = & (1 * r)f * t + (1 * r')f' * t' \\ & = & (r \cdot 1)f * t + (r' \cdot 1)f' * t' \\ & = & r \cdot 1f * t + r' \cdot 1f' * t' \\ & = & r \cdot fu * t + r' \cdot f'u * t' \;. \end{array}$$

Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_R(R,N) & \overset{v}{\leftarrow} & {}_R N_T \\ (nv : r \mapsto r \cdot n) & \leftarrow\!\shortmid & n \;. \end{array}$$

Für die Wohldefiniertheit von v ist zu zeigen, daß $nv : r \mapsto r \cdot n$ eine R-lineare Abbildung ist. Seien $\tilde{r},\ \tilde{r}' \in R$. Seien $r,\ r' \in R$. Es wird

$$(\tilde{r} \cdot r + \tilde{r}' \cdot r')(nv) \;=\; (\tilde{r} \cdot r + \tilde{r}' \cdot r') \cdot n \;=\; \tilde{r} \cdot (r \cdot n) + \tilde{r}' \cdot (r' \cdot n) \;=\; \tilde{r} \cdot r(nv) + \tilde{r}' \cdot r'(nv) \;.$$

Nun genügt es, $u \cdot v \overset{!}{=} \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(R,N)}$ und $v \cdot u \overset{!}{=} \mathrm{id}_N$ nachzuweisen. Es folgt dann, daß u und auch v Isomorphismen von R-T-Bimoduln sind.
Wir zeigen $v \cdot u \overset{!}{=} \mathrm{id}_N$. Sei $n \in N$. Es wird

$$n(v \cdot u) \;=\; (nv)u \;=\; 1(nv) \;=\; 1 \cdot n \;=\; n \;.$$

Wir zeigen $u \cdot v \overset{!}{=} \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(R,N)}$. Sei $f \in \mathrm{Hom}_R(R,N)$. Sei $r \in R$. Es wird

$$r(f(u \cdot v)) \;=\; r((fu)v) \;=\; r \cdot (fu) \;=\; r \cdot (1f) \;=\; (r \cdot 1)f \;=\; rf \;.$$

Es folgt $f(u \cdot v) = f$.

Hausaufgabe 10 (A20.(1))

Sei $R = (R, +, \cdot_R)$ ein Ring.
Seien α, β, γ, δ Ringisomorphismen von R nach R, auch Ringautomorphismen von R genannt.

(1) Man zeige: Es gibt eine R-R-Bimodulstruktur auf R, für welche $r \cdot x * s = r\alpha \cdot_R x \cdot_R s\beta$ ist für $r, s \in R$ und $x \in R$.

Dieser Bimodul werde ${}_\alpha R_\beta$ geschrieben.

(2) Man finde Ringisomorphismen ε, ϑ von R nach R und einen Isomorphismus von R-R-Bimoduln

$$u \;:\; \mathrm{Hom}_R({}_\alpha R_\beta,\, {}_\gamma R_\delta) \;\overset{\sim}{\longrightarrow}\; {}_\varepsilon R_\vartheta \;.$$

Lösung.
Zu (1).
Zu (BiMod 1). Für $r \in R$ und $x \in R$ setzen wir $r \cdot x := r\alpha \cdot_R x$.
Zu (LMod 1). Es ist $(R, +)$ eine abelsche Gruppe.
Zu (LMod 2). Seien $r,\ r' \in R$ und $x \in R$. Es wird

$$(r \cdot_R r') \cdot x \;=\; (r \cdot_R r')\alpha \cdot_R x \;=\; r\alpha \cdot_R r'\alpha \cdot_R x \;=\; r\alpha \cdot_R (r' \cdot x) \;=\; r \cdot (r' \cdot x)\;.$$

Zu (LMod 3). Sei $x \in R$. Es wird

$$1 \cdot x \;=\; 1\alpha \cdot_R x \;=\; 1 \cdot_R x \;=\; x\;.$$

Zu (LMod 4). Seien $r,\ r' \in R$. Seien $x,\ x' \in R$.
Es wird

$$(r + r') \cdot x \;=\; (r + r')\alpha \cdot_R x \;=\; (r\alpha + r'\alpha) \cdot_R x \;=\; r\alpha \cdot_R x + r'\alpha \cdot_R x \;=\; r \cdot x + r' \cdot x\;.$$

Es wird

$$r \cdot (x + x') \;=\; r\alpha \cdot_R (x + x') \;=\; r\alpha \cdot_R x + r\alpha \cdot_R x' \;=\; r \cdot x + r \cdot x'\;.$$

Zu (BiMod 2). Für $s \in R$ und $x \in R$ setzen wir $x * s := x \cdot_R s\beta$.
Zu (RMod 1). Es ist $(R, +)$ eine abelsche Gruppe.
Zu (RMod 2). Seien $s,\ s' \in R$ und $x \in R$. Es wird

$$x * (s \cdot_R s') \;=\; x \cdot_R (s \cdot_R s')\beta \;=\; x \cdot_R s\beta \cdot_R s'\beta \;=\; (x * s) \cdot_R s'\beta \;=\; (x * s) * s'\;.$$

Zu (RMod 3). Sei $x \in R$. Es wird

$$x * 1 \;=\; x \cdot_R 1\beta \;=\; x \cdot_R 1 \;=\; x\;.$$

Zu (RMod 4). Seien $s,\ s' \in R$. Seien $x,\ x' \in R$.
Es wird

$$x * (s + s') \;=\; x \cdot_R (s + s')\beta \;=\; x \cdot_R (s\beta + s'\beta) \;=\; x \cdot_R s\beta + x \cdot_R s'\beta \;=\; x * s + x * s'\;.$$

Es wird

$$(x + x') * s \;=\; (x + x') \cdot s\beta \;=\; x \cdot s\beta + x' \cdot s\beta \;=\; x * s + x' * s\;.$$

Zu (BiMod 3). Seien $r,\ s \in R$. Sei $x \in R$. Es wird

$$r \cdot (x * s) \;=\; r \cdot (x \cdot_R s\beta) \;=\; r\alpha \cdot_R (x \cdot_R s\beta) \;=\; (r\alpha \cdot_R x) \cdot_R s\beta \;=\; (r\alpha \cdot_R x) * s \;=\; (r \cdot x) * s\;.$$

Wir können also $r \cdot x * s := r \cdot (x * s) \;=\; (r \cdot x) * s$ schreiben und erhalten

$$r \cdot x * s \;=\; r\alpha \cdot_R x \cdot_R s\beta\;,$$

wie der vorstehenden Rechnung zu entnehmen.

Zu (2). Sei $\varepsilon := \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \gamma$. Sei $\vartheta := \delta$.
Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_R({}_\alpha R_\beta,\, {}_\gamma R_\delta) & \xrightarrow{u} & {}_\varepsilon R_\vartheta \\ f & \mapsto & fu := 1f \end{array}$$

Wir behaupten, daß u ein Isomorphismus von R-R-Bimoduln ist.
Wir zeigen: Es ist u eine R-R-lineare Abbildung. Sei $f,\ f' \in \mathrm{Hom}_R({}_\alpha R_\beta,\, {}_\gamma R_\delta)$.
Seien $r,\ r',\ s,\ s' \in R$. Es wird

$$\begin{array}{rcl}
(r \cdot f * s + r' \cdot f' * s')u & = & 1(r \cdot f * s + r' \cdot f' * s') \\
& = & 1(r \cdot f * s) + 1(r' \cdot f' * s') \\
& = & (1 * r)f * s + (1 * r')f' * s' \\
& = & (r\beta)f * s + (r'\beta)f' \cdot s' \\
& = & (r\beta \cdot_R 1)f * s + (r'\beta \cdot_R 1)f' * s' \\
& = & (r\beta\alpha^{-1}\alpha \cdot_R 1)f * s + (r'\beta\alpha^{-1}\alpha \cdot_R 1)f' * s' \\
& = & (r\beta\alpha^{-1} \cdot 1)f \cdot_R s\delta + (r'\beta\alpha^{-1} \cdot 1)f' \cdot_R s'\delta \\
& = & r\beta\alpha^{-1} \cdot 1f \cdot_R s\delta + r'\beta\alpha^{-1} \cdot 1f' \cdot_R s'\delta \\
& = & r\beta\alpha^{-1}\gamma \cdot_R 1f \cdot_R s\delta + r'\beta\alpha^{-1}\gamma \cdot_R 1f' \cdot_R s'\delta \\
& = & r\varepsilon \cdot_R fu \cdot_R s\vartheta + r'\varepsilon \cdot_R f'u \cdot_R s'\vartheta \\
& = & r \cdot fu * s + r' \cdot f'u * s'\;.
\end{array}$$

Wir zeigen: Es ist u injektiv. Sei $f \in \operatorname{Hom}_R({}_\alpha R_\beta,\ {}_\gamma R_\delta)$ mit $fu = 0$. Wir haben $f \overset{!}{=} 0$ zeigen. Sei $r \in R$. Es wird

$$rf \;=\; (r \cdot 1)f \;=\; r \cdot 1f \;=\; r\gamma \cdot_R 1f \;=\; r\gamma \cdot_R fu \;=\; r\gamma \cdot_R 0 \;=\; 0\,.$$

Also ist $f = 0$.
Wir zeigen: Es ist u surjektiv. Sei $y \in R$. Sei

$$\begin{array}{rcl} {}_\alpha R_\beta & \xrightarrow{f} & {}_\gamma R_\delta \\ x & \mapsto & xf \;:=\; x\alpha^{-1}\gamma \cdot_R y\,. \end{array}$$

Es ist f eine R-lineare Abbildung, denn für $r,\, r' \,\in\, R$ und $x,\, x' \,\in\, R$ wird

$$\begin{array}{rcl} (r \cdot x + r' \cdot x')f & = & (r\alpha \cdot_R x + r'\alpha \cdot_R x')f \\ & = & (r\alpha \cdot_R x + r'\alpha \cdot_R x')\alpha^{-1}\gamma \cdot_R y \\ & = & r\alpha\alpha^{-1}\gamma \cdot_R x\alpha^{-1}\gamma \cdot_R y + r'\alpha\alpha^{-1}\gamma \cdot_R x'\alpha^{-1}\gamma \cdot_R y \\ & = & r\gamma \cdot_R x\alpha^{-1}\gamma \cdot_R y + r'\gamma \cdot_R x'\alpha^{-1}\gamma \cdot_R y \\ & = & r\gamma \cdot_R xf + r'\gamma \cdot_R x'f \\ & = & r \cdot xf + r' \cdot x'f\,. \end{array}$$

Ferner ist $fu = 1f = 1\alpha^{-1}\gamma \cdot_R y \;=\; 1 \cdot_R y = y$.

Hausaufgabe 11

Sei $M := \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/9$. Sei $X := \mathbb{Z}/3$. Sei $N := \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/27$.

(1) Man beschreibe $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$ und bestimme damit $|\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)|$.

(2) Sei

$$H_X \;:=\; \{\, f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N) \;:\; \text{es gibt } u \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, X) \text{ und } v \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, N) \text{ mit } f = u \cdot v \,\}$$

Man bestimme $|H_X|$. Ist H_X eine Untergruppe von $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$?

Lösung.
Zu (1). Es ist

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N) & = & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/9,\ \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/27) \\ & = & \{\, \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \;:\; a \in \{0,3,6\},\ b \in \{0,9,18\},\ c \in \{0,1,2,\ldots,8\},\ d \in \{0,3,6,\ldots,24\} \,\}\,. \end{array}$$

Also ist $|\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)| = 3 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 9 = 3^6 = 729$.

Zu (2). Es ist

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, X) & = & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/9,\ \mathbb{Z}/3) \\ & = & \{\, \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \;:\; u \in \{0,1,2\},\ v \in \{0,1,2\} \,\}\,. \end{array}$$

Es ist

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, N) & = & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/3,\ \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/27) \\ & = & \{\, \left(\begin{smallmatrix} x & y \end{smallmatrix}\right) \;:\; x \in \{0,3,6\},\ y \in \{0,9,18\} \,\}\,. \end{array}$$

Wir komponieren.

$(\cdot)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 18 \end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 18 \end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 18 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 18 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 18 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 18 \\ 0 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 18 \\ 3 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 9 \\ 6 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 18 \\ 6 & 18 \end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 18 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 18 \\ 6 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 18 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 18 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 18 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 18 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 18 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 18 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 18 \\ 6 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 18 \end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 18 \\ 0 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 18 \\ 6 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 9 \\ 6 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 18 \\ 3 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)$

Wir finden durch Abzählen

$$|H_X| \;=\; 1 + 4 \cdot 8 \;=\; 33\,.$$

Hierzu beachte man, daß die 2-te und die 3-te Zeile dieselben Morphismen enthält, dito die 4-te und die 7-te, dito die 5-te und die 9-te, dito die 6-te und die 8-te.

Da $|H_X| = 33$ kein Teiler von $|\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N)| = 3^6$ ist, ist H_X keine Untergruppe von $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N)$.

Hausaufgabe 12

Sei R ein Ring.

Seien R-Linksmoduln M', M, M'' und R-lineare Abbildungen $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ gegeben.

Sei $\operatorname{Kern}(g) \xrightarrow{\iota} M$ die Inklusionsabbildung. Sei $M \xrightarrow{\rho} \operatorname{Cokern}(f)$ die Restklassenabbildung.

(1) Man zeige: Es ist $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ genau dann exakt in der Mitte, wenn $f \cdot g = 0$ und $\iota \cdot \rho = 0$ ist.

(2) Man zeige: Es ist $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ genau dann kurz exakt, wenn es einen Isomorphismus $M' \xrightarrow{u} \operatorname{Kern}(g)$ mit $u \cdot \iota = f$ und einen Isomorphismus $\operatorname{Cokern}(f) \xrightarrow{v} M''$ mit $\rho \cdot v = g$ gibt.

Lösung.

Zu (1). Es ist $f \cdot g = 0$ genau dann, wenn $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Kern}(g)$.

Es ist $\iota \cdot \rho = 0$ genau dann, wenn jedes Element von $\operatorname{Kern}(g)$ unter $\rho : M \to M/\operatorname{Im}(f)$ auf 0 abgebildet wird, d.h. wenn $x + \operatorname{Im}(f) = 0$ für $x \in \operatorname{Kern}(g)$, d.h. wenn $x \in \operatorname{Im}(f)$ für $x \in \operatorname{Kern}(g)$, d.h. wenn $\operatorname{Kern}(g) \subseteq \operatorname{Im}(f)$.

Also ist $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ exakt in der Mitte genau dann, wenn $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Kern}(g)$ und $\operatorname{Kern}(g) \subseteq \operatorname{Im}(f)$, d.h. wenn $f \cdot g = 0$ und $\iota \cdot \rho = 0$.

Zu (2).

1. Sei zum einen $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ kurz exakt.

Da $f \cdot g = 0$ ist, gibt die universelle Eigenschaft des Kerns eine R-lineare Abbildung $f' : M' \to \operatorname{Kern}(g)$ mit $f' \cdot \iota = f$. Da f injektiv ist, ist auch f' injektiv. Ferner ist $M'f' = M'f'\iota = M'f = \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Kern}(g)$. Also ist f' surjektiv. Insgesamt ist f' ein Isomorphismus von R-Linksmoduln.

Da $f \cdot g = 0$ ist, gibt die universelle Eigenschaft des Cokerns eine R-lineare Abbildung $g' : \operatorname{Cokern}(f) \to M''$ mit $\rho \cdot g' = g$. Da g surjektiv ist, ist auch g' surjektiv. Für $m \in M$ ist $m + \operatorname{Im}(f) \in \operatorname{Cokern}(f)$ genau dann im Kern von g', wenn $0 = (m + \operatorname{Im}(f))g' = m\rho g' = mg$ ist, d.h. wenn $m \in \operatorname{Kern}(g) = \operatorname{Im}(f)$ ist, d.h. wenn $m + \operatorname{Im}(f) = 0$ ist. Also ist g' auch injektiv. Insgesamt ist g' ein Isomorphismus von R-Linksmoduln.

2. Seien zum anderen ein Isomorphismus $M' \xrightarrow{f'} \operatorname{Kern}(g)$ mit $f' \cdot \iota = f$ und ein Isomorphismus $\operatorname{Cokern}(f) \xrightarrow{g'} M''$ mit $\rho \cdot g' = g$ vorhanden. Da ι injektiv ist, ist auch f injektiv. Da ρ surjektiv ist, ist auch g surjektiv.

Sei $m \in M$. Es ist $m \in \operatorname{Kern}(g)$ genau dann, wenn $m \in \operatorname{Kern}(\rho \cdot g') = \operatorname{Kern}(\rho) = \operatorname{Im}(f)$. Also ist $\operatorname{Kern}(g) = \operatorname{Im}(f)$.

Somit ist $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ kurz exakt.

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"', "\wr"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\rho"'] & M'' \\
\operatorname{Kern}(g) \arrow[ur, "\iota"'] & & \operatorname{Cokern}(f) \arrow[u, "g'"', "\wr"]
\end{tikzcd}$$