

Lösung 6

Hausaufgabe 21 (A27) Sei G eine Gruppe. Sei $(U_i)_{i \in [0, s]}$ eine Subnormalreihe von G .

- (1) Sei $H \leq G$. Man zeige: $(H \cap U_i)_{i \in [0, s]}$ ist eine Subnormalreihe von H . Man gebe einen injektiven Gruppenmorphismus $(H \cap U_i)/(H \cap U_{i+1}) \rightarrow U_i/U_{i+1}$ an für $i \in [0, s-1]$.
- (2) Sei $N \trianglelefteq G$. Sei $\bar{U}_i := (U_i N)/N$ für $i \in [0, s]$. Man zeige: $(\bar{U}_i)_{i \in [0, s]}$ ist eine Subnormalreihe von $\bar{G} := G/N$. Man gebe einen surjektiven Gruppenmorphismus $U_i/U_{i+1} \rightarrow \bar{U}_i/\bar{U}_{i+1}$ an für $i \in [0, s-1]$.

Lösung.

Ad (1). Wir zeigen, daß $(H \cap U_i)_{i \in [0, s]}$ eine Subnormalreihe von H ist.

Zunächst ist $H \cap U_0 = H \cap G = H$ und $H \cap U_s = H \cap 1 = 1$.

Sei $i \in [0, s-1]$. Wir haben $H \cap U_{i+1} \stackrel{!}{\trianglelefteq} H \cap U_i$ zu zeigen. Sei $h \in H \cap U_i$. Sei $x \in H \cap U_{i+1}$. Wir haben ${}^h x \stackrel{!}{\in} H \cap U_{i+1}$ zu zeigen. Da $h, x \in H$, ist ${}^h x \in H$. Da $h \in U_i$, da $x \in U_{i+1}$ und da $(U_i)_{i \in [0, s]}$ eine Subnormalreihe ist, ist ${}^h x \in U_{i+1}$.

Wir geben nun einen injektiven Gruppenmorphismus $(H \cap U_i)/(H \cap U_{i+1}) \rightarrow U_i/U_{i+1}$ an für $i \in [0, s-1]$. Es hat der Gruppenmorphismus

$$\begin{aligned} H \cap U_i &\rightarrow U_i/U_{i+1} \\ x &\mapsto xU_{i+1}, \end{aligned}$$

der aus Inklusion nach U_i und Restklassenmorphismus komponiert wurde, den Kern $(H \cap U_i) \cap U_{i+1} = H \cap U_{i+1}$. Folglich gibt es den induzierten Gruppenmorphismus

$$\begin{aligned} (H \cap U_i)/(H \cap U_{i+1}) &\rightarrow U_i/U_{i+1} \\ x(H \cap U_{i+1}) &\mapsto xU_{i+1}, \end{aligned}$$

welcher injektiv ist.

Ad (2). Vorweg merken wir an, daß aus $N \trianglelefteq G$ auch $N \trianglelefteq U_i N \leq G$ folgt für $i \in [0, s]$.

Wir zeigen, daß $(\bar{U}_i)_{i \in [0, s]}$ eine Subnormalreihe von G/N ist.

Zunächst ist $\bar{U}_0 = (U_0 N)/N = G/N$ und $\bar{U}_s = (U_s N)/N = N/N = 1$.

Sei $i \in [0, s-1]$. Wir haben $\bar{U}_{i+1} \stackrel{!}{\trianglelefteq} \bar{U}_i$ zu zeigen, i.e. $(U_{i+1} N)/N \stackrel{!}{\trianglelefteq} (U_i N)/N$. Hierfür ist $U_{i+1} N \stackrel{!}{\trianglelefteq} U_i N$ zu zeigen. Sei $x \in U_{i+1} N$. Schreibe $x = um$ mit $u \in U_{i+1}$ und $m \in N$. Sei $y \in U_i N$. Schreibe $y = vn$ mit $v \in U_i$ und $n \in N$. Wir haben ${}^y x \stackrel{!}{\in} U_{i+1} N$ zu zeigen. Es wird ${}^y x = {}^{vn}(um) = {}^{vn}u \cdot {}^{vn}m$. Da $m \in N \trianglelefteq G$, genügt es, ${}^{vn}u \stackrel{!}{\in} U_{i+1} N$ zu zeigen. Es wird

$${}^{vn}u = vnun^{-1}v^{-1} = (vuv^{-1})(vu^{-1}nuv^{-1})(vn^{-1}v^{-1}) = {}^v u \cdot {}^{vu^{-1}} n \cdot {}^v(n^{-1}) \in U_{i+1} N,$$

da $vuv^{-1} \in U_{i+1}$ wegen $U_{i+1} \trianglelefteq U_i$ und da ${}^{vu^{-1}} n \cdot {}^v(n^{-1}) \in N$ wegen $N \trianglelefteq G$.

Wir geben nun einen surjektiven Gruppenmorphismus $U_i/U_{i+1} \rightarrow \bar{U}_i/\bar{U}_{i+1}$ an für $i \in [0, s-1]$.

Wir haben den surjektiven Gruppenmorphismus

$$\begin{aligned} U_i &\rightarrow \bar{U}_i = (U_i N)/N \\ x &\mapsto xN \end{aligned}$$

als Einschränkung des Restklassenmorphismus $U_i N \rightarrow (U_i N)/N$ auf U_i .

Wir begründen die Surjektivität: Für $y \in U_i$ und $n \in N$ ist $ynN = yN$ das Bild von y .

Wir komponieren mit dem surjektiven Restklassenmorphismus $\bar{U}_i \rightarrow \bar{U}_i/\bar{U}_{i+1}$ und erhalten den surjektiven Gruppenmorphismus

$$\begin{aligned} U_i &\rightarrow \bar{U}_i/\bar{U}_{i+1} \\ x &\mapsto (xN)\bar{U}_{i+1}, \end{aligned}$$

Sein Kern enthält die Untergruppe U_{i+1} , da für $x \in U_{i+1}$ sich $xN \in (U_{i+1}N)/N = \bar{U}_{i+1}$ ergibt. Folglich gibt es den induzierten Gruppenmorphismus

$$\begin{aligned} U_i/U_{i+1} &\rightarrow \bar{U}_i/\bar{U}_{i+1} \\ xU_{i+1} &\mapsto (xN)\bar{U}_{i+1}, \end{aligned}$$

welcher ebenfalls surjektiv ist.

Hausaufgabe 22

(1) Man bestimme alle Kompositionsreihen von C_{12} .

(2) Man bestimme alle Kompositionsreihen von C_{30} .

(3) Man bestimme alle Kompositionsreihen von A_4 .

Lösung.

Vorbemerkung. Sei $n \geq 1$. Sei $C_n = \langle d : d^n \rangle$.

Sei $n = s \cdot t$ mit $s, t \geq 1$. Dann ist $C_s := \langle c^t \rangle \leq C_n$.

Alle Untergruppen von C_n sind von dieser Form.

Für Teiler s, s' von n ist dabei $C_s \leq C_{s'}$ genau dann, wenn s ein Teiler von s' ist.

Ende der Vorbemerkung.

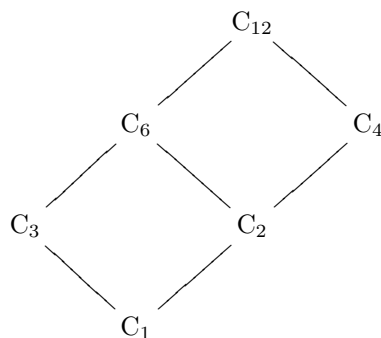
Ad (1). Die Untergruppen von C_{12} sind

$$C_1, C_2, C_4, C_3, C_6, C_{12}$$

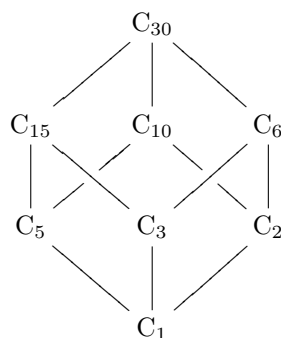
Indem wir von einer Untergruppe immer zu einer maximalen echten Untergruppe laufen, bekommen wir die Kompositionsreihen

$$\begin{aligned} (C_{12}, C_6, C_3, C_1) \\ (C_{12}, C_6, C_2, C_1) \\ (C_{12}, C_4, C_2, C_1) \end{aligned}$$

Man kann sie auch in folgendem Diagramm ablesen.



Ad (1). Die Untergruppen von C_{30} sind dargestellt in folgendem Diagramm.



Wir können die Kompositionsreihen ablesen.

$$\begin{aligned} & (C_{30}, C_{15}, C_5, C_1) \\ & (C_{30}, C_{15}, C_3, C_1) \\ & (C_{30}, C_6, C_3, C_1) \\ & (C_{30}, C_6, C_2, C_1) \\ & (C_{30}, C_{10}, C_2, C_1) \\ & (C_{30}, C_{10}, C_5, C_1) \end{aligned}$$

Ad (3). Wir *behaupten*, daß $V = \langle (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4) \rangle$, 1 und A_4 die einzigen Normalteiler von A_4 sind.

Wir haben die Konjugationsklassen $A_4 \text{id}$, $A_4(1, 2, 3)$, $A_4(1, 2)(3, 4)$ mit $|A_4 \text{id}| = 1$, $|A_4(1, 2, 3)| = 8$ und mit $|A_4(1, 2)(3, 4)| = 3$.

Sei $N \trianglelefteq A_4$ mit $N \not\subseteq \{1, A_4\}$. Dann kann N kein Element aus $A_4(1, 2, 3)$ enthalten, da sonst $|N| \geq 8$ und also $N = A_4$ wäre.

Wenn N ein Element von $A_4(1, 2)(3, 4)$ enthält und keines von $A_4(1, 2, 3)$, dann ist $N = V$.

Da damit alle Möglichkeiten abgedeckt sind, zeigt dies die *Behauptung*.

Ferner sind $C := \langle (1, 2)(3, 4) \rangle$, $C' := \langle (1, 3)(2, 4) \rangle$, $C'' := \langle (1, 4)(2, 3) \rangle$, 1 , V die einzigen Untergruppen und damit die einzigen Normalteiler von V .

Damit haben wir die folgenden Kompositionsreihen.

$$\begin{aligned} & (A_4, V, C, 1) \\ & (A_4, V, C', 1) \\ & (A_4, V, C'', 1) \end{aligned}$$

Hausaufgabe 23

Sei X eine Menge. Wir betrachten die Menge der Wörter $F_0(X)$ in $X^\pm$.

Sei für $w = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_k^{\varepsilon_k} \in F_0(X)$ die *Länge* $\ell(w) := k$ definiert, wobei $k \geq 0$, $x_i \in X^\pm$ und $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$ für $i \in [1, k]$.

Es heißt $w \in F_0(X)$ *reduziert*, falls für $w' \in F_0(X)$ aus $w \rightsquigarrow w'$ bereits $w = w'$ folgt.

- (1) Seien $w, u, v \in F_0(X)$ gegeben mit $w \rightsquigarrow u$ und $w \rightsquigarrow v$.

Man zeige: Es gibt ein $w' \in F_0(X)$ mit $u \rightsquigarrow w'$ und $v \rightsquigarrow w'$.

- (2) Seien Wörter $u, v \in F_0(X)$ mit $[u] = [v]$ in $F(X)$ gegeben.

Seien $k \geq 0$ und $w_1, \dots, w_{k+1}, w'_1, \dots, w'_k \in F_0(X)$ gegeben mit $u = w_1$, $w_{k+1} = v$ und mit $w_i \rightsquigarrow w'_i$ und $w_{i+1} \rightsquigarrow w'_i$ für $i \in [1, k]$.

Ein solches Tupel $\omega := (w_1, \dots, w_{k+1}, w'_1, \dots, w'_k)$ heiße *Verbindungskette* von u nach v .

Es heiße $\ell(\omega) := \left(\sum_{i \in [1, k+1]} \ell(w_i) \right) + \left(\sum_{i \in [1, k]} \ell(w'_i) \right)$ die *Gesamtlänge* von ω .

Man zeige mittels (1): Sind u und v reduziert, ist $u \neq v$ und ist ω eine Verbindungskette von u nach v , so gibt es eine Verbindungskette $\tilde{\omega}$ von u nach v mit $\ell(\tilde{\omega}) < \ell(\omega)$.

- (3) Man zeige mittels (2): Gegeben seien reduzierte Wörter $u, v \in F_0(X)$ mit $[u] = [v]$ in $F(X)$. Dann ist $u = v$.

Lösung.

Ad (1).

Fall:

$$w = ax^\varepsilon x^{-\varepsilon} by^\eta y^{-\eta} c$$

mit $a, b, c \in F_0(X)$, $x, y \in X$ und $\varepsilon, \eta \in \{-1, +1\}$, und

$$\begin{aligned} u &= aby^\eta y^{-\eta} c \\ v &= ax^\varepsilon x^{-\varepsilon} bc \end{aligned}$$

Wir nehmen

$$w' := abc .$$

Fall:

$$w = ax^\varepsilon x^{-\varepsilon} x^\varepsilon c$$

mit $a, c \in F_0(X)$, $x \in X$ und $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, und

$$u = ax^\varepsilon c$$

$$v = ax^\varepsilon c$$

Wir nehmen

$$w' := ax^\varepsilon c .$$

Fall:

$$w = ax^\varepsilon x^{-\varepsilon} c$$

mit $a, c \in F_0(X)$, $x \in X$ und $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, und

$$u = ac$$

$$v = ac$$

Wir nehmen

$$w' := ac .$$

Wir beachten noch, daß in allen drei Fällen $\ell(w') < \ell(w)$ ist.

Ad (2). Wir stellen die Verbindungskette ω wie folgt dar. Die obere und die untere Gleichheit folgt dabei aus u und v reduziert. Da $u \neq v$ ist, ist $k \geq 2$.

$$\begin{array}{ccccc}
 u & = & w_1 & = & w'_1 \\
 & & & & \parallel \\
 & & w_2 & \rightsquigarrow & w'_1 \\
 & & \parallel & & \\
 & & w_2 & \rightsquigarrow & w'_2 \\
 & & & & \parallel \\
 & & w_3 & \rightsquigarrow & w'_2 \\
 & & \parallel & & \\
 & & w_3 & \rightsquigarrow & w'_3 \\
 & & & & \vdots \\
 & & w_k & \rightsquigarrow & w'_{k-1} \\
 & & \parallel & & \\
 & & w_k & \rightsquigarrow & w'_k \\
 & & & & \parallel \\
 v & = & w_{k+1} & = & w'_k
 \end{array}$$

Mit (1) bekommen wir folgende Ersetzungen. Die obere und die untere neue Gleichheit folgt dabei aus u und v reduziert.

$$\begin{array}{ccccccc}
 u & = & w_1 & = & w'_1 & = & w''_2 \\
 & & & & & & \parallel \\
 & & & & w'_2 & \rightsquigarrow & w''_2 \\
 & & & & \parallel & & \\
 & & & & w'_2 & \rightsquigarrow & w''_3 \\
 & & & & & & \parallel \\
 & & & & w'_3 & \rightsquigarrow & w''_3 \\
 & & & & \vdots & & \\
 & & & & w'_{k-1} & \rightsquigarrow & w''_k \\
 & & & & & & \parallel \\
 v & = & w_{k+1} & = & w'_k & = & w''_k
 \end{array}$$

Wir können also folgende Verbindungskette nehmen.

$$\tilde{\omega} := (w'_1, \dots, w'_k, w''_2, \dots, w''_k)$$

Da $\ell(w''_i) < \ell(w_i)$ für $i \in [2, k]$ und da $\ell(w_1) \geq 0$ und $\ell(w_{k+1}) \geq 0$, wird

$$\ell(\omega) = \left(\sum_{i \in [1, k+1]} \ell(w_i) \right) + \left(\sum_{i \in [1, k]} \ell(w'_i) \right) > \left(\sum_{i \in [1, k]} \ell(w'_i) \right) + \left(\sum_{i \in [2, k]} \ell(w''_i) \right) = \ell(\tilde{\omega}) .$$

Ad (3). Annahme, es ist $u \neq v$.

Sei ω eine Verbindungskette von u nach v minimaler Gesamtlänge.

Gemäß (2) gibt es eine Verbindungskette $\tilde{\omega}$ von u nach v mit Gesamtlänge $\ell(\tilde{\omega}) < \ell(\omega)$. Wir haben einen *Widerspruch*.

Also ist $u = v$.

Hausaufgabe 24 (A29, A23)

- (1) Sei G eine endliche Gruppe. Man zeige: Es ist G isomorph zu einer endlich präsentierten Gruppe. (Hinweis: Multiplikationstafel für Relationen verwenden.)
- (2) Man konstruiere einen Automorphismus σ von S_6 , der $(1, 2) \mapsto (1, 2)(3, 4)(5, 6)$ und $(1, 2, 3, 4, 5, 6) \mapsto (1, 2, 3)(4, 5)$ abbildet. Ist σ inner?

Lösung.

Ad (1). Sei X eine Menge mit $|X| = |G|$. Seien die Elemente von X bezeichnet mit x_g für $g \in G$, so daß sich $X = \{x_g : g \in G\}$ ergibt.

Sei $G_P := \langle X : x_g x_h x_{gh}^- \text{ für } g, h \in G \rangle$.

Wir haben den Gruppenmorphismus

$$\begin{array}{ccc} G_P & \xrightarrow{f} & G \\ x_g & \mapsto & g \quad \text{für } g \in G, \end{array}$$

da $g \cdot h \cdot (gh)^- = 1$ für $g, h \in G$.

Es ist f surjektiv.

Um zu zeigen, daß G bijektiv ist, haben wir noch zu zeigen, daß $|G_P| \stackrel{!}{\leq} |G|$ ist.

Es genügt zu zeigen: Jedes Element von G_P ist von der Form x_g für ein $g \in G$.

In G_P gilt

$$x_1 \cdot x_1 \cdot x_{1,1}^- = 1 ,$$

und also $x_1 = 1$.

In G_P gilt für $g \in G$

$$x_g \cdot x_{g^-} \cdot x_{g \cdot g^-}^- = 1 ,$$

und also $x_{g^-} = x_g^-$.

Somit können wir jedes Element $\xi \in G_P \setminus \{1\}$ schreiben in der Form

$$\xi = x_{g_1} \cdot x_{g_2} \cdot \dots \cdot x_{g_k} ,$$

wobei $k \geq 1$ und $g_i \in G$ für $i \in [1, k]$. Sei hierbei k minimal gewählt.

Annahme, es ist $k \geq 2$. Dann wird

$$\xi = x_{g_1} \cdot \dots \cdot x_{g_{k-2}} \cdot x_{g_{k-1}} \cdot x_{g_k} = x_{g_1} \cdot \dots \cdot x_{g_{k-2}} \cdot x_{g_{k-1} \cdot g_k} ,$$

im *Widerspruch* zur vorausgesetzten Minimalität.

Somit ist $k = 1$ und also $\xi = x_{g_1}$.

Insgesamt läßt sich also jedes Element von G_P in der Form x_g schreiben für ein $g \in G$, sowohl $1 \in G_P$ als auch jedes Element in $G_P \setminus \{1\}$.

Somit ist f als Gruppenisomorphismus nachgewiesen.

Ad (2).

Vorbemerkung. Wenn, dem Hinweis folgend, der Automorphismus $S_6 \xrightarrow{\sim} S_6$ das Element $g := (1, 2)$ nach $(1, 2)(3, 4)(5, 6) =: \tilde{g}$ und das Element $x := (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ nach $\tilde{x} := (1, 2, 3)(4, 5)$ schicken soll, dann muß er notwendigerweise

$$\begin{aligned} (1, 2) &= g \mapsto \tilde{g} = (1, 2)(3, 4)(5, 6) = (1, 2)(3, 4)(5, 6) =: t_1 \\ (2, 3) &= {}^xg \mapsto \tilde{x}\tilde{g} = (2, 3)(1, 5)(4, 6) = (1, 5)(2, 3)(4, 6) =: t_2 \\ (3, 4) &= {}^{x^2}g \mapsto \tilde{x}^2\tilde{g} = (3, 1)(2, 4)(5, 6) = (1, 3)(2, 4)(5, 6) =: t_3 \\ (4, 5) &= {}^{x^3}g \mapsto \tilde{x}^3\tilde{g} = (1, 2)(3, 5)(4, 6) = (1, 2)(3, 5)(4, 6) =: t_4 \\ (5, 6) &= {}^{x^4}g \mapsto \tilde{x}^4\tilde{g} = (2, 3)(1, 4)(5, 6) = (1, 4)(2, 3)(5, 6) =: t_5 \end{aligned}$$

schicken. *Ende der Vorbemerkung.*

Aus Hausaufgabe 17 entnehmen wir den Isomorphismus $f : S_{P,6} \xrightarrow{\sim} S_6$.

Wir konstruieren einen Isomorphismus $u : S_{P,6} \xrightarrow{\sim} S_6$, welcher dann einen Automorphismus $\sigma := u \circ f^{-1} \in \text{Aut}(S_6)$ liefert.

Wir *behaupten* die Existenz eines Gruppenmorphisms $S_{P,6} \xrightarrow{u} S_6$ mit $u(s_i) = t_i = \tilde{x}^{i-1}\tilde{g}$ für $i \in [1, 5]$.

Wir haben die Relationen aus Hausaufgabe 17 zu überprüfen.

Es ist $\tilde{g}^2 = \text{id}$ und also auch $t_i^2 = (\tilde{x}^{i-1}\tilde{g})^2 = \tilde{x}^{i-1}(\tilde{g}^2) = \text{id}$ für $i \in [1, 5]$.

Es ist $t_1 \circ t_2 = \tilde{g} \circ \tilde{x}\tilde{g} = (1, 2)(3, 4)(5, 6) \circ (1, 5)(2, 3)(4, 6) = (1, 6, 3)(2, 4, 5)$ und also

$$(t_i \circ t_{i+1})^3 = (\tilde{x}^{i-1}\tilde{g} \circ \tilde{x}^i\tilde{g})^3 = \tilde{x}^{i-1}((\tilde{g} \circ \tilde{x}\tilde{g})^3) = \text{id}$$

für $i \in [1, 4]$.

Es ist $t_1 \circ t_3 = \tilde{g} \circ \tilde{x}^2\tilde{g} = (1, 2)(3, 4)(5, 6) \circ (1, 3)(2, 4)(5, 6) = (1, 4)(2, 3)$ und also

$$(t_i \circ t_{i+2})^2 = (\tilde{x}^{i-1}\tilde{g} \circ \tilde{x}^{i+1}\tilde{g})^2 = \tilde{x}^{i-1}((\tilde{g} \circ \tilde{x}^2\tilde{g})^2) = \text{id}$$

für $i \in [1, 3]$.

Es ist $t_1 \circ t_4 = \tilde{g} \circ \tilde{x}^3\tilde{g} = (1, 2)(3, 4)(5, 6) \circ (1, 2)(3, 5)(4, 6) = (3, 6)(4, 5)$ und also

$$(t_i \circ t_{i+3})^2 = (\tilde{x}^{i-1}\tilde{g} \circ \tilde{x}^{i+2}\tilde{g})^2 = \tilde{x}^{i-1}((\tilde{g} \circ \tilde{x}^3\tilde{g})^2) = \text{id}$$

für $i \in [1, 2]$.

Es ist $t_1 \circ t_5 = (1, 2)(3, 4)(5, 6) \circ (1, 4)(2, 3)(5, 6) = (1, 3)(2, 4)$ und also $(t_1 \circ t_5)^2 = \text{id}$.

Dies zeigt die *Behauptung*.

Es ist übrigens $u((1, 2)) = u(s_1) = t_1 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)$ und

$$u((1, 2, 3, 4, 5, 6)) = u(s_1 \circ s_2 \circ s_3 \circ s_4 \circ s_5) = t_1 \circ t_2 \circ t_3 \circ t_4 \circ t_5 = (1, 2, 3)(4, 5).$$

Wir *behaupten*, daß u ein Isomorphismus ist. Es genügt zu zeigen, daß u surjektiv ist.

Dafür genügt es zu zeigen, daß $S_6 \stackrel{!}{=} \langle t_i : i \in [1, 6] \rangle =: S$ ist.

Es ist $t_1 \circ t_3 = (1, 4)(2, 3)$ und also $t_1 \circ t_3 \circ t_5 = (1, 4)(2, 3) \circ (1, 4)(2, 3)(5, 6) = (5, 6) \in S$.

Es ist $t_4(5, 6) = (1, 2)(3, 5)(4, 6)(5, 6) = (3, 4) =: b \in S$.

Es ist $t_3(3, 4) = (1, 3)(2, 4)(5, 6)(3, 4) = (1, 2) \in S$.

Es ist $t_1 \circ t_2 \circ t_5 = (1, 6, 3)(2, 4, 5) \circ (1, 4)(2, 3)(5, 6) = (1, 5, 3, 4, 6, 2) =: a \in S$.

Es ist ${}^a(5, 6) = (1, 5, 3, 4, 6, 2)(5, 6) = (3, 2) = (2, 3) \in S$.

Es ist ${}^b(2, 3) = (2, 4) \in S$.

Es ist ${}^{t_1 \circ t_2}(2, 4) = (1, 6, 3)(2, 4, 5)(2, 4) = (4, 5) \in S$.

Also ist

$$S_6 = \langle (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6) \rangle \leq S \leq S_6$$

und also $S_6 = S$. Dies zeigt die *Behauptung*.

Schließlich ist σ nicht inner, da er $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ auf $(1, 2, 3)(4, 5)$ abbildet, welche nicht zueinander konjugiert sind.