M. Künzer Abgabe im Ilias bis Fr 23.05.2025 oder in der Übung

Gruppentheorie, SoSe 25

Lösung 5

Hausaufgabe 17 (A22) Sei $n \geqslant 1$. Wir setzen

$$\mathrm{S}_{\mathrm{P},n} \;:=\; \left\langle\; s_1\,,\ldots,s_{n-1} \;:\; \begin{array}{ll} s_i^2 & \text{für } i \in [1,n-1] \\ (s_i s_{i+1})^3 & \text{für } i \in [1,n-2] \\ (s_i s_j)^2 & \text{für } i,\,j \,\in\, [1,n-1] \text{ mit } |i-j| \geqslant 2 \end{array} \;\right\rangle .$$

Man zeige die Existenz des Gruppenisomorphismus

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{S}_{\mathrm{P},n} & \overset{f}{\underset{\sim}{\to}} & \mathrm{S}_n & \\ s_i & \mapsto & (i,i+1) & \quad\text{für } i \in [1,n-1]\,. \end{array}$$

Lösung. Zeigen wir zunächst, daß f als Gruppenmorphismus existiert wie angegeben. In der Tat wird

$$\begin{array}{lclcll} (i,i+1)^2 & & & = & \mathrm{id} & \text{für } i \in [1,n-1] \\ ((i,i+1)\circ(i+1,i+2))^3 & = & (i,i+1,i+2)^3 & = & \mathrm{id} & \text{für } i \in [1,n-2] \\ ((i,i+1)\circ(j,j+1))^2 & = & (i,i+1)^2\circ(j,j+1)^2 & = & \mathrm{id} & \text{für } i,\,j \,\in\, [1,n-1] \text{ mit } |i-j| \geqslant 2\,. \end{array}$$

Gemäß universeller Eigenschaft der präsentierten Gruppe $\mathrm{S}_{\mathrm{P},n}$ können wir also die Abbildung

$$\begin{array}{rcll} \{s_1\,,\ldots,s_{n-1}\} & \to & \mathrm{S}_n & \\ s_i & \mapsto & (i,i+1) & \quad\text{für } i \in [1,n-1] \end{array}$$

zum angegebenen Gruppenmorphismus f fortsetzen.
Es ist f surjektiv, da $\mathrm{S}_n = \langle (1,2),\,(2,3),\,\ldots,(n-1,n)\rangle$.

Um zu zeigen, daß f ein Isomorphismus ist, bleibt also $|\mathrm{S}_{\mathrm{P},n}| \overset{!}{\leqslant} n!$ nachzuweisen. Wir führen eine Induktion nach $n \geqslant 1$.
Für $n = 1$ ist $\mathrm{S}_{\mathrm{P},n} = 1$, da $\mathrm{F}(\emptyset) = \{[\emptyset]\} = 1$, und jede Faktorgruppe davon ebenfalls einelementig ist.

Sei $n \geqslant 2$. Sei bekannt, daß $|\mathrm{S}_{\mathrm{P},n-1}| \leqslant (n-1)!\,$. Wir wollen $|\mathrm{S}_{\mathrm{P},n}| \overset{!}{\leqslant} n!$ zeigen.
Mittels universeller Eigenschaft der präsentierten Gruppe $\mathrm{S}_{\mathrm{P},n-1}$ erhalten wir den Gruppenmorphismus

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{S}_{\mathrm{P},n-1} & \overset{h}{\to} & \mathrm{S}_{\mathrm{P},n} & \\ s_i & \mapsto & s_i & \quad\text{für } i \in [1,n-2]\,, \end{array}$$

da $s_i^2 = 1$ für $i \in [1,n-2]$ und $(s_i s_{i+1})^3 = 1$ für $i \in [1,n-3]$ und $(s_i s_j)^2 = 1$ für $i,\,j \,\in\, [1,n-2]$ mit $|i-j| \geqslant 2$ auch in $\mathrm{S}_{\mathrm{P},n}$ gelten.

Sei $H := h(\mathrm{S}_{\mathrm{P},n-1}) \leqslant \mathrm{S}_{\mathrm{P},n}\,$. Es ist $|H| \leqslant |\mathrm{S}_{\mathrm{P},n-1}| \overset{\text{I.V.}}{\leqslant} (n-1)!\,$. Können wir $|H\backslash\mathrm{S}_{\mathrm{P},n}| \overset{!}{\leqslant} n$ zeigen, dann folgt

$$|\mathrm{S}_{\mathrm{P},n}| \;=\; |H\backslash\mathrm{S}_{\mathrm{P},n}|\cdot|H| \;\leqslant\; n\cdot(n-1)! \;=\; n!\,.$$

Bleibt also $|H\backslash\mathrm{S}_{\mathrm{P},n}| \overset{!}{\leqslant} n$ zu zeigen.
Beachte allgemein, daß in $\mathrm{S}_{\mathrm{P},n}$ gilt, daß $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ für $i \in [1,n-2]$, wie aus $(s_i s_{i+1})^3 = 1$ und $s_i^2 = s_{i+1}^2 = 1$ folgt. Ferner ist dort $s_i s_j = s_j s_i$ für $i,\,j \,\in\, [1,n-1]$ mit $|i-j| \geqslant 2$, wie aus $(s_i s_j)^2 = 1$ und $s_i^2 = s_j^2 = 1$ folgt.
Wir behaupten dazu, daß

$$H\backslash\mathrm{S}_{\mathrm{P},n} \;\overset{!}{=}\; \{\, H s_{n-1}\cdot s_{n-2}\cdot\ldots\cdot s_i \,:\, i \in [1,n]\,\} \;=:\; M\,.$$

Zu zeigen ist $\overset{!}{\subseteq}$. *Annahme,* nicht. Sei $\xi \in \mathrm{S}_{\mathrm{P},n}$ derart gewählt, daß $H\xi \in (H\backslash \mathrm{S}_{\mathrm{P},n}) \smallsetminus M$ liegt, wobei ξ dafür ein Produkt einer minimalen Anzahl von Faktoren aus $s_1, \ldots, s_{n-1}$ ist. Wir wählen uns eine solche Faktordarstellung von ξ.

Würde s_{n-1} in dieser Faktordarstellung von ξ nicht als Faktor auftauchen, so wäre $H\xi = H \in M$, was nicht zutrifft. Also taucht s_{n-1} in dieser Faktordarstellung auf.

Wegen der vorausgesetzten Minimalität ist s_{n-1} der erste Faktor von ξ.

Wir betrachten die erste Stelle von links in der Produktdarstellung von ξ, in welcher der Index j im Vergleich zum vorangegangenen Faktor nicht um 1 nach unten gegangen ist. Es ist also

$$H\xi \;=\; Hs_{n-1} \cdot s_{n-2} \cdot \ldots \cdot s_i \cdot s_j \cdot \eta$$

für ein $\eta \in \mathrm{S}_{P,n}$.

Für $a,\, b \in [1, n-1]$ schreiben wir $s_{\lfloor b,a \rfloor} := s_b \cdot s_{b-1} \cdot \ldots \cdot s_a$, falls $b \geqslant a$, und $s_{\lfloor b,a \rfloor} := 1$, falls $b < a$.

Es ist also

$$H\xi \;=\; Hs_{\lfloor n-1,i \rfloor} \cdot s_j \cdot \eta\,.$$

Fall $j \in [1, i-2]$. Es wird

$$H\xi \;=\; Hs_{\lfloor n-1,i \rfloor} \cdot s_j \cdot \eta \;=\; Hs_j \cdot s_{\lfloor n-1,i \rfloor} \cdot \eta \;=\; Hs_{\lfloor n-1,i \rfloor} \cdot \eta\,,$$

was der vorausgesetzten Minimalität widerspricht. Also tritt dieser Fall nicht ein.

Fall $j = i$. Es wird

$$H\xi \;=\; Hs_{\lfloor n-1,i \rfloor} \cdot s_i \cdot s_i \cdot \eta \;=\; Hs_{\lfloor n-1,i+1 \rfloor} \cdot \eta\,,$$

was der vorausgesetzten Minimalität widerspricht. Also tritt dieser Fall nicht ein.

Fall $j \in [i+1, n-1]$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} H\xi & = & Hs_{\lfloor n-1,i \rfloor} \cdot s_j \cdot \eta \\ & = & Hs_{\lfloor n-1,j+1 \rfloor} \cdot s_j \cdot s_{j-1} \cdot s_{\lfloor j-2,i \rfloor} \cdot s_j \cdot \eta \\ & = & Hs_{\lfloor n-1,j+1 \rfloor} \cdot s_j \cdot s_{j-1} \cdot s_j \cdot s_{\lfloor j-2,i \rfloor} \cdot \eta \\ & = & Hs_{\lfloor n-1,j+1 \rfloor} \cdot s_{j-1} \cdot s_j \cdot s_{j-1} \cdot s_{\lfloor j-2,i \rfloor} \cdot \eta \\ & = & Hs_{j-1} \cdot s_{\lfloor n-1,j+1 \rfloor} \cdot s_j \cdot s_{j-1} \cdot s_{\lfloor j-2,i \rfloor} \cdot \eta \\ & = & Hs_{\lfloor n-1,j+1 \rfloor} \cdot s_j \cdot s_{j-1} \cdot s_{\lfloor j-2,i \rfloor} \cdot \eta\,, \end{array}$$

was der vorausgesetzten Minimalität widerspricht. Also tritt dieser Fall nicht ein.

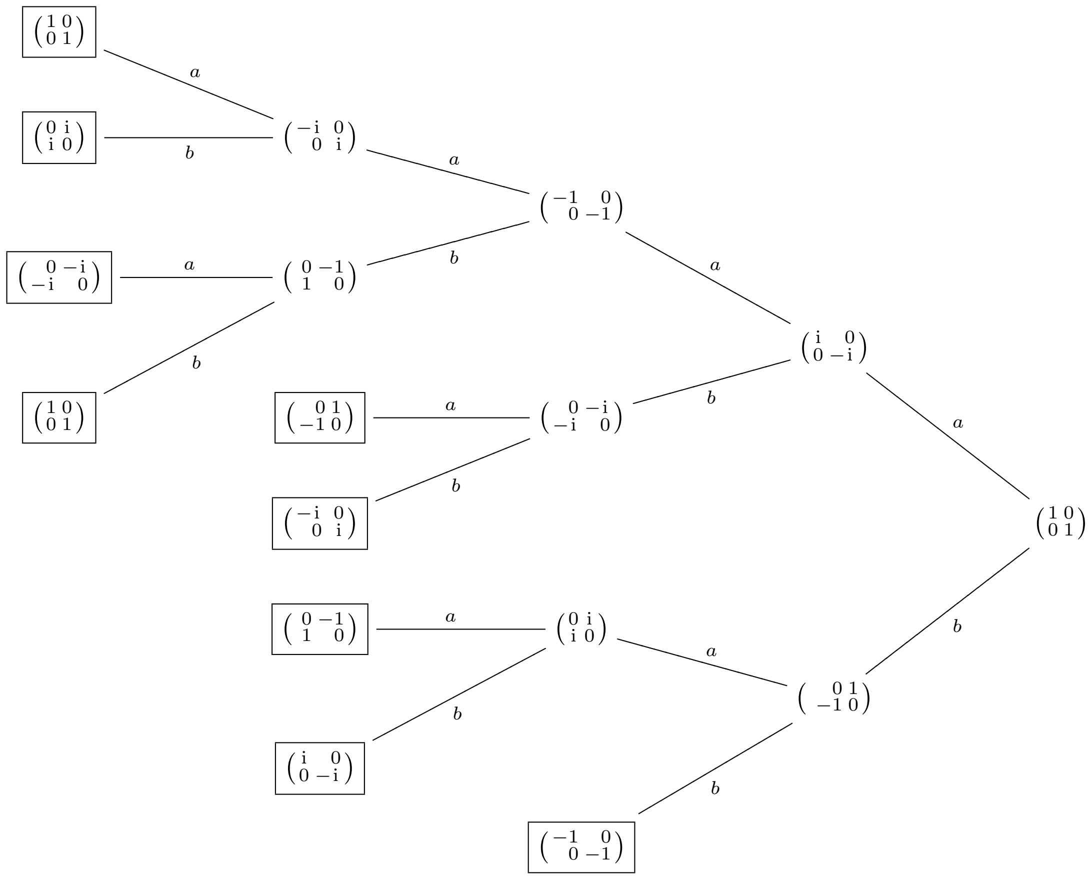
Da keiner der zu betrachtenden Fälle eintreten kann, haben wir einen *Widerspruch.*

Hausaufgabe 18 (A26) Sei $\mathrm{Q}_8 := \langle \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle \leqslant \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Man finde eine zu Q_8 isomorphe endlich präsentierte Gruppe unter Verwendung von Algorithmus 60. Welche Ordnung hat Q_8?

Lösung. Wir haben den surjektiven Gruppenmorphismus

$$\begin{array}{rcl} F \;:=\; \mathrm{F}(\{a,b\}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Q}_8 \\ a & \mapsto & \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{smallmatrix}\right) \\ b & \mapsto & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\,, \end{array}$$

vermöge dessen Q_8 zu einer F-Menge wird. Zur Berechnung von $\mathrm{C}_F(1_{\mathrm{Q}_8}) = \mathrm{C}_F(\mathrm{E}_2)$ erstellen wir folgenden Baum.



Die Anzahl der unmarkierten Stellen liefert $|\mathrm{Q}_8| = 8$.
Die markierten Stellen, von oben nach unten gelesen und von rechts nach links, liefern die folgenden Relationen.

$$\begin{array}{ccccccccc} a^{-2}b^2 & , & b^- aba & , & a^{-3}b^2 a & , & (ba^2)^- a^2 b & , \\ a^- bab & , & a^4 & , & (ab)^- ba^3 & , & (ba)^- aba^2 & , \\ b^2 a^2 & & & & & & & \end{array}$$

Nun wenden wir Bemerkung 61 an.
All diese Relationen außer a^4 und a^2b^2 modulo dem von a^4 und $a^{-2}b^2$ erzeugten Normalteiler vereinfacht, insbesondere also unter Verwendung der Erlaubnis, b^2 durch a^2 zu ersetzen und umgekehrt, ergibt nach eventueller Konjugation folgende Liste von Relationen.

$$\begin{array}{ccccccccc} a^{-2}b^2 & , & a^{-2}(ab)^2 & , & 1 & , & 1 & , \\ a^{-2}(ab)^2 & , & a^4 & , & a^2(ab)^2 & , & a^2(ab)^2 & , \\ 1 & & & & & & & \end{array}$$

Zum Beispiel wurde die zweite Relation $b^- aba$ konjugiert zu $ab^- ab$, also ab^3ab, also zu $a^3bab = a^2(ab)^2$.
Somit ist

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Q}_{\mathrm{P},8} \;:=\; \langle\, a, b \,:\, a^4,\ a^{-2}b^2,\ a^{-2}(ab)^2 \,\rangle & \overset{\bar\varphi}{\underset{\sim}{\to}} & \mathrm{Q}_8 \\ a & \mapsto & \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{smallmatrix}\right) \\ b & \mapsto & \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \;. \end{array}$$

Die Wege zu den unmarkierten Stellen im obigen Baum liefern noch

$$\mathrm{Q}_{\mathrm{P},8} \;=\; \{\, 1\,,\, a\,,\, b\,,\, a^2\,,\, ba\,,\, ab\,,\, a^3\,,\, ba^2 \,\}\;.$$

Hausaufgabe 19 Sei $G = \langle\, g_1, \ldots, g_n \,:\, r_1, \ldots, r_m \,\rangle$ eine endlich präsentierte Gruppe.
Sei $A := \mathbb{Z}^{n\times 1}$, gesehen als additiv geschriebene abelsche Gruppe. Sei $F := \mathrm{F}(\{g_1, \ldots, g_n\})$.
Wir betrachten den Gruppenmorphismus $\psi : F \to A : g_i \mapsto \mathrm{e}_i$ für $i \in [1, n]$.
Sei $\bar r_i := \psi(r_i)$ für $i \in [1, m]$.

(1) Man zeige: Wir haben den Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} G/G^{(1)} & \overset{\varphi}{\underset{\sim}{\to}} & A/\langle \bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_m \rangle \\ g_i G^{(1)} & \mapsto & \mathrm{e}_i + \langle \bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_m \rangle \quad \text{für } i \in [1, n] \end{array}$$

(2) Unter Verwendung von (1) berechne man die abelsche Gruppe $\mathrm{D}_8/\mathrm{D}_8^{(1)}$.

Lösung. Wir schreiben $B := \langle \bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_m \rangle \leqslant A$.
Ad (1). Wir haben den Gruppenmorphismus

$$\begin{array}{rcl} G & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & A/B \\ g_i & \mapsto & \mathrm{e}_i + B \,, \end{array}$$

da $\varphi(r_i) = \bar{r}_i + B = 0$ für $i \in [1, m]$.
Da A/B abelsch ist, ist $\hat{\varphi}(G^{(1)}) = 0$. Also gibt es auch den Gruppenmorphismus

$$\begin{array}{rcl} G/G^{(1)} & \xrightarrow{\varphi} & A/B \\ g_i G^{(1)} & \mapsto & \mathrm{e}_i + B \,. \end{array}$$

Wir haben umgekehrt die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} A & \xrightarrow{\hat{\varphi}'} & G/G^{(1)} \\ \sum_{i \in [1,n]} z_i \, \mathrm{e}_i & \mapsto & g_1^{z_1} \cdot \ldots \cdot g_n^{z_n} G^{(1)} \,, \end{array}$$

die ein Gruppenmorphismus ist, da $G/G^{(1)}$ abelsch ist.
Es ist $\hat{\varphi}'(\psi(g_i)) = \hat{\varphi}'(\mathrm{e}_i) = g_i G^{(1)}$ für $i \in [1, n]$. Also ist $\hat{\varphi}' \circ \psi : F \to G/G^{(1)}$ der Restklassenmorphismus.
Sei $i \in [1, m]$. Wir schreiben

$$r_i \;=\; g_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot g_{i_k}^{\varepsilon_k}$$

mit $i_j \in [1, n]$ und $\varepsilon_j \in \{-1, +1\}$ für $j \in [1, k]$. Damit wird

$$\begin{array}{rcl} \hat{\varphi}'(\bar{r}_i) & = & \hat{\varphi}'(\psi(r_i)) \\ & = & \hat{\varphi}'(\psi(g_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot g_{i_k}^{\varepsilon_k})) \\ & = & g_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot g_{i_k}^{\varepsilon_k} G^{(1)} \\ & = & 1 \,, \end{array}$$

da bereits $g_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot g_{i_k}^{\varepsilon_k} = 1$ gilt in G. Also bekommen wir den Gruppenmorphismus

$$\begin{array}{rcl} A/B & \xrightarrow{\varphi'} & G/G^{(1)} \\ \sum_{i \in [1,n]} z_i \, \mathrm{e}_i + B & \mapsto & g_1^{z_1} \cdot \ldots \cdot g_n^{z_n} G^{(1)} \,. \end{array}$$

Wir erhalten

$$\varphi(\varphi'(\mathrm{e}_i + B)) \;=\; \varphi(g_i G^{(1)}) \;=\; \mathrm{e}_i + B$$

für $i \in [1, n]$ und also $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_{A/B}$.
Wir erhalten

$$\varphi'(\varphi(g_i G^{(1)})) \;=\; \varphi'(\mathrm{e}_i + B) \;=\; g_i G^{(1)}$$

für $i \in [1, n]$ und also $\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_{G/G^{(1)}}$.
Also ist φ ein Gruppenisomorphismus mit $\varphi' = \varphi^{-}$.
Ad (2). Es ist $\mathrm{D}_8 = \langle a, b \,:\, a^4, b^2, (ab)^2 \rangle$.
Gemäß (1) ist

$$\mathrm{D}_8/\mathrm{D}_8^{(1)} \;=\; \mathbb{Z}^{2\times 1}/\langle \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \rangle \;=\; \mathbb{Z}^{2\times 1}/\langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \rangle \;\simeq\; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \;\simeq\; \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2 \,.$$

Hausaufgabe 20 (A23) Sei G eine Gruppe.
Sei $\mathrm{Aut}(G) := \{\, \sigma \in \mathrm{S}_G \;:\; \sigma \text{ ist ein Gruppenmorphismus} \,\}$ die Menge der Automorphismen von G.
Sei $\mathrm{Inn}(G) := \{\, \sigma \in \mathrm{Aut}(G) \,:\, \text{es gibt ein } x \in G \text{ mit } \sigma(g) = {}^x g \text{ für } g \in G \,\}$ die Menge der inneren Automorphismen von G.

(1) Man zeige: $\operatorname{Inn}(G) \trianglelefteqslant \operatorname{Aut}(G) \leqslant \mathrm{S}_G$.

Sei $\operatorname{Out}(G) := \operatorname{Aut}(G)/\operatorname{Inn}(G)$ die äußere Automorphismengruppe von G.

(2) Man finde einen Gruppenisomorphismus $G/\mathrm{Z}(G) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Inn}(G)$.

(3) Man bestimme $\operatorname{Out}(\mathrm{S}_3)$.

(4) Man bestimme $\operatorname{Out}(\mathrm{D}_8)$.

Lösung.

Ad (1). Da Gruppenmorphismen zu Gruppenmorphismen komponieren und da das Inverse eines Gruppenisomorphismus wieder ein Gruppenisomorphismus ist, ist $\operatorname{Aut}(G) \leqslant \mathrm{S}_G$.

Für $g \in G$ schreiben wir $\beta_g : G \to G$, $x \mapsto {}^g x$. Es ist $\operatorname{Inn}(G) = \{\, \beta_g \,:\, g \in G \,\}$.

Wir haben den Gruppenmorphismus $\beta : G \to \operatorname{Aut}(G)$, $g \mapsto \beta_g$, da sich

$$\beta_{gh}(x) \;=\; {}^{gh}x \;=\; {}^{g}({}^{h}x) \;=\; (\beta_g \circ \beta_h)(x)$$

für $g,\, h \in G$ und $x \in G$ ergibt, also $\beta_{gh} = \beta_g \circ \beta_h$.

Nun ist $\operatorname{Inn}(G) = \operatorname{Im}(\beta) \leqslant \operatorname{Aut}(G)$.

Wir zeigen $\operatorname{Inn}(G) \overset{!}{\trianglelefteqslant} \operatorname{Aut}(G)$. Sei $\alpha \in \operatorname{Aut}(G)$. Sei $g \in G$. Es wird

$$({}^{\alpha}\beta_g)(x) \;=\; \alpha(\beta_g(\alpha^-(x))) \;=\; \alpha({}^{g}\alpha^-(x)) \;=\; {}^{\alpha(g)}\alpha(\alpha^-(x)) \;=\; {}^{\alpha(g)}x \;=\; \beta_{\alpha(g)}(x)$$

für $x \in G$, also ${}^{\alpha}\beta_g = \beta_{\alpha(g)} \in \operatorname{Inn}(G)$.

Ad (2). Wir haben den Gruppenmorphismus

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\beta} & \operatorname{Aut}(G) \\ g & \mapsto & \beta_g\,. \end{array}$$

Dieser hat Bild $\operatorname{Inn}(G)$.

Sein Kern ist

$$\{\, g \in G \,:\, \beta_g = \mathrm{id}_G \,\} = \{\, g \in G \,:\, {}^g x = x \text{ für } x \in G \,\} = \mathrm{Z}(G)\,.$$

Also haben wir den Gruppenisomorphismus

$$\begin{array}{ccc} G/\mathrm{Z}(G) & \underset{\sim}{\xrightarrow{\bar\beta}} & \operatorname{Inn}(G) \\ g\mathrm{Z}(G) & \mapsto & \beta_g\,. \end{array}$$

Ad (3). Es ist $\mathrm{Z}(\mathrm{S}_3) = 1$, da S_3 nur die abelschen Normalteiler 1 und A_3 hat und da ${}^{(2,3)}(1,2,3) = (1,3,2) \neq (1,2,3)$, weswegen $\mathrm{Z}(\mathrm{S}_3) = 1$ ist.

Mit (2) ist also $|\operatorname{Inn}(\mathrm{S}_3)| = |\mathrm{S}_3/\mathrm{Z}(\mathrm{S}_3)| = 6$.

Behauptung: Es ist $\operatorname{Out}(\mathrm{S}_3) = 1$.

Dazu genügt es zu zeigen: Es ist $|\operatorname{Aut}(\mathrm{S}_3)| \overset{!}{\leqslant} 6$.

Da $\mathrm{S}_3 = \langle (1,2), (2,3) \rangle$, ist ein Automorphismus von S_3 durch die Bilder dieser beiden Erzeuger festgelegt.

Ein Automorphismus α von S_3 hat jedes Element von S_3 von Ordnung 2 auf ein Element von S_3 von Ordnung 2 abzubilden.

Also ist $\alpha(\,(1,2)\,) \in \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$.

Ferner ist $\alpha(\,(2,3)\,) \in \{(1,2), (1,3), (2,3)\} \smallsetminus \{\alpha(\,(1,2)\,)\}$.

Somit gibt es für α höchstens 6 Möglichkeiten, diese beiden Erzeuger abzubilden. Also ist $|\operatorname{Aut}(\mathrm{S}_3)| \leqslant 6$.

Das zeigt die *Behauptung*.

Ad (4). Es ist $\mathrm{D}_8 = \langle a, b \,:\, a^4, b^2, (ab)^2 \rangle$.

Es ist $|\mathrm{D}_8| = 8$ und $\mathrm{D}_8 = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$.

Es ist $\mathrm{Z}(\mathrm{D}_8) = \langle a^2 \rangle$ und also $|\mathrm{Z}(\mathrm{D}_8)| = 2$.

Unter den Elementen von D_8 haben a und a^3 die Ordnung 4, es hat 1 die Ordnung 1 und es haben a^2, ab, a^2b und a^3b die Ordnung 2.

Ein Automorphismus von D_8 bildet zwingend a auf a oder auf a^3 ab.

Ferner bildet er zwingend b auf b, ab, a^2b oder a^3b ab. Denn er kann b nicht auf a^2 abbilden, da $\mathrm{Z}(\mathrm{D}_8) \trianglelefteq \mathrm{D}_8$ und da $b \notin \mathrm{Z}(\mathrm{D}_8)$, aber $a^2 \in \mathrm{Z}(\mathrm{D}_8)$.

Somit gibt es höchstens 8 Automorphismen von D_8 .

Es ist $|\operatorname{Inn}(\mathrm{D}_8)| = |\mathrm{D}_8|/|\mathrm{Z}(\mathrm{D}_8)| = 4$.

Somit ist $|\operatorname{Aut}(\mathrm{D}_8)| = 4$ oder $|\operatorname{Aut}(\mathrm{D}_8)| = 8$.

Es gibt den Automorphismus $\alpha \in \operatorname{Aut}(\mathrm{D}_8)$, der a auf a und b auf ab abbildet, und dieser ist nicht inner; vgl. Beispiel 57.

Also ist $|\operatorname{Aut}(\mathrm{D}_8)| = 8$. Folglich ist $|\operatorname{Out}(\mathrm{D}_8)| = |\operatorname{Aut}(\mathrm{D}_8)/\operatorname{Inn}(\mathrm{D}_8)| = 2$.

Daher ist $\operatorname{Out}(\mathrm{D}_8) \simeq \mathrm{C}_2$.