M. Künzer Abgabe im Ilias bis Do 25.04.2024 oder in der Übung

Homologische Algebra, SoSe 24

Blatt 2

Hausaufgabe 5 (cf. §1.2.7) Sei R ein Ring. Sei $I \subseteq R$ ein Ideal.

(1) Sei M ein R-Linksmodul, für welchen $xm = 0$ ist für $x \in I$ und $m \in M$.

Man zeige: M wird vermöge $(r + I) \cdot m := r \cdot m$ zu einem R/I-Linksmodul, wobei $r \in R$ und $m \in M$.

(2) Sei N ein R/I-Linksmodul. Man zeige: N wird vermöge $r \cdot n := (r + I) \cdot n$ zu einem R-Linksmodul, wobei $r \in R$ und $n \in N$.

(3) Seien R/I-Linksmoduln N und N' gegeben, welche dank (2) auch als R-Linksmoduln angesehen werden können. Sei $f : N \to N'$ eine Abbildung.

Man zeige: Es ist f genau dann R/I-linear, wenn f R-linear ist.

(4) Man bestimme bis auf Isomorphie alle $\mathbb{Z}/9$-Moduln, die 81 Elemente enthalten.

Lösung.
Zu (1).
Wohldefiniertheit der Multiplikation von R/I auf M: Seien $r,\, \tilde{r} \in R$ mit $r + I = \tilde{r} + I$ gegeben. Sei $m \in M$. Zu zeigen ist: $r \cdot m \overset{!}{=} \tilde{r} \cdot m$.
In der Tat ist $r - \tilde{r} \in I$ und also $r \cdot m - \tilde{r} \cdot m = (r - \tilde{r}) \cdot m = 0$, d.h. $r \cdot m = \tilde{r} \cdot m$.
Zum Überprüfen der Linksmodul-Axiome schreiben wir kurz $[r] := r + I \in R/I$ für $r \in R$.
(LMod 1) Es ist $(M, +)$ eine abelsche Gruppe, da M ein R-Linksmodul ist.
(LMod 2) Es ist $[r] \cdot ([s] \cdot m) = [r] \cdot (s \cdot m) = r \cdot (s \cdot m) = (r \cdot s) \cdot m = [r \cdot s] \cdot m = ([r] \cdot [s]) \cdot m$ für $r,\, s \in R$ und $m \in M$.
(LMod 3) Es ist $1_{R/I} \cdot m = [1_R] \cdot m = 1_R \cdot m = m$ für $m \in M$.
(LMod 4) Zum einen ist $([r] + [r']) \cdot m = [r + r'] \cdot m = (r + r') \cdot m = r \cdot m + r' \cdot m = [r] \cdot m + [r'] \cdot m$ für $r,\, r' \in R$ und $m \in M$.
Zum anderen ist $[r] \cdot (m + m') = r \cdot (m + m') = r \cdot m + r \cdot m' = [r] \cdot m + [r] \cdot m'$ für $r \in R$ und $m,\, m' \in M$.

Zu (2). Zum Überprüfen der Linksmodul-Axiome schreiben wir kurz $[r] := r + I \in R/I$ für $r \in R$.
(LMod 1) Es ist $(N, +)$ eine abelsche Gruppe, da N ein R/I-Linksmodul ist.
(LMod 2) Es ist $r \cdot (s \cdot n) = [r] \cdot ([s] \cdot n) = ([r] \cdot [s]) \cdot n = [r \cdot s] \cdot n = (r \cdot s) \cdot n$ für $r,\, s \in R$ und $n \in N$.
(LMod 3) Es ist $1_R \cdot n = [1_R] \cdot n = 1_{R/I} \cdot n = n$ für $n \in N$.
(LMod 4) Zum einen ist $(r + r') \cdot n = [r + r'] \cdot n = ([r] + [r']) \cdot n = [r] \cdot n + [r'] \cdot n = r \cdot n + r \cdot n'$ für $r,\, r' \in R$ und $n \in N$.
Zum anderen ist $r \cdot (n + n') = [r] \cdot (n + n') = [r] \cdot n + [r] \cdot n' = r \cdot n + r \cdot n'$ für $r \in R$ und $n,\, n' \in N$.

Zu (3). Zum Überprüfen der Linearitätseigenschaften schreiben wir kurz $[r] := r + I \in R/I$ für $r \in R$.
Sei f eine R-lineare Abbildung. Seien $r,\, \tilde{r} \in R$. Seien $n,\, \tilde{n} \in N$. Es wird

$$([r] \cdot n + [\tilde{r}] \cdot \tilde{n})f \;=\; (r \cdot n + \tilde{r} \cdot \tilde{n})f \;=\; r \cdot (nf) + \tilde{r} \cdot (\tilde{n}f) \;=\; [r] \cdot (nf) + [\tilde{r}] \cdot (\tilde{n}f)\ .$$

Also ist f auch R/I-linear.
Sei f nun eine R/I-lineare Abbildung. Seien $r,\, \tilde{r} \in R$. Seien $n,\, \tilde{n} \in N$. Es wird

$$(r \cdot n + \tilde{r} \cdot \tilde{n})f \;=\; ([r] \cdot n + [\tilde{r}] \cdot \tilde{n})f \;=\; [r] \cdot (nf) + [\tilde{r}] \cdot (\tilde{n}f) \;=\; r \cdot (nf) + \tilde{r} \cdot (\tilde{n}f)\ .$$

Also ist f auch R-linear.

Zu (4). Unter Verwendung von (3) erkennen wir: Es sind zwei $\mathbb{Z}/9$-Moduln genau dann isomorph, wenn sie aufgefaßt als $\mathbb{Z}$-Moduln isomorph sind.

Wir suchen also bis auf Isomorphie alle $\mathbb{Z}$-Moduln N, für welche $|N| = 81$ ist und für welche $9z \cdot n = 0$ ist für $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in N$. Kurz, für welche $|N| = 81$ und $9N = 0$ ist.
Nach Klassifikation der endlich erzeugten abelschen Gruppen sind dies $(\mathbb{Z}/3)^{\oplus 4}$, $(\mathbb{Z}/3)^{\oplus 2} \oplus \mathbb{Z}/9$ und $(\mathbb{Z}/9)^{\oplus 2}$.

Hausaufgabe 6 (cf. A8.(2)) Sei R ein Ring.

(1) Seien R-Linksmoduln M und N gegeben. Sei $f : M \to N$ eine bijektive R-lineare Abbildung. Man zeige: Es ist auch $f^{-1} : N \to M$ eine R-lineare Abbildung.

(2) Sei M ein R-Linksmodul. Seien $U \subseteq V \subseteq M$ Teilmoduln.

Man bestimme einen Isomorphismus $f : M/V \to (M/U)/(V/U)$.

Lösung.

Zu (1). Seien $n,\, n' \in N$ und $r,\, r' \in R$. Es wird

$$(r\cdot n + r'\cdot n')f^{-1} \;=\; (r\cdot(nf^{-1}f) + r'\cdot(n'f^{-1}f))f^{-1} \;=\; (r\cdot(nf^{-1}) + r'\cdot(n'f^{-1}))ff^{-1} \;=\; r\cdot(nf^{-1}) + r'\cdot(n'f^{-1})\,.$$

Also ist f^{-1} eine R-lineare Abbildung.

Zu (2). Zunächst einmal halten wir fest, daß $V/U \subseteq M/U$ ein Teilmodul ist und wir also den Faktormodul $(M/U)/(V/U)$ bilden können.
Wir haben die surjektiven R-linearen Abbildungen

$$M \xrightarrow{\rho_{M/U}} M/U \xrightarrow{\rho_{(M/U)/(V/U)}} (M/U)/(V/U)\,.$$

Somit ist auch ihr Kompositum $\hat{f} := \rho_{M/U} \cdot \rho_{(M/U)/(V/U)}$ eine surjektive R-lineare Abbildung. Es ist

$$\begin{array}{rcl} M & \xrightarrow{\hat{f}} & (M/U)/(V/U) \\ m & \mapsto & m\hat{f} \;=\; (m\rho_{M/U})\rho_{(M/U)/(V/U)} \;=\; (m+U)+(V/U)\,. \end{array}$$

Für $v \in V$ ist $v\hat{f} = (v+U)+(V/U) = 0$. Dank universeller Eigenschaft des Faktormoduls gibt es die R-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} M/V & \xrightarrow{f} & (M/U)/(V/U) \\ m+V & \mapsto & (m+V)f \;=\; m\hat{f} \;=\; (m+U)+(V/U)\,. \end{array}$$

Diese ist surjektiv, da $\hat{f}$ surjektiv ist.

Wir haben die Injektivität von f nachzuweisen. Sei $m \in M$ mit $(m+V)f = 0$ gegeben. Wir haben $m+V \overset{!}{=} 0$ zu zeigen.

Tatsächlich folgt aus $0 = (m+V)f = (m+U)+(V/U)$, daß $m+U \in V/U$ ist, also $m \in V$, also $m+V = 0$.

Hausaufgabe 7

(1) Man bestimme alle $\mathbb{Z}$-linearen Abbildungen von $\mathbb{Z}/9$ nach $\mathbb{Z}/27$.

(2) Zu jeder Abbildung aus (1) bestimme man Kern, Bild und Cokern.

Lösung.

Zu (1). Jede $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung von $\mathbb{Z}/9$ nach $\mathbb{Z}/27$ ist von der Form $\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3a} \mathbb{Z}/27$ für ein $a \in \mathbb{Z}$.
Für $a,\, b \in \mathbb{Z}$ ist dabei $(\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3a} \mathbb{Z}/27) = (\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3b} \mathbb{Z}/27)$ genau dann, wenn $3a \equiv_{27} 3b$ ist, also wenn $a \equiv_9 b$ ist.
Also ist jede $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung von $\mathbb{Z}/9$ nach $\mathbb{Z}/27$ von der Form $\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3a} \mathbb{Z}/27$ für ein $a \in [0,8]$. Diese Abbildungen sind paarweise verschieden.

Zu (2). Es ergibt sich folgende Tabelle.

f	$\operatorname{Kern}(f)$	$\operatorname{Im}(f)$	$\operatorname{Cokern}(f)$
$\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/27$	$\mathbb{Z}/9$	0	$(\mathbb{Z}/27)/0 \simeq \mathbb{Z}/27$
$\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/27$	0	$3\mathbb{Z}/27$	$(\mathbb{Z}/27)/(3\mathbb{Z}/27) \simeq \mathbb{Z}/3$
$\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{6} \mathbb{Z}/27$	0	$3\mathbb{Z}/27$	$(\mathbb{Z}/27)/(3\mathbb{Z}/27) \simeq \mathbb{Z}/3$
$\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/27$	$3\mathbb{Z}/9$	$9\mathbb{Z}/27$	$(\mathbb{Z}/27)/(9\mathbb{Z}/27) \simeq \mathbb{Z}/9$
$\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{12} \mathbb{Z}/27$	0	$3\mathbb{Z}/27$	$(\mathbb{Z}/27)/(3\mathbb{Z}/27) \simeq \mathbb{Z}/3$
$\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{15} \mathbb{Z}/27$	0	$3\mathbb{Z}/27$	$(\mathbb{Z}/27)/(3\mathbb{Z}/27) \simeq \mathbb{Z}/3$
$\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{18} \mathbb{Z}/27$	$3\mathbb{Z}/9$	$9\mathbb{Z}/27$	$(\mathbb{Z}/27)/(9\mathbb{Z}/27) \simeq \mathbb{Z}/9$
$\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{21} \mathbb{Z}/27$	0	$3\mathbb{Z}/27$	$(\mathbb{Z}/27)/(3\mathbb{Z}/27) \simeq \mathbb{Z}/3$
$\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{24} \mathbb{Z}/27$	0	$3\mathbb{Z}/27$	$(\mathbb{Z}/27)/(3\mathbb{Z}/27) \simeq \mathbb{Z}/3$

Hausaufgabe 8

Wir betrachten die $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/27 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)} \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/9$.

(1) Man bestimme $|\operatorname{Kern}(f)|$, $|\operatorname{Im}(f)|$ und $|\operatorname{Cokern}(f)|$.

(2) Wieviele $\mathbb{Z}$-lineare Abbildungen von $\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/27$ nach $\mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/9$ gibt es?

Lösung.
Zu (1). Für $(a, b) \in \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/27$ ist

$$(a, b)f \;=\; (a, b)\left(\begin{smallmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \;=\; (-3a + b, 3a + 3b) \;\in\; \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/9\,.$$

Also ist $(a, b) \in \operatorname{Kern}(f)$ genau dann, wenn $(a, b)f = (0, 0)$, i.e. wenn

$$\begin{array}{rcl} -3a + b & \equiv_9 & 0 \\ 3a + 3b & \equiv_9 & 0\,, \end{array}$$

i.e. wenn

$$\begin{array}{rcl} -3a + b & \equiv_9 & 0 \\ 4b & \equiv_9 & 0\,, \end{array}$$

i.e. wenn

$$\begin{array}{rcl} -3a & \equiv_9 & 0 \\ b & \equiv_9 & 0\,. \end{array}$$

Folglich ist $(a, b) \in \operatorname{Kern}(f)$ genau dann, wenn $b \equiv_9 0$ und $a \equiv_3 0$ ist. Mit anderen Worten, es ist

$$\operatorname{Kern}(f) \;=\; 3\mathbb{Z}/3 \oplus 9\mathbb{Z}/27 \;=\; 0 \oplus 9\mathbb{Z}/27 \;\simeq\; \mathbb{Z}/3\,.$$

Somit ist $|\operatorname{Kern}(f)| = 3$.
Es folgt

$$|\operatorname{Im}(f)| \;=\; |(\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/27)/\operatorname{Kern}(f)| \;=\; |\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/27|/|\operatorname{Kern}(f)| \;=\; 81/3 \;=\; 27\,.$$

Es folgt

$$|\operatorname{Cokern}(f)| \;=\; |(\mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/9)/\operatorname{Im}(f)| \;=\; |\mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/9|/|\operatorname{Im}(f)| \;=\; 81/27 \;=\; 3\,.$$

Zu (2). Jede $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung von $\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/27$ nach $\mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/9$ ist von der Form

$$\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/27 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 3a & 3b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)} \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/9\,,$$

wobei $a \in [0, 2]$, $b \in [0, 2]$, $c \in [0, 8]$, $d \in [0, 8]$. Die genannten Abbildungen sind auch paarweise verschieden.
Also gibt es

$$3 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 9 \;=\; 3^6 \;=\; 729$$

$\mathbb{Z}$-lineare Abbildungen von $\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/27$ nach $\mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/9$.