Gruppentheorie, SoSe 25

Blatt 1

Hausaufgabe 1

(1) Wir betrachten die S_3-Menge S_3 via Konjugation. Man bestimme die Bahnen.

(2) Wir betrachten die S_3-Menge S_3 via Linksmultiplikation. Man bestimme die Bahnen.

(3) Man finde eine Gruppe G und eine G-Menge M, welche 4 Bahnen paarweise unterschiedlicher Größe hat.

Hausaufgabe 2 (A2)

(1) Sei I eine Menge. Sei G_i eine Gruppe für $i \in I$. Man zeige, daß das cartesische Produkt $G := \prod_{i\in I} G_i$ mit der Multiplikation $(g_i)_i \cdot (g'_i)_i := (g_i \cdot g'_i)_i$ für $(g_i)_i\,,\,(g'_i)_i \in G$ eine Gruppe wird, genannt das *(äußere) direkte Produkt* der Gruppen G_i für $i \in I$.

(2) Für $n \geqslant 0$ und eine Gruppe G schreiben wir $G^{\times n} := \prod_{i\in[1,n]} G$, mit $G^{\times 0} = 1$. Betrachte den Gruppenmorphismus $\delta : G \to G \times G$, $g \mapsto (g, g)$. Unter welcher Bedingung an G ist $\delta(G) \trianglelefteqslant G \times G$?

(3) Sei G eine Gruppe. Sei $n \geqslant 0$. Seien $U_i \leqslant G$ für $i \in [1, n]$.
Sei $[u_i\,,\,u_j] = 1$ für $i,\, j \in [1, n]$ mit $i \neq j$ und $u_i \in U_i\,,\, u_j \in U_j$.
Man zeige, daß dann der Gruppenmorphismus $\prod_{i\in[1,n]} U_i \to G$, $(u_i)_i \mapsto u_1 \cdot \ldots \cdot u_n$ existiert.
Wann ist dieser injektiv?

(4) Sei G eine Gruppe. Seien $N \trianglelefteqslant G$ und $M \trianglelefteqslant G$. Sei $N \cap M = 1$ und $NM = G$. Man zeige die Existenz des Gruppenisomorphismus $N \times M \xrightarrow{\sim} G$, $(n, m) \mapsto nm$. Ist die Aussage noch richtig, wenn die Normalität der Untergruppe M nicht verlangt wird?

Hausaufgabe 3

Sei G eine Gruppe. Seien G-Mengen M und N und eine G-Abbildung $M \xrightarrow{f} N$ gegeben.
Wir schreiben $\bar{M}$ und $\bar{N}$ für die jeweilige Menge der Bahnen.

(1) Man zeige die Wohldefiniertheit der Abbildung $\bar{f} : \bar{M} \to \bar{N}$, $Gm \mapsto \bar{f}(Gm) := Gf(m)$.

(2) Man zeige: Ist f surjektiv, dann auch $\bar{f}$.

(3) Man zeige: Ist f injektiv, dann auch $\bar{f}$.

Hausaufgabe 4 (A4) Seien G und H Gruppen.
Sei $M = (M, \alpha)$ eine G-Menge. Sei $N = (N, \beta)$ eine H-Menge. Als G-Menge sei G mit der Konjugation ausgestattet. Man zeige.

(1) Es ist $M \times N$ eine $(G \times H)$-Menge via $(g, h) \cdot (m, n) := (gm, hn)$ für $g \in G$, $h \in H$, $m \in M$, $n \in N$.

(2) Es ist ${}_{\mathrm{Abb}}(M, N)$ eine $(G \times H)$-Menge via $((g, h)f)(m) := h\, f(g^{-}m)$ für $g \in G$, $h \in H$, $f \in {}_{\mathrm{Abb}}(M, N)$.

(3) Die Menge der Untergruppen von G ist eine G-Menge.

(4) Es ist $\mathrm{Pot}(M)$ eine G-Menge. Ist Ω eine G-Teilmenge von $\mathrm{Pot}(M)$, dann auch die Menge $\Omega_{\max}$ der maximalen Elemente von Ω.