

Lösung 8

Hausaufgabe 29 Sei G endlich und nilpotent. Man zeige.

- (1) Die absteigende Zentralreihe von G ist eine nilpotent auflösende Reihe.
- (2) Die aufsteigende Zentralreihe von G ist, rückwärts numeriert, eine nilpotent auflösende Reihe.

Lösung.

Ad (1). Sei $(G^{[i]})_{i \in [0, n]}$ die absteigende Zentralreihe von G .

Es ist $G^{[i]} \trianglelefteq G$ für $i \in [0, n]$.

Es ist zu zeigen: Für $i \in [0, n-1]$ ist $G^{[i]}/G^{[i+1]} \stackrel{!}{\leq} Z(G/G^{[i+1]})$.

Sei $x \in G^{[i]}$ und $y \in G$. Wir haben $[xG^{[i+1]}, yG^{[i+1]}] \stackrel{!}{=} 1 \cdot G^{[i+1]}$ zu zeigen, i.e. $[x, y] \stackrel{!}{\in} G^{[i+1]}$.

Aber $[x, y] \in [G^{[i]}, G] = G^{[i+1]}$.

Ad (2). Sei $(G^{[n-i]})_{i \in [0, n]}$ die aufsteigende Zentralreihe von G , rückwärts numeriert.

Es ist $G^{[n-i]} \trianglelefteq G$ für $i \in [0, n]$.

Es ist zu zeigen: Für $i \in [0, n-1]$ ist $G^{[n-i]}/G^{[n-(i+1)]} \stackrel{!}{\leq} Z(G/G^{[n-(i+1)]})$.

Mit anderen Worten, es ist zu zeigen: Für $i \in [0, n-1]$ ist $G^{[i+1]}/G^{[i]} \stackrel{!}{\leq} Z(G/G^{[i]})$.

Aber es ist $G^{[i+1]}/G^{[i]} = Z(G/G^{[i]})$ nach Konstruktion.

Hausaufgabe 30 Sei $G = D_8 \times C_2$. Sei $u+1$ die Anzahl der Gruppen in der absteigenden und in der aufsteigenden Zentralreihe von G .

Man zeige, daß es ein i gibt mit $G^{[i]} < G^{[u-i]}$.

Lösung.

Es ist $D_8 = \langle a, b : a^4, b^2, (ba)^2 \rangle$. Es ist $Z(D_8) = \langle a^2 \rangle$. Es ist $D_8/Z(D_8) \simeq C_2 \times C_2$ abelsch.

Wir berechnen die absteigende Zentralreihe.

Es ist

$$G^{[0]} = D_8^{[1]} \times C_2.$$

Es ist $G^{[1]} = D_8^{[1]} \times 1$. Es ist $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab = a^2$. Also ist $a^2 \in D_8^{[1]}$. Also ist $\langle a^2 \rangle \leq D_8^{[1]}$.

Auf der anderen Seite ist $D_8/\langle a^2 \rangle$ abelsch, da $[a, b] \in \langle a^2 \rangle$. Also ist $D_8^{[1]} \leq \langle a^2 \rangle$.

Somit ist $D_8^{[1]} \leq \langle a^2 \rangle$.

Also ist

$$G^{[1]} = \langle a^2 \rangle \times 1.$$

Da $G^{[1]}$ abelsch ist, ist

$$G^{[2]} = 1 \times 1.$$

Wir berechnen die aufsteigende Zentralreihe.

Es ist

$$G^{[0]} = 1 \times 1.$$

Es ist $G^{[1]} = Z(G) = Z(D_8) \times Z(C_2)$, also

$$G^{[1]} = \langle a^2 \rangle \times C_2.$$

Da $G/G^{[1]} \simeq D_8/\langle a^2 \rangle$ abelsch ist, ist $G^{[2]}/G^{[1]} = Z(G/G^{[1]}) = G/G^{[1]}$ und also

$$G^{[2]} = D_8^{[1]} \times C_2$$

Es bestätigt sich, daß die aufsteigende und die absteigende Zentralreihe gleichviele Einträge haben, nämlich $u + 1 = 3$ Stück.

Ferner ist für $i = 1$, wie gewünscht,

$$G^{[1]} = \langle a^2 \rangle \times 1 < \langle a^2 \rangle \times C_2 = G^{[1]} = G^{[u-1]}.$$

Hausaufgabe 31 (A 37) Eine Gruppe H heiße *charakteristisch-einfach*, wenn $H > 1$ ist und wenn H außer 1 und H keine weiteren charakteristischen Untergruppen hat.

In einer Gruppe H heißt ein Normalteiler $K \trianglelefteq H$ *minimal*, wenn er ein minimales Element von $\{ L \trianglelefteq H : L > 1 \}$ ist.

- (1) Sei G eine Gruppe. Sei $N \trianglelefteq G$ minimal.

Man zeige, daß N charakteristisch-einfach ist.

- (2) Sei N eine charakteristisch-einfache endliche Gruppe. Sei S ein minimaler Normalteiler von N . Zeige, daß S einfach ist und es ein $k \geq 1$ mit $N \simeq S^{\times k}$ gibt.

(Hinweis: $S \trianglelefteq N$ minimal; $k \geq 1$ maximal mit Automorphismen $(\alpha_i)_{i \in [1, k]}$ so, daß $S^{\times k} \rightarrow N$, $(s_i)_i \mapsto \alpha_1(s_1) \cdot \dots \cdot \alpha_k(s_k)$ injektiver Gruppenmorphismus, wobei $\alpha_1 = \text{id}_N$; Bild charakteristisch in N , also Isomorphismus; S einfach, da aus normal in S auch normal in $S^{\times k}$ und also normal in N folgt.)

Lösung.

Ad (1). Es ist $N > 1$, da $N \in \{ L \trianglelefteq G : L > 1 \}$.

Annahme, es ist N nicht charakteristisch-einfach. Dann gibt es $1 < M \triangleleft N$. Aus $M \triangleleft N \trianglelefteq G$ folgt $M \trianglelefteq G$; cf. Bemerkung 80.(2). Also ist $M \in \{ L \trianglelefteq G : L > 1 \}$ und $M < N$, im *Widerspruch* zur Minimalität von N .

Ad (2). Sei S ein minimaler Normalteiler von N .

Sei $k \geq 1$ maximal so, daß es $(\alpha_i)_{i \in [1, k]} \in \text{Aut}(N)^{\times k}$ gibt mit

$$\begin{aligned} f : S^{\times k} &\rightarrow N \\ (s_i)_{i \in [1, k]} &\mapsto \alpha_1(s_1) \cdot \alpha_2(s_2) \cdot \dots \cdot \alpha_k(s_k) \end{aligned}$$

injektiver Gruppenmorphismus, wobei $\alpha_1 = \text{id}_N$.

Ein solches maximales k läßt sich finden wegen der Existenz des einelementigen Tupels (id_N) .

Wähle zu diesem maximalen k ein solches Tupel $(\alpha_i)_{i \in [1, k]} \in \text{Aut}(N)^{\times k}$. Schreibe

$$U := f(S^{\times k}) = \alpha_1(S) \cdot \alpha_2(S) \cdot \dots \cdot \alpha_k(S).$$

Da $S \trianglelefteq N$, ist auch $\alpha_i(S) \trianglelefteq N$ für $i \in [1, k]$ und also $U \trianglelefteq N$; cf. Hausaufgabe 7.(3).

Wir *behaupten*, es ist $U \triangleleft N$. Sei $\beta \in \text{Aut}(N)$. Zu zeigen ist $\beta(U) \stackrel{!}{=} U$. Es genügt, $\beta(U) \stackrel{!}{\leq} U$ zu zeigen, i.e. $\beta(\alpha_i(S)) \stackrel{!}{\leq} U$ für $i \in [1, k]$.

Annahme, nicht. Wähle $j \in [1, k]$ mit $V := \beta(\alpha_j(S)) \not\leq U$. Da S ein minimaler Normalteiler von N ist, ist auch $V = \beta(\alpha_j(S))$ ein minimaler Normalteiler von N . Da $V \not\leq U$, ist $V \cap U < V$. Da $V \trianglelefteq N$ und $U \trianglelefteq N$, ist $V \cap U \trianglelefteq N$. Wegen der Minimalität des Normalteilers V von N folgt hieraus $V \cap U = 1$. Für $v \in V$ und $u \in U$ ist $[v, u] = v^{-1}u^{-1}vu = v^{-1} \cdot {}^u v \in V$ und $[v, u] = v^{-1}u^{-1}vu = {}^{v^{-1}}(u^{-1}) \cdot u \in U$, also $[V, U] \leq V \cap U$.

Sei $\alpha_{k+1} := \beta \circ \alpha_j \in \text{Aut}(N)$. Es ist das Kompositum der Gruppenmorphisimen

$$\begin{aligned} S^{\times(k+1)} &\xrightarrow{\sim} U \times V \rightarrow N \\ (s_i)_{i \in [1, k+1]} &\mapsto (f((s_i)_{i \in [1, k]}), \alpha_{k+1}(s_{k+1})) \\ &\quad (u, v) \mapsto uv, \end{aligned}$$

welches $(s_i)_{i \in [1, k+1]}$ auf

$$f((s_i)_{i \in [1, k]}) \cdot \alpha_{k+1}(s_{k+1}) = \alpha_1(s_1) \cdot \alpha_2(s_2) \cdot \dots \cdot \alpha_k(s_k) \cdot \alpha_{k+1}(s_{k+1})$$

schickt, injektiv wegen $U \cap V = 1$; cf. Hausaufgabe 2.(3).

Dieser *Widerspruch* zur Maximalität von k zeigt die *Behauptung*.

Da aber N charakteristisch-einfach ist und $1 < S \leq U \triangleleft N$ gilt, folgt $f(S^{\times k}) = U = N$. Daher ist $f : S^{\times k} \rightarrow N$ ein Gruppenisomorphismus.

Wir *behaupten* die Einfachheit von S . Sei $1 < T \trianglelefteq S$ gegeben. Wir haben $T \stackrel{!}{=} S$ zu zeigen.

Wir erinnern an $S \trianglelefteq N$ und an $\alpha_1 = \text{id}_N$. Schreibe $W := \alpha_2(S) \cdot \dots \cdot \alpha_k(S) \trianglelefteq N$.

Es ist $N = S \cdot (\alpha_2(S) \cdot \dots \cdot \alpha_k(S)) = SW$.

Sei $s \in S$ und $w \in W$. Es ist

$$[s, w] = f([f^-(s), f^-(w)]) = 1,$$

da $f^-(s) = (s, 1, \dots, 1) \in S^{\times k}$ und da $f^-(w) \in S^{\times k}$ den ersten Eintrag gleich 1 hat. Also ist $[S, W] = 1$, insbesondere also $[T, W] = 1$.

Wir zeigen $T \trianglelefteq N$. Sei $x \in N$. Schreibe $x = sw$ mit $s \in S$ und $w \in W$. Sei $t \in T$. Es wird $xt = {}^{sw}t = {}^st \in T$.

Da $1 < T \leq S$, da $T \trianglelefteq N$ und da S ein minimaler Normalteiler von N ist, folgt $T = S$. Dies zeigt die *Behauptung*.

Hausaufgabe 32 Sei

$$N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{r} H$$

eine kurz exakte Sequenz von Gruppen, d.h. sei i ein injektiver Gruppenmorphismus, sei r ein surjektiver Gruppenmorphismus und sei $i(N) = \text{Kern}(r)$.

Man zeige oder widerlege.

- (1) Es gibt eine Abbildung $H \xrightarrow{\sigma} G$ mit $r \circ \sigma = \text{id}_H$.
- (2) Es gibt einen Gruppenmorphismus $H \xrightarrow{s} G$ mit $r \circ s = \text{id}_H$.
- (3) Wenn es einen Gruppenmorphismus $H \xrightarrow{s} G$ gibt mit $r \circ s = \text{id}_H$, dann gibt es einen Gruppenmorphismus $G \xrightarrow{t} N$ mit $t \circ i = \text{id}_N$.
- (4) Es gibt eine kurz exakte Sequenz

$$N \xrightarrow{i'} G' \xrightarrow{r'} H$$

für welche es Gruppenmorphisme $H \xrightarrow{s'} G' \xrightarrow{t'} N$ gibt, welche eine kurz exakte Sequenz bilden und für welche $t' \circ i' = \text{id}_N$ und $r' \circ s' = \text{id}_H$ gelten.

Lösung.

Ad (1). Die Aussage ist richtig.

Hierzu wählen wir für jedes Element $h \in H$ aus dem Urbild $r^{-1}(\{h\})$, welches wegen r surjektiv nichtleer ist, ein Element $\sigma(h)$.

Die für die resultierende Abbildung $\sigma : H \rightarrow G$ nötige simultane Wahl ist möglich dank Auswahlaxiom.

Aus $\sigma(h) \in r^{-1}(\{h\})$ folgt $r(\sigma(h)) = h$ für $h \in H$. Also ist $r \circ \sigma = \text{id}_H$.

Ad (2). Die Aussage ist falsch.

Sei $C_2 = \langle a : a^2 \rangle$. Sei $C_4 = \langle b : b^4 \rangle$. Sei $i : C_2 \rightarrow C_4 : a \mapsto b^2$. Sei $r : C_4 \rightarrow C_2 : b \mapsto a$.

Es ist

$$C_2 \xrightarrow{i} C_4 \xrightarrow{r} C_2$$

eine kurz exakte Sequenz von Gruppen.

Es gibt von C_2 nach C_4 nur die Gruppenmorphisme $!$ und i .

Es ist $r \circ ! = ! \neq \text{id}_H$ und $r \circ i = ! \neq \text{id}_H$.

Also existiert in der Tat kein Gruppenmorphismus $H \xrightarrow{s} G$ mit $r \circ s = \text{id}_H$.

Ad (3). Die Aussage ist falsch.

Sei $r = \text{sgn} : S_3 \rightarrow U(\mathbb{Z}) = \{-1, +1\}$.

Sei $i : A_3 \rightarrow S_3$ der Inklusionsmorphismus.

Es ist

$$A_3 \xrightarrow{i} S_3 \xrightarrow{r} U(\mathbb{Z})$$

eine kurz exakte Sequenz von Gruppen.

Wir haben den Gruppenmorphismus $s : U(\mathbb{Z}) \rightarrow S_3 : -1 \mapsto (1, 2)$. Es ist $r(s(-1)) = r((1, 2)) = -1$. Also ist $r \circ s = \text{id}_{U(\mathbb{Z})}$.

Annahme, es gibt einen Gruppenmorphismus $S_3 \xrightarrow{t} A_3$ mit $t \circ i = \text{id}_{A_3}$. Da $t \circ i$ surjektiv ist, ist auch t surjektiv. Es folgt: $3 = |A_3| = |S_3 / \text{Kern}(t)| = 6 / |\text{Kern}(t)|$. Also ist $|\text{Kern}(t)| = 2$ und $\text{Kern}(t) \trianglelefteq S_3$. Einen solchen Normalteiler gibt es aber in S_3 nicht. *Widerspruch*. Also liegt ein Gegenbeispiel vor.

Ad (4). Die Aussage ist richtig.

Sei $G' := N \times H$.

Sei $i' : N \rightarrow N \times H : n \mapsto (n, 1)$.

Sei $r' : N \times H \rightarrow H : (n, h) \mapsto h$.

Sei $s' : H \rightarrow N \times H : h \mapsto (1, h)$.

Sei $t' : N \times H \rightarrow N : (n, h) \mapsto n$.

Dann sind

$$N \xrightarrow{i'} N \times H \xrightarrow{r'} H$$

und

$$H \xrightarrow{s'} N \times H \xrightarrow{t'} H$$

kurz exakte Sequenzen von Gruppen.

Es ist $t'(i'(n)) = t'((n, 1)) = n$ für $n \in N$. Folglich ist $t' \circ i' = \text{id}_N$.

Es ist $r'(s'(h)) = r'((1, h)) = h$ für $h \in H$. Folglich ist $r' \circ s' = \text{id}_H$.

pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/gt25/