

## Gruppentheorie, SoSe 25

**Blatt 12****Hausaufgabe 44**

Man zeige oder widerlege.

- (1) Sei  $G$  eine Gruppe. Seien  $H, K, L \leq G$  Untergruppen. Dann ist  $H(K \cap L) = HK \cap HL$ .
- (2) Sei  $G$  eine endliche Gruppe. Sei  $U \leq G$  eine Untergruppe. Sei  $p$  eine Primzahl. Sei  $P \in \text{Syl}_p(U)$ . Dann ist  $N_G(P) \cdot U = G$ .
- (3) Sei  $G$  und  $H$  endliche Gruppen. Sei  $G \xrightarrow{r} H$  ein surjektiver Gruppenmorphismus. Falls  $|G|/|H|$  und  $|H|$  teilerfremd sind, dann gibt es einen Gruppenmorphismus  $H \xrightarrow{s} G$  mit  $r \circ s = \text{id}_H$ .

**Hausaufgabe 45** Gegeben sei folgendes kommutative Diagramm von Gruppen.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G' & \xrightarrow{r'} & H' \\
 & \nearrow i' & \downarrow u & & \downarrow v \\
 A & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{r} & H
 \end{array}$$

Seien darin  $A$  abelsch,  $(G', H', G, H)$  ein Pullback und  $(A, G, H)$  und  $(A, G', H')$  kurz exakte Sequenzen; cf. Hausaufgabe 43.

Für eine Abbildung  $\mathfrak{s} : H \rightarrow G$  mit  $r \circ \mathfrak{s} = \text{id}_H$  sei  $z_{\mathfrak{s}} \in Z^2(H, A)$  definiert durch  $i(z_{\mathfrak{s}}(h, \tilde{h})) := \mathfrak{s}(h) \cdot \mathfrak{s}(\tilde{h}) \cdot \mathfrak{s}(h\tilde{h})^{-1}$ , wobei  $h, \tilde{h} \in H$ . Für eine Abbildung  $\mathfrak{s}' : H' \rightarrow G$  mit  $r' \circ \mathfrak{s}' = \text{id}_{H'}$  sei  $z_{\mathfrak{s}'} \in Z^2(H', A)$  definiert durch  $i'(z_{\mathfrak{s}'}(h', \tilde{h}')) := \mathfrak{s}'(h') \cdot \mathfrak{s}'(\tilde{h}') \cdot \mathfrak{s}'(h'\tilde{h}')^{-1}$ , wobei  $h', \tilde{h}' \in H'$ .

Man zeige.

- (1) Für Abbildungen  $\mathfrak{s}, \tilde{\mathfrak{s}} : H \rightarrow G$  mit  $r \circ \mathfrak{s} = \text{id}_H = r \circ \tilde{\mathfrak{s}}$  ist  $z_{\mathfrak{s}} B^2(H, A) = z_{\tilde{\mathfrak{s}}} B^2(H, A)$ .
- (2) Sei  $\alpha : H \rightarrow \text{Aut}(A)$  von  $(i, r)$  gegeben und  $\alpha' : H' \rightarrow \text{Aut}(A)$  von  $(i', r')$  gegeben im Sinne von Lemma 109. Man zeige:  $\alpha' = \alpha \circ v$ .
- (3) Sei  $\mathfrak{s} : H \rightarrow G$  mit  $r \circ \mathfrak{s} = \text{id}_H$ . Sei  $z' \in Z^2(H', A)$  definiert durch  $z'(h', \tilde{h}') := z_{\mathfrak{s}}(v(h'), v(\tilde{h}'))$  für  $h', \tilde{h}' \in H'$ . Man finde ein  $\mathfrak{s}'$  wie oben mit  $z' = z_{\mathfrak{s}'}$ .

**Hausaufgabe 46**

Wir betrachten die Gruppe  $D_8 = \langle a, b : a^4, b^2, (ba)^2 \rangle$ . Sei  $Z := Z(D_8) = \langle a^2 \rangle$ . Sei  $H := D_8/Z$ .

Wir betrachten die kurz exakte Sequenz  $Z \xrightarrow{i} D_8 \xrightarrow{r} H$ , wobei  $i$  den Inklusions- und  $r$  den Restklassenmorphismus bezeichne. Diese kurz exakte Sequenz gibt  $\alpha : H \rightarrow \text{Aut}(Z)$  im Sinne von Lemma 109.

- (1) Man zeige:  $\alpha = !$ .
- (2) Hat  $Z$  ein Komplement in  $D_8$ ?
- (3) Wir bilden  $H^2(H, A)$  bezüglich  $\alpha = !$ . Was sagt das Ergebnis in (2) über  $H^2(H, A)$  aus?

**Hausaufgabe 47**

- (1) Sei  $V := \langle (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4) \rangle \trianglelefteq A_4$ .  
Man verifiziere das Lemma von Schur am Beispiel  $V \trianglelefteq A_4$ .
- (2) Sei  $G$  eine Gruppe mit  $|G| = 42$ . Seien  $K, L \leq G$  mit  $|K| = |L| = 6$ .  
Man zeige: Es gibt ein  $g \in G$  mit  ${}^gK = L$ .