Gruppentheorie, SoSe 25

Blatt 9

Hausaufgabe 33

Sei $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$. Sei $H := \mathrm{U}(\mathbb{F}_5) = \mathbb{F}_5^\times$. Sei $r : G \to H : g \mapsto r(g) := \det(g)$.
Sei $N := \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$. Sei $i : N \to G : n \mapsto n$.
Wir betrachten die kurz exakte Sequenz $N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{r} H$.

(1) Man bestimme einen Gruppenmorphismus $s : H \to G$ mit $r \circ s = \mathrm{id}_H$.
(2) Man bestimme ein Komplement zu $N = i(N)$ in G.
(3) Sind je zwei Komplemente zu N in G zueinander konjugiert?

Hausaufgabe 34

Seien N und H endliche Gruppen. Sei $\alpha : H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Gruppenmorphismus.
Sei $(n,h) \in N \underset{\alpha}{\rtimes} H$. Sei $a := |\langle n\rangle|$. Sei $b := |\langle h\rangle|$. Sei $c := |\langle (n,h)\rangle|$. Man zeige oder widerlege.

(1) Es ist $c = \mathrm{kgV}(a,b)$.
(2) Es ist c ein Vielfaches von a.
(3) Es ist c ein Vielfaches von b.
(4) Jeder Primteiler von c teilt a oder b.

Hausaufgabe 35

Seien N und H Gruppen.
Sei $\alpha : H \to \mathrm{Aut}(N) : h \mapsto (n \mapsto (\alpha(h))(n) \overset{\text{kurz}}{=:} {}^h n)$ ein Gruppenmorphismus.
Sei $\varphi : \langle x_1,\dots,x_a : r_1,\dots,r_b\rangle \xrightarrow{\sim} N$. Sei $\psi : \langle y_1,\dots,y_c : s_1,\dots,s_d\rangle \xrightarrow{\sim} H$.
Sei $i \in [1,a]$ und $j \in [1,c]$. Sei $u_{i,j} := \varphi^{-1}({}^{\psi(y_j)}\varphi(x_i)) \in \langle x_1,\dots,x_a : r_1,\dots,r_b\rangle$.
Sei $\hat{u}_{i,j} \in \mathrm{F}(\{x_1,\dots,x_a\}) \leqslant \mathrm{F}(\{x_1,\dots,x_a,y_1,\dots,y_c\})$ ein Urbild von $u_{i,j}$ unter der Restklassenabbildung. Sei $t_{i,j} := {}^{y_j}x_i \cdot \hat{u}_{i,j}^- \in \mathrm{F}(\{x_1,\dots,x_a,y_1,\dots,y_c\})$.

(1) Man konstruiere

$$\begin{array}{rcll} \vartheta : \langle x_1,\dots,x_a,\ y_1,\dots,y_c : r_1,\dots,r_b,\ s_1,\dots,s_d,\ t_{1,1},\dots,t_{a,c}\rangle & \xrightarrow{\sim} & N \underset{\alpha}{\rtimes} H & \\ x_i & \mapsto & (\varphi(x_i),1) & \text{für } i \in [1,a] \\ y_j & \mapsto & (1,\psi(y_j)) & \text{für } j \in [1,c] \end{array}$$

(2) Man finde einen Isomorphismus von einer endlich präsentierten Gruppe nach A_4 unter Verwendung von (1).

Hausaufgabe 36

Sei $N := \mathrm{C}_3 \times \mathrm{C}_3$. Sei $H := \mathrm{C}_3$.

(1) Man finde Gruppenmorphismen $\alpha,\ \beta : H \to \mathrm{Aut}(N)$ mit $N \underset{\alpha}{\rtimes} H \not\simeq N \underset{\beta}{\rtimes} H$.
(2) Man finde Gruppenmorphismen $\alpha,\ \beta : H \to \mathrm{Aut}(N)$ mit $\alpha \neq \beta$, aber $N \underset{\alpha}{\rtimes} H \simeq N \underset{\beta}{\rtimes} H$.