M. Künzer

Gruppentheorie, SoSe 25

Lösung 7

Hausaufgabe 25 (A32)

Sei G eine endliche Gruppe. Sei $H \leqslant G$. Sei $N \trianglelefteqslant G$. Man zeige.

(1) Sind N und G/N auflösbar, dann auch G.

(2) Ist G auflösbar, dann auch H und G/N.

(3) Sind H und N auflösbar, dann auch HN.

(4) Ist $N \leqslant \mathrm{Z}(G)$ und ist G/N überauflösbar, dann auch G.

Lösung. Vorbemerkung. Sei H eine Gruppe. Sei $K \trianglelefteqslant H$. Sei $\bar{U} \trianglelefteqslant \bar{V} \leqslant \bar{H} := H/K$. Schreibe $\bar{U} = U/K$ und $\bar{V} = V/K$ mit $K \leqslant U \leqslant V \leqslant H$; cf. Hausaufgabe 12. Dann ist $U \trianglelefteqslant V$, denn für $v \in V$ und $u \in U$ ist $({}^{v}u)K = {}^{(vK)}(uK) \in \bar{U} = U/K$ wegen $\bar{U} \trianglelefteqslant \bar{V}$, und also ${}^{v}u \in U$. Ferner ist $V/U \simeq \bar{V}/\bar{U}$; cf. Hausaufgabe 12. Ende der *Vorbemerkung.*

Ad (1). Sei $(N_i)_{i\in[0,s]}$ eine auflösende Reihe von N. Sei $(\bar{G}_j)_{j\in[0,t]}$ eine auflösende Reihe von $\bar{G} := G/N$. Für $j \in [0,t]$ schreiben wir $\bar{G}_j =: G_j/N$, wobei $N \trianglelefteqslant G_j \leqslant G$; cf. Hausaufgabe 12. Es ist dann $G_{j+1} \trianglelefteqslant G_j$ mit $G_j/G_{j+1} \simeq \bar{G}_j/\bar{G}_{j+1}$ abelsch für $j \in [0, t-1]$; cf. Vorbemerkung. Es ist $G_0/N = \bar{G} = G/N$, also $G_0 = G$. Es ist $G_t/N = 1$, also $G_t = N$. Es ist N_i/N_{i+1} abelsch für $i \in [0, s-1]$;

Daher ist die Reihe

$$(G_0 , G_1 , \ldots , \underbrace{G_t}_{=N=N_0} , N_1 , \ldots , N_s) \, .$$

eine auflösende Reihe von G. Also ist G auflösbar.

Ad (2). Sei $(U_i)_{i\in[0,s]}$ eine auflösende Reihe von G.

Es ist $(H\cap U_i)_{i\in[0,s]}$ eine Subnormalreihe von H, und es gibt einen injektiven Gruppenmorphismus $(H\cap U_i)/(H\cap U_{i+1}) \to U_i/U_{i+1}$ für $i \in [0, s-1]$; cf. Hausaufgabe 21. Da U_i/U_{i+1} abelsch ist und da $(H \cap U_i)/(H \cap U_{i+1})$ zu einer Untergruppe von U_i/U_{i+1} isomorph ist, ist auch $(H \cap U_i)/(H \cap U_{i+1})$ abelsch für $i \in [0, s-1]$. Folglich ist $(H \cap U_i)_{i\in[0,s]}$ eine auflösende Reihe von H. Also ist H auflösbar.

Schreibe $\bar{G} := G/N$. Schreibe $\bar{U}_i := (U_iN)/N$ für $i \in [0, s]$. Es ist $(\bar{U}_i)_{i\in[0,s]}$ eine Subnormalreihe von $\bar{G}$, und es gibt einen surjektiven Gruppenmorphismus $U_i/U_{i+1} \to \bar{U}_i/\bar{U}_{i+1}$ für $i \in [0, s-1]$; cf. Hausaufgabe 21. Da U_i/U_{i+1} abelsch ist und da $\bar{U}_i/\bar{U}_{i+1}$ zu einer Faktorgruppe von U_i/U_{i+1} isomorph ist, ist auch $\bar{U}_i/\bar{U}_{i+1}$ abelsch für $i \in [0, s-1]$. Folglich ist $(\bar{U}_i)_{i\in[0,s]}$ eine auflösende Reihe von $\bar{G}$. Also ist $\bar{G} = G/N$ auflösbar.

Ad (3). Es ist $N \trianglelefteqslant HN$. Es ist N auflösbar. Es ist $(HN)/N \simeq H/(H \cap N)$ auflösbar, da H auflösbar ist; cf. Hausaufgabe 7 und (2). Also ist HN auflösbar; cf. (1).

Ad (4). Sei $(\bar{G}_j)_{j\in[0,t]}$ eine überauflösende Reihe von $\bar{G} := G/N$. Für $j \in [0,t]$ schreiben wir $\bar{G}_j =: G_j/N$, wobei $N \trianglelefteqslant G_j \trianglelefteqslant G$; cf. Hausaufgabe 12. Es ist dann $G_{j+1} \trianglelefteqslant G_j$ mit $G_j/G_{j+1} \simeq \bar{G}_j/\bar{G}_{j+1}$ zyklisch für $j \in [0, s-1]$; cf. Vorbemerkung. Ferner ist $G_0 = G$ und $G_t = N$.

Jede Untergruppe von $\mathrm{Z}(G)$ ist abelsch und normal in G.

Wir wählen eine Kompositionsreihe $(Z_i)_{i\in[0,k]}$ von N; cf. Bemerkung 68. Jeder Subfaktor ist zyklisch von Primzahlordnung; cf. Bemerkung 74.

Folglich können wir die überauflösende Reihe

$$(G_0 , G_1 , \ldots , \underbrace{G_t}_{=\,N\,=\,Z_0} , Z_1 , \ldots , Z_k)$$

von G bilden.

Hausaufgabe 26

Sei G eine endliche Gruppe. Man zeige oder widerlege.

(1) Ist G abelsch, dann ist $\mathrm{Aut}(G)$ abelsch.

(2) Ist G auflösbar, dann ist $\mathrm{Aut}(G)$ auflösbar.

(3) Ist G zyklisch, dann ist $\mathrm{Aut}(G)$ abelsch.

(4) Ist G zyklisch, dann ist $\mathrm{Aut}(G)$ zyklisch.

Lösung.
Ad (1). Die Aussage ist falsch.
Sei e.g. $G = A \times A$ für eine abelsche Gruppe $A \neq 1$.
Sei der Gruppenmorphismus $\varphi : G \to G$ definiert durch $\varphi(a,b) := (b,a)$ für $(a,b) \in G$.
Es ist $\varphi^2 = \mathrm{id}_G$, also $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$.
Sei der Gruppenmorphismus $\psi : G \to G$ definiert durch $\psi(a,b) := (a,ab)$ für $(a,b) \in G$.
Sei der Gruppenmorphismus $\tilde{\psi} : G \to G$ definiert durch $\tilde{\psi}(a,b) := (a,a^- b)$ für $(a,b) \in G$.
Dann ist $\tilde{\psi} \circ \psi = \mathrm{id}_G$ und $\psi \circ \tilde{\psi} = \mathrm{id}_G$, also $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$.
Sei $a \in A$ mit $a \neq 1$. Es ist $(\psi \circ \varphi)(a,1) = \psi(1,a) = (1,a)$. Es ist $(\varphi \circ \psi)(a,1) = \varphi(a,a) = (a,a)$. Das ist nicht dasselbe.
Also ist $\psi \circ \varphi \neq \varphi \circ \psi$.
Also ist $\mathrm{Aut}(G)$ nichtabelsch.

Ad (2). Sei p prim. Sei $G := \mathrm{C}_p \times \mathrm{C}_p = \{\, (x^i, x^j) \,:\, i,\, j \,\in\, \mathbb{Z}\,\}$, wobei x Ordnung p habe.
Sei $A := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. Sei $\alpha_A : G \to G : (x^i, x^j) \mapsto (x^{ai+bj}, x^{ci+dj})$.
Es ist α_A ein Gruppenmorphismus: Für (x^i, x^j), $(x^{i'}, x^{j'}) \in G$ wird

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_A\big((x^i,x^j)\cdot(x^{i'},x^{j'})\big) & = & \alpha_A\big((x^{i+i'},x^{j+j'})\big) \\
& = & (x^{a(i+i')+b(j+j')}, x^{c(i+i')+d(j+j')}) \\
& = & (x^{ai+bj}, x^{ci+dj})\cdot(x^{ai'+bj'}, x^{ci'+dj'}) \\
& = & \alpha_A\big((x^i,x^j)\big)\cdot\alpha_A\big(x^{i'},x^{j'}\big)\;.
\end{array}$$

Seien $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $A' = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. Für $(x^i, x^j) \in G$ wird

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_A\big(\alpha_{A'}\big((x^i,x^j)\big)\big) & = & \alpha_A\big((x^{ai+bj},x^{ci+dj})\big) \\
& = & \big((x^{a'(ai+bj)+b'(ci+dj)}, x^{c'(ai+bj)+d'(ci+dj)}\big) \\
& = & \big((x^{(a'a+b'c)i+(a'b+b'd)j}, x^{(c'a+d'c)i+(c'b+d'd)j}\big) \\
& = & \alpha_{A\cdot A'}\big((x^i,x^j)\big)\;.
\end{array}$$

Also ist $\alpha_{A\cdot A'} = \alpha_A \circ \alpha_{A'}$.
Es folgt $\alpha_A \circ \alpha_{A^-} = \alpha_{A\cdot A^-} = \alpha_{\mathrm{E}_2} = \mathrm{id}_G$ und $\alpha_{A^-} \circ \alpha_A = \alpha_{A^-\cdot A} = \alpha_{\mathrm{E}_2} = \mathrm{id}_G$. Somit ist $\alpha_A \in \mathrm{Aut}(G)$. Ferner ist

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Aut}(G) \\
A & \mapsto & \alpha_A
\end{array}$$

ein Gruppenmorphismus.
Wir *behaupten*: Es ist φ ein Isomorphismus.
Injektiv. Sei $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ mit $\alpha_A = \mathrm{id}_G$ gegeben. Dann ist $(x^1,x^0) = \alpha_A\big((x^1,x^0)\big) = (x^a,x^c)$ und $(x^0,x^1) = \alpha_A\big((x^0,x^1)\big) = (x^b,x^d)$. Also ist $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Surjektiv. Sei $\beta \in \mathrm{Aut}(G)$. Sei $\beta\big((x^1,x^0)\big) =: (x^a,x^c)$ und $\beta\big((x^0,x^1)\big) =: (x^b,x^d)$. Dann ist $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{F}_p^{2\times 2}$ invertierbar, da wegen der Injektivität von β weder die erste Spalte verschwinden darf noch die zweite ein Vielfaches der ersten sein darf.
Dies zeigt die *Behauptung*.
Nun enthält z.B. für $p = 5$ die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$ den Kompositionsfaktor $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$, welcher eine nichtabelsche einfache Gruppe ist. Also ist auch die dazu isomorphe Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathrm{C}_5 \times \mathrm{C}_5)$ nicht auflösbar.
Also ist die Aussage falsch. Aus G abelsch kann nicht auf $\mathrm{Aut}(G)$ auflösbar geschlossen werden.

Ad (3). Die Aussage ist richtig.
Sei $G = \langle x \rangle$, für ein Element x von Ordnung m.

Sei $i = i + m\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Wir haben den Gruppenmorphismus

$$\begin{array}{rcl} G & \xrightarrow{\beta_i} & G \\ x & \mapsto & x^i \,. \end{array}$$

Jeder Gruppenmorphismus von G nach G ist von dieser Form.
Es ist β_i genau dann ein Automorphismus, wenn β_i surjektiv ist, i.e. wenn $G = \langle x^i \rangle$, i.e. wenn $i \in \mathrm{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.
Somit haben wir die surjektive Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Aut}(G) \\ i & \mapsto & \beta_i \,. \end{array}$$

Es ist φ ein Gruppenmorphismus, da für $i,\, i' \in \mathrm{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ sich

$$(\beta_i \circ \beta_{i'})(x) \;=\; (x^{i'})^i \;=\; x^{i\cdot i'} \;=\; \beta_{i\cdot i'}(x)$$

ergibt und also $\beta_i \circ \beta_{i'} = \beta_{i\cdot i'}$.
Es ist φ injektiv, da $\beta_i = \mathrm{id}_G$ genau dann gilt, wenn $x^i = x$ ist, also wenn $i = i + m\mathbb{Z}$ gleich $1 = 1 + m\mathbb{Z}$ ist in $\mathrm{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.
Somit ist φ ein Gruppenisomorphismus.
Da $\mathrm{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ als Einheitengruppe des kommutativen Rings $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ abelsch ist, ist auch $\mathrm{Aut}(G)$ abelsch.

Ad (4). Die Aussage ist falsch.

Gemäß Lösung zu (3) ist $\mathrm{Aut}(\mathrm{C}_8) \simeq \mathrm{U}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \{1, 3, 5, 7\}$. Diese Gruppe hat Ordnung 4, aber nur Elemente von Ordnung 1 oder 2. Sie ist also nicht zyklisch, vielmehr ist $\mathrm{U}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$.

Hausaufgabe 27 (A32) Sei G eine endliche Gruppe. Sei $H \leqslant G$. Sei $N \trianglelefteq G$. Man zeige.

(1) Ist G überauflösbar, dann auch H und G/N.

(2) Ist $N \leqslant \mathrm{Z}(G)$ und ist G/N nilpotent, dann auch G.

(3) Ist G nilpotent, dann auch H und G/N.

(4) Ist G überauflösbar und ist $H \leqslant G^{(1)}$, dann ist H nilpotent.

Lösung. Ad (1). Sei $(U_i)_{i\in[0,s]}$ eine überauflösende Reihe von G.
Es ist $(H\cap U_i)_{i\in[0,s]}$ eine Subnormalreihe von H, und es gibt einen injektiven Gruppenmorphismus $(H\cap U_i)/(H\cap U_{i+1}) \to U_i/U_{i+1}$ für $i \in [0, s-1]$; cf. Hausaugabe 21. Da U_i/U_{i+1} zyklisch ist und da $(H \cap U_i)/(H \cap U_{i+1})$ zu einer Untergruppe von U_i/U_{i+1} isomorph ist, ist auch $(H\cap U_i)/(H\cap U_{i+1})$ zyklisch für $i \in [0, s-1]$. Desweiteren folgt aus $U_i \trianglelefteq G$ auch $H \cap U_i \trianglelefteq H$ für $i \in [0, s]$. Folglich ist $(H \cap U_i)_{i\in[0,s]}$ eine überauflösende Reihe von H. Also ist H überauflösbar.
Schreibe $\bar{G} := G/N$. Schreibe $\bar{U}_i := (U_iN)/N$ für $i \in [0, s]$. Es ist $(\bar{U}_i)_{i\in[0,s]}$ eine Subnormalreihe von $\bar{G}$, und es gibt einen surjektiven Gruppenmorphismus $U_i/U_{i+1} \to \bar{U}_i/\bar{U}_{i+1}$ für $i \in [0, s-1]$; cf. Hausaufgabe 21. Da U_i/U_{i+1} zyklisch ist und da $\bar{U}_i)/\bar{U}_{i+1}$ zu einer Faktorgruppe von U_i/U_{i+1} isomorph ist, ist auch $\bar{U}_i/\bar{U}_{i+1}$ zyklisch für $i \in [0, s-1]$. Desweiteren folgt aus $U_i \trianglelefteq G$ auch $\bar{U}_i \trianglelefteq \bar{G}$ für $i \in [0, s]$; cf. Hausaufgabe 12. Folglich ist $(\bar{U}_i)_{i\in[0,s]}$ eine überauflösende Reihe von $\bar{G}$. Also ist $\bar{G} = G/N$ überauflösbar.
Ad (2). Sei $(\bar{G}_j)_{j\in[0,t]}$ eine nilpotent auflösende Reihe von $\bar{G} := G/N$. Für $j \in [0, t]$ schreiben wir $\bar{G}_j =: G_j/N$, wobei $N \trianglelefteq G_j \trianglelefteq G$; cf. Hausaufgabe 12. Insbesondere ist $G_0 = G$ und $G_t = N$.
Wir *behaupten,* daß dann $G_j/G_{j+1} \leqslant \mathrm{Z}(G/G_{j+1})$ ist für $j \in [0, t-1]$. Seien $x \in G_j$ und $g \in G$ gegeben. Wir haben $[xG_{j+1}, gG_{j+1}] \stackrel{!}{=} 1$ zu zeigen, also $[x, g] \stackrel{!}{\in} G_{j+1}$. Schreibe $\bar{x} := xN \in \bar{G}_j$ und $\bar{g} := gN \in \bar{G}$. Da $\bar{G}_j/\bar{G}_{j+1} \leqslant \mathrm{Z}(\bar{G}/\bar{G}_{j+1})$, ist $[\bar{x}, \bar{g}] \in \bar{G}_{j+1}$, i.e. $[x, g]N \in G_{j+1}/N$, i.e. $[x, g] \in G_{j+1}$. Dies zeigt die *Behauptung.*
Setze noch $G_{t+1} := 1$. Es wird $G_t/G_{t+1} = N/1 \leqslant \mathrm{Z}(G/1) = \mathrm{Z}(G/G_{t+1})$.
Also ist $(G_j)_{j\in[0,t+1]}$ eine nilpotent auflösende Reihe von G. Somit ist G nilpotent.
Ad (3). Sei $(U_i)_{i\in[0,s]}$ eine nilpotent auflösende Reihe von G.
Es ist $(H \cap U_i)_{i\in[0,s]}$ eine Subnormalreihe von H; cf. Hausaufgabe 21. Desweiteren folgt aus $U_i \trianglelefteq G$ auch $H \cap U_i \trianglelefteq H$ für $i \in [0, s]$.

Wir *behaupten,* daß dann $(H \cap U_i)/(H \cap U_{i+1}) \leqslant \mathrm{Z}(H/(H \cap U_{i+1}))$ ist für $i \in [0, s-1]$. Sei $x \in H \cap U_i$. Sei $h \in H$. Wir haben $[x,h] \overset{!}{\in} H \cap U_{i+1}$ zu zeigen. Da $x,\ h \in H$, folgt $[x,h] \in H$. Da $x \in U_i$ und $h \in G$ und da $U_i/U_{i+1} \leqslant \mathrm{Z}(G/U_{i+1})$, folgt $[x,h] \in U_{i+1}$. Dies zeigt die *Behauptung.*
Also ist $(H \cap U_i)_{i\in[0,s]}$ eine nilpotent auflösende Reihe von H. Somit ist H nilpotent.
Schreibe $\bar{G} := G/N$. Schreibe $\bar{U}_i := (U_iN)/N$ für $i \in [0,s]$. Es ist $(\bar{U}_i)_{i\in[0,s]}$ eine Subnormalreihe von $\bar{G}$; cf. Hausaufgabe 21.
Desweiteren folgt aus $U_i \trianglelefteq G$ auch $\bar{U}_i \trianglelefteq \bar{G}$ für $i \in [0,s]$, denn für $x \in U_i$ und $g \in G$ ist ${}^{(gN)}(xN) = {}^{g}xN \in \bar{U}_i$, da ${}^{g}x \in U_i$.
Wir *behaupten,* daß dann $\bar{U}_i/\bar{U}_{i+1} \leqslant \mathrm{Z}(\bar{G}/\bar{U}_{i+1})$ ist für $i \in [0, s-1]$. Sei $x \in U_i$ und sei $g \in G$. Schreibe $\bar{x} := xN$ und $\bar{g} := gN$. Wir haben $[\bar{x},\bar{g}] \overset{!}{\in} \bar{U}_{i+1}$ zu zeigen. Wegen $U_i/U_{i+1} \leqslant \mathrm{Z}(G/U_{i+1})$ wird aber $[\bar{x},\bar{g}] = [x,g]N \in \bar{U}_{i+1}$, da $[x,g] \in U_{i+1}$. Dies zeigt die *Behauptung.*
Also ist $(\bar{U}_i)_{i\in[0,s]}$ eine nilpotent auflösende Reihe von $\bar{G}$. Somit ist $\bar{G}$ nilpotent.
Ad (4). Es genügt zu zeigen, daß aus G überauflösbar $K := G^{(1)}$ nilpotent folgt, cf. (1).
Sei $s \geqslant 0$ und $(U_i)_{i\in[0,s]}$ eine überauflösende Reihe von G.
Sei $V_i := K \cap U_i$ für $i \in [0,s]$. Dann ist $(V_i)_{i\in[0,s]}$ eine überauflösende Reihe von K, cf. Lösung zu (1). Wir bemerken noch, daß aus $K \trianglelefteq G$ und $U_i \trianglelefteq G$ auch $V_i \trianglelefteq G$ folgt für $i \in [0,s]$.

Es genügt zu zeigen, daß $(V_i)_{i\in[0,s]}$ eine nilpotent auflösende Reihe ist. Mit anderen Worten, es sollte $V_i/V_{i+1} \overset{!}{\leqslant} \mathrm{Z}(K/V_{i+1})$ liegen für $i \in [0, s-1]$.
Es ist $\alpha_i : G \to \mathrm{Aut}(V_i/V_{i+1}),\ xV_{i+1} \mapsto {}^{g}(xV^{i+1}) := {}^{g}xV_{i+1}$ ein wohldefinierter Gruppenmorphismus, da $V_i \trianglelefteq G$ und $V_{i+1} \trianglelefteq G$.
Es ist V_i/V_{i+1} zyklisch. Also ist $\mathrm{Aut}(V_i/V_{i+1})$ abelsch, cf. Hausaufgabe 26.(3). Somit ist $G^{(1)} = K$ im Kern von α_i enthalten. Für $y \in K$ und $x \in V_i$ ist also ${}^{y^-}xV_{i+1} = xV_{i+1}$, also $x^- \, {}^{y^-}x \in V_{i+1}$, also $[x,y] \in V_{i+1}$, also $[xV_{i+1}, yV_{i+1}] = 1 \cdot V_{i+1}$. Somit ist $xV_{i+1} \in \mathrm{Z}(K/V_{i+1})$. Es folgt $V_i/V_{i+1} \leqslant \mathrm{Z}(K/V_{i+1})$.

Dieses Argument kenne ich von K. Conrad.

Hausaufgabe 28 (A35) Seien G und H endliche Gruppen.
Sei $(U_i)_{i\in[0,s]}$ eine Subnormalreihe von G. Sei $(V_i)_{i\in[0,t]}$ eine Subnormalreihe von H.
Sei o.E. $s \leqslant t$. Setze noch $U_i := 1$ für $i \in [s+1, t]$. Man zeige.

(1) Sind $(U_i)_{i\in[0,s]}$ und $(V_i)_{i\in[0,t]}$ auflösend, dann auch $(U_i \times V_i)_{i\in[0,t]}$.

(2) Sind $(U_i)_{i\in[0,s]}$ und $(V_i)_{i\in[0,t]}$ nilpotent auflösend, dann auch $(U_i \times V_i)_{i\in[0,t]}$.

(3) Sind G und H nilpotent, so auch $G \times H$.

Lösung.
Vorbemerkung 1. Seien K und L Gruppen. Es ist $\mathrm{Z}(K \times L) = \mathrm{Z}(K) \times \mathrm{Z}(L)$.
Denn sei zum einen $(k,\ell) \in \mathrm{Z}(K \times L)$ gegeben. Für $\tilde{k} \in K$ ist $(k\tilde{k},\ell) = (k,\ell)(\tilde{k},1) = (\tilde{k},1)(k,\ell) = (\tilde{k}k,\ell)$ und also $k\tilde{k} = \tilde{k}k$. Es folgt $k \in \mathrm{Z}(K)$. Genauso folgt $\ell \in \mathrm{Z}(L)$. Insgesamt folgt $(k,\ell) \in \mathrm{Z}(K) \times \mathrm{Z}(L)$.
Sei zum anderen $(k,\ell) \in \mathrm{Z}(K) \times \mathrm{Z}(L)$ gegeben. Für $(\tilde{k},\tilde{\ell}) \in K \times L$ ist $(\tilde{k},\tilde{\ell})(k,\ell) = (\tilde{k}k, \tilde{\ell}\ell) = (k\tilde{k}, \ell\tilde{\ell}) = (k,\ell)(\tilde{k},\tilde{\ell})$. Es folgt $(k,\ell) \in \mathrm{Z}(K \times L)$.
Vorbemerkung 2. Seien K und L Gruppen. Sei $M \trianglelefteq K$. Sei $N \trianglelefteq L$. Es ist $(M \times N) \trianglelefteq (K \times L)$, da für $m \in M$, $n \in N$, $k \in K$, $\ell \in L$ sich

$$ {}^{(k,\ell)}(m,n) \;=\; (k,\ell)(m,n)(k,\ell)^- \;=\; (k,\ell)(m,n)(k^-,\ell^-) \;=\; (kmk^-, \ell n\ell^-) \;=\; ({}^{k}m, {}^{\ell}n) \;\in\; M \times N $$

ergibt.
Wir haben ferner den Gruppenisomorphismus

$$ \begin{array}{rcl} (K \times L)/(M \times N) & \xrightarrow{\sim} & (K/M) \times (L/N) \\ (k,\ell)(M \times N) & \mapsto & (kM, \ell N) \\ (k,\ell)(M \times N) & \hookleftarrow & (kM, \ell N)\,. \end{array} $$

Die Wohldefiniertheit der Abbildung $\hookleftarrow$ folgt daraus, daß für $k \in K$, $m \in M$, $\ell \in L$, $n \in N$ sich $(km, \ell n)(M \times N) = (k,\ell)(M \times N)$ ergibt. Verträglichkeit mit der Multiplikation ist dann ersichtlich.

Auch kehren sich diese Abbildungen auf beiden Seiten um.

Vorbemerkung 3. Seien G und H Gruppen. Seien U, $\tilde{U} \leqslant G$ und V, $\tilde{V} \leqslant H$ Untergruppen. Dann ist

$$[U,\tilde{U}] \times [V,\tilde{V}] \;=\; [U \times V, \tilde{U} \times \tilde{V}]\;.$$

Wir haben die Inklusion $\geqslant$, denn für $(u,v) \in U \times V$ und $(\tilde{u},\tilde{v}) \in \tilde{U} \times \tilde{V}$ ist

$$[(u,v),(\tilde{u},\tilde{v})] \;=\; (u,v)^-(\tilde{u},\tilde{v})^-(u,v),(\tilde{u},\tilde{v}) \;=\; (u^-\tilde{u}^-u\tilde{u}, v^-\tilde{v}^-v\tilde{v}) \;=\; ([u,\tilde{u}],[v,\tilde{v}])\;,$$

und somit sind Erzeuger der rechten Seite in der linken enthalten.

Wir haben die Inklusion $\leqslant$, da $[U,\tilde{U}] \times 1 \leqslant [U \times V, \tilde{U} \times \tilde{V}]$ und $1 \times [V,\tilde{V}] \;=\; [U \times V, \tilde{U} \times \tilde{V}]$. Ersteres ist der Fall, da sich für u, $\tilde{u} \in U$

$$([u,\tilde{u}],1) \;=\; (u^-\tilde{u}^-u\tilde{u},1) \;=\; (u,1)^-)(\tilde{u},1)^-(u,1)(\tilde{u},1) \;=\; [(u,1),(\tilde{u},1)]$$

ergibt und somit Erzeuger der linken Seite in der rechten Seite enthalten sind.

Ende der *Vorbemerkungen.*

Ad (1). Es ist $U_{i+1} \trianglelefteqslant U_i$ und U_i/U_{i+1} abelsch für $i \in [0,t-1]$. Es ist $V_{i+1} \trianglelefteqslant V_i$ und V_i/V_{i+1} abelsch für $i \in [0,t-1]$.

Sei $i \in [0,t-1]$. Es ist $U_{i+1} \times V_{i+1} \trianglelefteqslant U_i \times V_i$ und es ist $(U_i \times V_i)/(U_{i+1} \times V_{i+1}) \simeq (U_i/U_{i+1}) \times (V_i/V_{i+1})$ abelsch; cf. Vorbemerkung 2. Somit ist $(U_i \times V_i)_{i\in[0,t]}$ als auflösende Reihe von $G \times H$ erkannt.

Insbesondere folgt aus G und H auflösbar, daß $G \times H$ auflösbar ist. Dies ist aber einfacher aus Hausaufgabe 25.(1) zu bekommen unter Verwendung von $(G \times 1) \trianglelefteqslant (G \times H)$ und $(G \times H)/(G \times 1) \simeq H$.

Ad (2). Es ist $U_i \trianglelefteqslant G$ für $i \in [0,t]$. Es ist $U_i/U_{i+1} \leqslant \mathrm{Z}(G/U_{i+1})$ für $i \in [0,t-1]$. Es ist $V_i \trianglelefteqslant H$ für $i \in [0,t]$. Es ist $V_i/V_{i+1} \leqslant \mathrm{Z}(H/V_{i+1})$ für $i \in [0,t-1]$.

Sei $i \in [0,t-1]$. Es ist $U_{i+1} \times V_{i+1} \trianglelefteqslant G \times H$, und wir haben den Gruppenisomorphismus

$$\begin{array}{rcccc}
(G \times H)/(U_{i+1} \times V_{i+1}) & \overset{f}{\underset{\sim}{\to}} & (G/U_{i+1}) & \times & (H/V_{i+1}) \\
(g,h)(U_{i+1} \times V_{i+1}) & \mapsto & (gU_{i+1} & , & hV_{i+1}) \\
(g,h)(U_{i+1} \times V_{i+1}) & \leftarrow\!\shortmid & (gU_{i+1} & , & hV_{i+1})\;;
\end{array}$$

cf. Vorbemerkung 2. Es ist

$$\begin{array}{rcl}
f\big((U_i \times V_i)/(U_{i+1} \times V_{i+1})\big) & = & (U_i/U_{i+1}) \times (V_i/V_{i+1}) \\
& \leqslant & \mathrm{Z}(G/U_{i+1}) \times \mathrm{Z}(H/V_{i+1}) \\
& = & \mathrm{Z}\big((G/U_{i+1}) \times (H/V_{i+1})\big) \\
& = & \mathrm{Z}\big(f\big((G \times H)/(U_{i+1} \times V_{i+1})\big)\big) \\
& = & f\big(\mathrm{Z}\big((G \times H)/(U_{i+1} \times V_{i+1})\big)\big)
\end{array}$$

cf. Vorbemerkung 1 angewandt auf f und auf f^-. Also ist

$$(U_i \times V_i)/(U_{i+1} \times V_{i+1}) \;\leqslant\; \mathrm{Z}\big((G \times H)/(U_{i+1} \times V_{i+1})\big)\;.$$

Somit ist $(U_i \times V_i)_{i\in[0,t]}$ als nilpotent auflösende Reihe von $G \times H$ erkannt.

Ad (3). Seien G und H nilpotent. Zu zeigen ist, daß $G \times H$ nilpotent ist.

Sei $(U_i)_{i\in[0,s]}$ eine nilpotent auflösende Reihe von G. Sei $(V_i)_{i\in[0,t]}$ eine nilpotent auflösende Reihe von H. Dank (2) ist $(U_i \times V_i)_{i\in[0,t]}$ eine nilpotent auflösende Reihe von $G \times H$. Also ist $G \times H$ nilpotent.