Gruppentheorie, SoSe 25

Blatt 5

Hausaufgabe 17 (A22) Sei $n \geqslant 1$. Wir setzen

$$\mathrm{S}_{\mathrm{P},n} := \left\langle s_1, \ldots, s_{n-1} \;:\; \begin{array}{ll} s_i^2 & \text{für } i \in [1, n-1] \\ (s_i s_{i+1})^3 & \text{für } i \in [1, n-2] \\ (s_i s_j)^2 & \text{für } i,\, j \in [1, n-1] \text{ mit } |i-j| \geqslant 2 \end{array} \right\rangle .$$

Man zeige die Existenz des Gruppenisomorphismus

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{S}_{\mathrm{P},n} & \xrightarrow[\sim]{f} & \mathrm{S}_n & \\ s_i & \mapsto & (i, i+1) & \text{für } i \in [1, n-1] . \end{array}$$

Hausaufgabe 18 (A26) Sei $\mathrm{Q}_8 := \langle \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle \leqslant \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.
Man finde eine zu Q_8 isomorphe endlich präsentierte Gruppe unter Verwendung von Algorithmus 60. Welche Ordnung hat Q_8?

Hausaufgabe 19 Sei $G = \langle g_1, \ldots, g_n : r_1, \ldots, r_m \rangle$ eine endlich präsentierte Gruppe.
Sei $A := \mathbb{Z}^{n \times 1}$, gesehen als additiv geschriebene abelsche Gruppe. Sei $F := \mathrm{F}(\{g_1, \ldots, g_n\})$.
Wir betrachten den Gruppenmorphismus $\psi : F \to A : g_i \mapsto \mathrm{e}_i$ für $i \in [1, n]$.
Sei $\bar{r}_i := \psi(r_i)$ für $i \in [1, m]$.

(1) Man zeige: Wir haben den Isomorphismus

$$\begin{array}{rcll} G/G^{(1)} & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & A/\langle \bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_m \rangle & \\ g_i G^{(1)} & \mapsto & \mathrm{e}_i + \langle \bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_m \rangle & \text{für } i \in [1, n] \end{array}$$

(2) Unter Verwendung von (1) berechne man die abelsche Gruppe $\mathrm{D}_8/\mathrm{D}_8^{(1)}$.

Hausaufgabe 20 (A23) Sei G eine Gruppe.
Sei $\mathrm{Aut}(G) := \{ \sigma \in \mathrm{S}_G : \sigma \text{ ist ein Gruppenmorphismus} \}$ die Menge der Automorphismen von G.
Sei $\mathrm{Inn}(G) := \{ \sigma \in \mathrm{Aut}(G) : \text{es gibt ein } x \in G \text{ mit } \sigma(g) = {}^x g \text{ für } g \in G \}$ die Menge der inneren Automorphismen von G.

(1) Man zeige: $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G) \leqslant \mathrm{S}_G$.

Sei $\mathrm{Out}(G) := \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ die äußere Automorphismengruppe von G.

(2) Man finde einen Gruppenisomorphismus $G/\mathrm{Z}(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Inn}(G)$.

(3) Man bestimme $\mathrm{Out}(\mathrm{S}_3)$.

(4) Man bestimme $\mathrm{Out}(\mathrm{D}_8)$.