M. Künzer Abgabe im Ilias bis Fr 20.06.2025 oder in der Übung

Gruppentheorie, SoSe 25

Blatt 8

Hausaufgabe 29 Sei G endlich und nilpotent. Man zeige.

(1) Die absteigende Zentralreihe von G ist eine nilpotent auflösende Reihe.

(2) Die aufsteigende Zentralreihe von G ist, rückwärts numeriert, eine nilpotent auflösende Reihe.

Hausaufgabe 30 Sei $G = \mathrm{D}_8 \times \mathrm{C}_2$. Sei $u + 1$ die Anzahl der Gruppen in der absteigenden und in der aufsteigenden Zentralreihe von G.
Man zeige, daß es ein i gibt mit $G^{[i]} < G^{]u-i[}$.

Hausaufgabe 31 (A 37) Eine Gruppe H heiße *charakteristisch-einfach*, wenn $H > 1$ ist und wenn H außer 1 und H keine weiteren charakteristischen Untergruppen hat.
In einer Gruppe H heißt ein Normalteiler $K \trianglelefteq H$ *minimal*, wenn er ein minimales Element von $\{\, L \trianglelefteq H \;:\; L > 1 \,\}$ ist.

(1) Sei G eine Gruppe. Sei $N \trianglelefteq G$ minimal.
Man zeige, daß N charakteristisch-einfach ist.

(2) Sei N eine charakteristisch-einfache endliche Gruppe. Sei S ein minimaler Normalteiler von N. Zeige, daß S einfach ist und es ein $k \geqslant 1$ mit $N \simeq S^{\times k}$ gibt.
(Hinweis: $S \trianglelefteq N$ minimal; $k \geqslant 1$ maximal mit Automorphismen $(\alpha_i)_{i\in[1,k]}$ so, daß $S^{\times k} \to N$, $(s_i)_i \mapsto \alpha_1(s_1)\cdot\ldots\cdot\alpha_k(s_k)$ injektiver Gruppenmorphismus, wobei $\alpha_1 = \mathrm{id}_N$; Bild charakteristisch in N, also Isomorphismus; S einfach, da aus normal in S auch normal in $S^{\times k}$ und also normal in N folgt.)

Hausaufgabe 32 Sei

$$N \overset{i}{\rightarrowtail} G \overset{r}{\twoheadrightarrow} H$$

eine kurz exakte Sequenz von Gruppen, d.h. sei i ein injektiver Gruppenmorphismus, sei r ein surjektiver Gruppenmorphismus und sei $i(N) = \mathrm{Kern}(r)$.

Man zeige oder widerlege.

(1) Es gibt eine Abbildung $H \xrightarrow{\sigma} G$ mit $r \circ \sigma = \mathrm{id}_H$.

(2) Es gibt einen Gruppenmorphismus $H \xrightarrow{s} G$ mit $r \circ s = \mathrm{id}_H$.

(3) Wenn es einen Gruppenmorphismus $H \xrightarrow{s} G$ gibt mit $r \circ s = \mathrm{id}_H$, dann gibt es einen Gruppenmorphismus $G \xrightarrow{t} N$ mit $t \circ i = \mathrm{id}_N$.

(4) Es gibt eine kurz exakte Sequenz

$$N \overset{i'}{\rightarrowtail} G' \overset{r'}{\twoheadrightarrow} H$$

für welche es Gruppenmorphismen $H \xrightarrow{s'} G' \xrightarrow{t'} N$ gibt, welche eine kurz exakte Sequenz bilden und für welche $t' \circ i' = \mathrm{id}_N$ und $r' \circ s' = \mathrm{id}_H$ gelten.