Gruppentheorie, SoSe 25

Blatt 6

Hausaufgabe 21 (A27) Sei G eine Gruppe. Sei $(U_i)_{i\in[0,s]}$ eine Subnormalreihe von G.

(1) Sei $H \leqslant G$. Man zeige: $(H \cap U_i)_{i\in[0,s]}$ ist eine Subnormalreihe von H. Man gebe einen injektiven Gruppenmorphismus $(H \cap U_i)/(H \cap U_{i+1}) \to U_i/U_{i+1}$ an für $i \in [0, s-1]$.

(2) Sei $N \trianglelefteqslant G$. Sei $\bar{U}_i := (U_i N)/N$ für $i \in [0, s]$. Man zeige: $(\bar{U}_i)_{i\in[0,s]}$ ist eine Subnormalreihe von $\bar{G} := G/N$. Man gebe einen surjektiven Gruppenmorphismus $U_i/U_{i+1} \to \bar{U}_i/\bar{U}_{i+1}$ an für $i \in [0, s-1]$.

Hausaufgabe 22

(1) Man bestimme alle Kompositionsreihen von C_{12} .

(2) Man bestimme alle Kompositionsreihen von C_{30} .

(3) Man bestimme alle Kompositionsreihen von A_4 .

Hausaufgabe 23

Sei X eine Menge. Wir betrachten die Menge der Wörter $\mathrm{F}_0(X)$ in $X^{\pm}$.
Sei für $w = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_k^{\varepsilon_k} \in \mathrm{F}_0(X)$ die *Länge* $\ell(w) := k$ definiert, wobei $k \geqslant 0$, $x_i \in X^{\pm}$ und $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$ für $i \in [1, k]$.
Es heißt $w \in \mathrm{F}_0(X)$ *reduziert,* falls für $w' \in \mathrm{F}_0(X)$ aus $w \overset{\rightsquigarrow}{=} w'$ bereits $w = w'$ folgt.

(1) Seien $w,\ u,\ v \in \mathrm{F}_0(X)$ gegeben mit $w \overset{\rightsquigarrow}{=} u$ und $w \overset{\rightsquigarrow}{=} v$.

Man zeige: Es gibt ein $w' \in \mathrm{F}_0(X)$ mit $u \overset{\rightsquigarrow}{=} w'$ und $v \overset{\rightsquigarrow}{=} w'$.

(2) Seien Wörter $u,\ v \in \mathrm{F}_0(X)$ mit $[u] = [v]$ in $\mathrm{F}(X)$ gegeben.

Seien $k \geqslant 0$ und $w_1,\ \dots,\ w_{k+1},\ w'_1,\ \dots,\ w'_k \in \mathrm{F}_0(X)$ gegeben mit $u = w_1$, $w_{k+1} = v$ und mit $w_i \overset{\rightsquigarrow}{=} w'_i$ und $w_{i+1} \overset{\rightsquigarrow}{=} w'_i$ für $i \in [1, k]$.

Ein solches Tupel $\omega := (w_1,\ \dots,\ w_{k+1},\ w'_1,\ \dots,\ w'_k)$ heiße *Verbindungskette* von u nach v. Es heiße $\ell(\omega) := \Big(\sum_{i\in[1,k+1]} \ell(w_i)\Big) + \Big(\sum_{i\in[1,k]} \ell(w'_i)\Big)$ die *Gesamtlänge* von ω.

Man zeige mittels (1): Sind u und v reduziert, ist $u \neq v$ und ist ω eine Verbindungskette von u nach v, so gibt es eine Verbindungskette $\tilde{\omega}$ von u nach v mit $\ell(\tilde{\omega}) < \ell(\omega)$.

(3) Man zeige mittels (2): Gegeben seien reduzierte Wörter $u,\ v \in \mathrm{F}_0(X)$ mit $[u] = [v]$ in $\mathrm{F}(X)$. Dann ist $u = v$.

Hausaufgabe 24 (A29, A23)

(1) Sei G eine endliche Gruppe. Man zeige: Es ist G isomorph zu einer endlich präsentierten Gruppe. (Hinweis: Multiplikationstafel für Relationen verwenden.)

(2) Man konstruiere einen Automorphismus σ von S_6 , der $(1,2) \mapsto (1,2)(3,4)(5,6)$ und $(1,2,3,4,5,6) \mapsto (1,2,3)(4,5)$ abbildet. Ist σ inner?