Gruppentheorie, SoSe 25

Blatt 11

Hausaufgabe 40 Sei $A \overset{i}{\bullet\!\!\to} G \overset{r}{\twoheadrightarrow} H$ eine kurz exakte Sequenz von Gruppen mit A abelsch.
Dies liefert einen Gruppenmorphismus $\alpha : H \to \mathrm{Aut}(A) : h \mapsto (a \mapsto {}^h a)$.
Sei $\mathfrak{s} : H \to G$ eine Abbildung mit $r \circ \mathfrak{s} = \mathrm{id}_H$.
Sei $i(z(h,h')) := \mathfrak{s}(h) \cdot \mathfrak{s}(h') \cdot \mathfrak{s}(h \cdot h')^-$ für $h,\, h' \in H$. Dies definiert $z \in \mathrm{Z}^2(H,A)$, letzteres genommen bezüglich α.
Sei auf $\tilde{G} := A \times H$ folgende Multiplikation definiert. Sei

$$(a,h) \cdot (a',h') \;:=\; (a \cdot {}^h a' \cdot z(h,h'),\, h \cdot h')$$

für $(a,h),\, (a',h') \in \tilde{G}$. Damit ist $\tilde{G} = (\tilde{G}, \cdot)$ eine Gruppe, mit $1_{\tilde{G}} = (z(1,1)^-, 1)$.
Man konstruiere einen Gruppenisomorphismus $\tilde{G} \xrightarrow{\sim} G$.

Hausaufgabe 41 Sei $\mathrm{C}_3 = \langle x : x^3 \rangle$. Sei $\mathrm{C}_9 = \langle y : y^9 \rangle$. Sei $i : \mathrm{C}_3 \to \mathrm{C}_9 : x \mapsto y^3$. Sei $r : \mathrm{C}_9 \to \mathrm{C}_3 : y \mapsto x$. Es ist $\mathrm{C}_3 \overset{i}{\bullet\!\!\to} \mathrm{C}_9 \overset{r}{\twoheadrightarrow} \mathrm{C}_3$ eine kurz exakte Sequenz von Gruppen.
Wir schreiben auch $A := \mathrm{C}_3$, $G := \mathrm{C}_9$ und $H := \mathrm{C}_3$.

(1) Man finde eine Abbildung $\mathfrak{s} : H \to G$ mit $r \circ \mathfrak{s} = \mathrm{id}_H$.

(2) Man konstruiere $z \in \mathrm{Z}^2(H,A)$ mit $i(z(h,h')) := \mathfrak{s}(h) \cdot \mathfrak{s}(h') \cdot \mathfrak{s}(h \cdot h')^-$ für $h,\, h' \in H$. Man gebe $z(x^i, x^j)$ an für $i,\, j \in [0,2]$.

(3) Man konstruiere $\tilde{G}$ wie in Hausaufgabe 40. Man finde ein Element $\tilde{g} \in \tilde{G}$ mit $\tilde{G} = \langle \tilde{g} \rangle$.

Hausaufgabe 42 Wir betrachten die Gruppe $\mathrm{D}_8 = \langle a, b : a^4, b^2, (ba)^2 \rangle$. Sei $A := \langle a \rangle \trianglelefteq \mathrm{D}_8$.

(1) Man bestimme alle Komplemente zu A in D_8. Sind diese zueinander konjugiert?

(2) Sei $H := \mathrm{D}_8/A$, sei $A \xrightarrow{i} \mathrm{D}_8$ der Inklusions- und $\mathrm{D}_8 \xrightarrow{r} H$ der Restklassenmorphismus.

Wir betrachten die kurz exakte Sequenz $A \overset{i}{\bullet\!\!\to} \mathrm{D}_8 \overset{r}{\twoheadrightarrow} H$. Man bestimme den zugehörigen Gruppenmorphismus $H \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Aut}(A)$ im Sinne von Lemma 109.

(3) Wir bilden $\mathrm{H}^1(H,A)$ mittels α aus (2). Was besagt das Resultat aus (1) für $\mathrm{H}^1(H,A)$?

Hausaufgabe 43

(1) Seien $G \xrightarrow{r} H$ und $H' \xrightarrow{v} H$ Gruppenmorphismen.

Sei $G' := \{\, (g,h') \in G \times H' : r(g) = v(h') \,\}$ der *Pullback* von r und v.

Man zeige: $G' \leqslant G \times H'$. Man konstruiere ein kommutatives Viereck von Gruppen

$$\begin{array}{ccc} G' & \xrightarrow{r'} & H' \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ G & \xrightarrow[r]{} & H \end{array}$$

mit folgender universeller Eigenschaft: Für jede Vervollständigung von r und v zu einem kommutativen Viereck mit einer Gruppe T gibt es genau einen Gruppenmorphismus $T \xrightarrow{t} G'$, für welchen zwei kommutative Dreiecke entstehen.

(2) Sei $N \overset{i}{\bullet\!\!\to} G \overset{r}{\twoheadrightarrow} H$ eine kurz exakte Sequenz. Sei $H' \xrightarrow{v} H$ ein Gruppenmorphismus. Sei G' der Pullback von r und v wie in (1). Man konstruiere eine kurz exakte Sequenz $N \overset{i'}{\bullet\!\!\to} G' \overset{r'}{\twoheadrightarrow} H'$ mit $u \circ i' = i$.