Gruppentheorie, SoSe 25

Blatt 12

Hausaufgabe 44

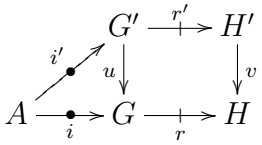
Man zeige oder widerlege.

(1) Sei G eine Gruppe. Seien H, K, $L \leqslant G$ Untergruppen. Dann ist $H(K \cap L) = HK \cap HL$.

(2) Sei G eine endliche Gruppe. Sei $U \leqslant G$ eine Untergruppe. Sei p eine Primzahl. Sei $P \in \mathrm{Syl}_p(U)$. Dann ist $\mathrm{N}_G(P) \cdot U = G$.

(3) Seien G und H endliche Gruppen. Sei $G \xrightarrow{r} H$ ein surjektiver Gruppenmorphismus. Falls $|G|/|H|$ und $|H|$ teilerfremd sind, dann gibt es einen Gruppenmorphismus $H \xrightarrow{s} G$ mit $r \circ s = \mathrm{id}_H$.

Hausaufgabe 45 Gegeben sei folgendes kommutative Diagramm von Gruppen.



Seien darin A abelsch, (G', H', G, H) ein Pullback und (A, G, H) und (A, G', H') kurz exakte Sequenzen; cf. Hausaufgabe 43.

Für eine Abbildung $\mathfrak{s} : H \to G$ mit $r \circ \mathfrak{s} = \mathrm{id}_H$ sei $z_{\mathfrak{s}} \in \mathrm{Z}^2(H, A)$ definiert durch $i(z_{\mathfrak{s}}(h, \tilde{h})) := \mathfrak{s}(h) \cdot \mathfrak{s}(\tilde{h}) \cdot \mathfrak{s}(h\tilde{h})^-$, wobei h, $\tilde{h} \in H$. Für eine Abbildung $\mathfrak{s}' : H' \to G'$ mit $r' \circ \mathfrak{s}' = \mathrm{id}_{H'}$ sei $z_{\mathfrak{s}'} \in \mathrm{Z}^2(H', A)$ definiert durch $i'(z_{\mathfrak{s}'}(h', \tilde{h}')) := \mathfrak{s}'(h') \cdot \mathfrak{s}'(\tilde{h}') \cdot \mathfrak{s}'(h'\tilde{h}')^-$, wobei h', $\tilde{h}' \in H'$.

Man zeige.

(1) Für Abbildungen $\mathfrak{s}$, $\tilde{\mathfrak{s}} : H \to G$ mit $r \circ \mathfrak{s} = \mathrm{id}_H = r \circ \tilde{\mathfrak{s}}$ ist $z_{\mathfrak{s}}\mathrm{B}^2(H, A) = z_{\tilde{\mathfrak{s}}}\mathrm{B}^2(H, A)$.

(2) Sei $\alpha : H \to \mathrm{Aut}(A)$ von (i, r) gegeben und $\alpha' : H' \to \mathrm{Aut}(A)$ von (i', r') gegeben im Sinne von Lemma 109. Man zeige: $\alpha' = \alpha \circ v$.

(3) Sei $\mathfrak{s} : H \to G$ mit $r \circ \mathfrak{s} = \mathrm{id}_H$. Sei $z' \in \mathrm{Z}^2(H', A)$ definiert durch $z'(h', \tilde{h}') := z_{\mathfrak{s}}(v(h'), v(\tilde{h}'))$ für h', $\tilde{h}' \in H'$. Man finde ein $\mathfrak{s}'$ wie oben mit $z' = z_{\mathfrak{s}'}$.

Hausaufgabe 46

Wir betrachten die Gruppe $\mathrm{D}_8 = \langle a, b : a^4, b^2, (ba)^2 \rangle$. Sei $Z := \mathrm{Z}(\mathrm{D}_8) = \langle a^2 \rangle$. Sei $H := \mathrm{D}_8/Z$.

Wir betrachten die kurz exakte Sequenz $Z \xrightarrow{i} \mathrm{D}_8 \xrightarrow{r} H$, wobei i den Inklusions- und r den Restklassenmorphismus bezeichne. Diese kurz exakte Sequenz gibt $\alpha : H \to \mathrm{Aut}(Z)$ im Sinne von Lemma 109.

(1) Man zeige: $\alpha = !$.

(2) Hat Z ein Komplement in D_8 ?

(3) Wir bilden $\mathrm{H}^2(H, Z)$ bezüglich $\alpha = !$. Was sagt das Ergebnis in (2) über $\mathrm{H}^2(H, Z)$ aus?

Hausaufgabe 47

(1) Sei $V := \langle (1,2)(3,4), (1,3)(2,4) \rangle \trianglelefteq \mathrm{A}_4$.
Man verifiziere das Lemma von Schur am Beispiel $V \trianglelefteq \mathrm{A}_4$.

(2) Sei G eine Gruppe mit $|G| = 42$. Seien K, $L \leqslant G$ mit $|K| = |L| = 6$.
Man zeige: Es gibt ein $g \in G$ mit ${}^gK = L$.