M. Künzer

Gruppentheorie, SoSe 25

Lösung 1

Hausaufgabe 1

(1) Wir betrachten die S_3-Menge S_3 via Konjugation. Man bestimme die Bahnen.

(2) Wir betrachten die S_3-Menge S_3 via Linksmultiplikation. Man bestimme die Bahnen.

(3) Man finde eine Gruppe G und eine G-Menge M, welche 4 Bahnen paarweise unterschiedlicher Größe hat.

Lösung.
Zu (1). Es ist ${}^{\mathrm{S}_3}\mathrm{id} = \{\mathrm{id}\}$.
Es ist $(1,2)$ noch nicht aufgetreten. Es ist ${}^{\mathrm{S}_3}(1,2) = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$.
Es ist $(1,2,3)$ noch nicht aufgetreten. Es ist ${}^{\mathrm{S}_3}(1,2,3) = \{(1,2,3),(1,3,2)\}$.
Nun ist $\mathrm{S}_3 = {}^{\mathrm{S}_3}\mathrm{id} \sqcup {}^{\mathrm{S}_3}(1,2) \sqcup {}^{\mathrm{S}_3}(1,2,3)$. Also sind alle Bahnen gefunden.

Zu (2). Es ist $\mathrm{S}_3\,\mathrm{id} = \{\,\sigma\circ\mathrm{id} \,:\, \sigma\in\mathrm{S}_3\,\} = \mathrm{S}_3$ die einzige Bahn.

Zu (3). Sei e.g. $G = \langle (2,3),(4,5,6),(7,8,9,10)\rangle \leqslant \mathrm{S}_{10}$ und $M = [1,10]$. Die Bahnenzerlegung ist

$$[1,10] \;=\; \{1\}\sqcup\{2,3\}\sqcup\{4,5,6\}\sqcup\{7,8,9,10\}\;.$$

Hausaufgabe 2 (A2)

(1) Sei I eine Menge. Sei G_i eine Gruppe für $i\in I$. Man zeige, daß das cartesische Produkt $G := \prod_{i\in I} G_i$ mit der Multiplikation $(g_i)_i\cdot(g'_i)_i := (g_i\cdot g'_i)_i$ für $(g_i)_i\,,\ (g'_i)_i\in G$ eine Gruppe wird, genannt das *(äußere) direkte Produkt* der Gruppen G_i für $i\in I$.

(2) Für $n\geqslant 0$ und eine Gruppe G schreiben wir $G^{\times n} := \prod_{i\in[1,n]} G$, mit $G^{\times 0} = 1$. Betrachte den Gruppenmorphismus $\delta : G\to G\times G$, $g\mapsto (g,g)$. Unter welcher Bedingung an G ist $\delta(G)\trianglelefteqslant G\times G$?

(3) Sei G eine Gruppe. Sei $n\geqslant 0$. Seien $U_i\leqslant G$ für $i\in[1,n]$.
Sei $[u_i\,,\,u_j] = 1$ für $i,\,j\in[1,n]$ mit $i\neq j$ und $u_i\in U_i\,,\ u_j\in U_j$.
Man zeige, daß dann der Gruppenmorphismus $\prod_{i\in[1,n]} U_i\to G$, $(u_i)_i\mapsto u_1\cdot\ldots\cdot u_n$ existiert.
Wann ist dieser injektiv?

(4) Sei G eine Gruppe. Seien $N\trianglelefteqslant G$ und $M\trianglelefteqslant G$. Sei $N\cap M = 1$ und $NM = G$. Man zeige die Existenz des Gruppenisomorphismus $N\times M \xrightarrow{\sim} G$, $(n,m)\mapsto nm$. Ist die Aussage noch richtig, wenn die Normalität der Untergruppe M nicht verlangt wird?

Lösung.
Zu (1). Seien $g := (g_i)_i\,,\ h := (h_i)_i\,,\ k := (k_i)_i\ \in G$ gegeben.
Es ist $(gh)k = ((g_i)_i(h_i)_i)(k_i)_i = (g_ih_i)_i(k_i)_i = (g_ih_ik_i)_i = (g_i)_i(h_ik_i)_i = (g_i)_i((h_i)_i(k_i)_i) = g(hk)$.
Es ist $1_G = (1_{G_i})_i$, da dann $1_Gg = (1_{G_i})_i(g_i)_i = (1_{G_i}g_i)_i = (g_i)_i = g$ und $g1_G = (g_i)_i(1_{G_i})_i = (g_i1_{G_i})_i = (g_i)_i = g$ ist.
Es ist $g^- = (g_i^-)_i$, da $(g_i)_i(g_i^-)_i = (g_ig_i^-)_i = (1_{G_i})_i = 1_G$ und $(g_i^-)_i(g_i)_i = (g_i^-g_i)_i = (1_{G_i})_i = 1_G$ ist.

Zu (2). Wir behaupten, daß genau dann $\delta(G)\trianglelefteqslant G\times G$ ist, wenn G abelsch ist.
Ist G abelsch, so auch $G\times G$, so daß aus $\delta(G)\leqslant G\times G$ als Bild eines Gruppenmorphismus bereits $\delta(G)\trianglelefteqslant G\times G$ folgt.

Sei umgekehrt $\delta(G) \trianglelefteq G \times G$. Für $x,\, g \in G$ ist dann ${}^{(x,1)}\delta(g) \in \delta(G)$, also $({}^{x}g, g) \in \delta(G)$, also ${}^{x}g = g$, also $xg = gx$. Somit ist G abelsch.

Zu (3). Die Abbildung $f : \prod_{i\in[1,n]} U_i \to G$, $(u_i)_i \mapsto u_1 \cdots u_n$ existiert. Es ist zu zeigen, daß f ein Gruppenmorphismus ist. Seien $(u_i)_i\, ,\, (v_i)_i \in \prod_{i\in[1,n]} U_i$ gegeben. Dann wird

$$\begin{array}{rcl} f((u_i)_i(v_i)_i) & = & f((u_i v_i)_i) \\ & = & u_1v_1u_2v_2u_3v_3\cdots u_nv_n \\ & = & u_1u_2v_1v_2u_3v_3\cdots u_nv_n \\ & = & u_1u_2u_3v_1v_2v_3\cdots u_nv_n \\ & \vdots & \\ & = & u_1u_2u_3\cdots u_nv_1v_2v_3\cdots v_n \\ & = & f((u_i)_i)f((v_i)_i)\ . \end{array}$$

Ferner ist zunächst f injektiv genau dann, wenn $\mathrm{Kern}(f) = 1$ ist.
Sei $\mathrm{Kern}(f) = 1$. Für $(u_i)_i \in \prod_{i\in[1,n]} U_i$ folgt also aus $u_1u_2\cdots u_n = 1$, daß $u_1 = 1$ ist. Dies erzwingt $U_1 \cap (U_2\cdots U_n) = 1$. Ist $u_1 = 1$, so muß aus $u_2u_3\cdots u_n = 1$ folgen, daß $u_2 = 1$ ist. Dies erzwingt $U_2 \cap (U_3\cdots U_n) = 1$. Und so fort. Es ist also $U_j \cap (U_{j+1}\cdots U_n) = 1$ für alle $j \in [1, n-1]$.
Sei umgekehrt $U_j \cap (U_{j+1}\cdots U_n) = 1$ für alle $j \in [1, n-1]$. Sei $(u_i)_i \in \prod_{i\in[1,n]} U_i$ mit $u_1u_2\cdots u_n = 1$ gegeben. Dann ist $u_1 = u_2^-\cdots u_n^- \in U_1 \cap (U_2\cdots U_n) = 1$, mithin $u_1 = 1$. Nun ist $u_2 = u_3^-\cdots u_n^- \in U_2 \cap (U_3\cdots U_n) = 1$, mithin $u_2 = 1$. Und so fort. Es ist also $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 1$. Folglich ist $\mathrm{Kern}(f) = 1$.

Zu (4). Gemäß (3) genügt es für $f : N \times M \to G$, $(n,m) \mapsto nm$ Gruppenmorphismus zu zeigen, daß $[N, M] \stackrel{!}{=} 1$ ist. Ist $n \in N$ und $m \in M$, so ist aber sowohl $[n,m] = n^-(m^-nm) \in N$ als auch $[n,m] = (n^-m^-n)m \in M$. Folglich ist $[n,m] \in N \cap M = 1$.
Da $NM = G$, ist f auch surjektiv.
Insgesamt ist f ein Gruppenisomorphismus.

Wird die Normalität von M nicht verlangt, so zeigt das Beispiel $G = \mathrm{S}_3$, $N = \langle(1,2,3)\rangle$ und $M = \langle(1,2)\rangle$, daß diesenfalls f kein Gruppenmorphismus zu sein braucht, denn hier bildet f das Produkt $(\mathrm{id}, (1,2))((1,2,3), \mathrm{id}) = ((1,2,3), (1,2))$ auf $(1,2,3)\circ(1,2) = (1,3)$ ab, wohingegen das Produkt der Bilder der Faktoren gleich $(1,2)\circ(1,2,3) = (2,3)$ wird.

Hausaufgabe 3

Sei G eine Gruppe. Seien G-Mengen M und N und eine G-Abbildung $M \xrightarrow{f} N$ gegeben.
Wir schreiben $\bar{M}$ und $\bar{N}$ für die jeweilige Menge der Bahnen.

(1) Man zeige die Wohldefiniertheit der Abbildung $\bar{f} : \bar{M} \to \bar{N}$, $Gm \mapsto \bar{f}(Gm) := Gf(m)$.

(2) Man zeige: Ist f surjektiv, dann auch $\bar{f}$.

(3) Man zeige: Ist f injektiv, dann auch $\bar{f}$.

Lösung.
Zu (1). Zu zeigen ist die Unabhängigkeit von der Repräsentantenwahl. Seien $m,\, \tilde{m} \in M$ mit $Gm = G\tilde{m}$ gegeben. Zu zeigen ist $Gf(m) \stackrel{!}{=} Gf(\tilde{m})$.
Wir wählen $g \in G$ mit $gm = \tilde{m}$. Dann wird $g \cdot f(m) = f(g\cdot m) = f(\tilde{m})$ und also $Gf(m) = Gf(\tilde{m})$.

Zu (2). Sei f surjektiv. Sei $n \in N$ vorgegeben. Wir haben zu zeigen, daß Gn im Bild von $\bar{f}$ liegt.
Da f surjektiv ist, können wir $m \in M$ wählen mit $f(m) = n$. Also ist $\bar{f}(Gm) = Gf(m) = Gn$.

Zu (3). Sei f injektiv. Seien $m,\, \tilde{m} \in M$ gegeben mit $\bar{f}(Gm) = \bar{f}(G\tilde{m})$. Wir haben $Gm \stackrel{!}{=} G\tilde{m}$ zu zeigen.
Es ist $Gf(m) = \bar{f}(Gm) = \bar{f}(G\tilde{m}) = Gf(\tilde{m})$. Wir wählen ein $g \in G$ mit $gf(m) = f(\tilde{m})$. Es folgt $f(gm) = gf(m) = f(\tilde{m})$. Da f injektiv ist, liefert dies $gm = \tilde{m}$. Es folgt $Gm = G\tilde{m}$.

Hausaufgabe 4 (A4) Seien G und H Gruppen.
Sei $M = (M, \alpha)$ eine G-Menge. Sei $N = (N, \beta)$ eine H-Menge. Als G-Menge sei G mit der Konjugation ausgestattet. Man zeige.

(1) Es ist $M \times N$ eine $(G \times H)$-Menge via $(g, h) \cdot (m, n) := (gm, hn)$ für $g \in G$, $h \in H$, $m \in M$, $n \in N$.

(2) Es ist ${}_{\text{Abb}}(M, N)$ eine $(G \times H)$-Menge via $((g, h)f)(m) := h\,f(g^- m)$ für $g \in G$, $h \in H$, $f \in {}_{\text{Abb}}(M, N)$.

(3) Die Menge der Untergruppen von G ist eine G-Menge.

(4) Es ist $\text{Pot}(M)$ eine G-Menge. Ist Ω eine G-Teilmenge von $\text{Pot}(M)$, dann auch die Menge Ω_{max} der maximalen Elemente von Ω.

Lösung.
Zu (1). Es ist $1_{G\times H} \cdot (m, n) = (1, 1) \cdot (m, n) = (1 \cdot m, 1 \cdot n) = (m, n)$ für $(m, n) \in M \times N$.
Es ist $(g, h)((g', h')(m, n)) = (g, h)(g'm, h'n) = (gg'm, hh'n) = (gg', hh')(m, n) = ((g, h)((g', h'))(m, n)$ für (g, h), $(g', h') \in G \times H$ und $(m, n) \in M \times N$.

Zu (2). Für $f \in {}_{\text{Abb}}(M, N)$ ist $(1_{G\times H} \cdot f)(m) = 1_H \cdot f(1_G^- \cdot m) = f(m)$ für $m \in M$ und also $1_{G\times H} \cdot f = f$.
Für $f \in {}_{\text{Abb}}(M, N)$ und (g, h), $(g', h') \in G \times H$ wird

$$\begin{aligned}((g, h)((g', h')f))(m) &= h((g', h')f)(g^- m)\\ &= hh'f(g'^- g^- m)\\ &= hh'f((gg')^- m)\\ &= ((gg', hh')f)(m)\\ &= (((g, h)(g', h'))f)(m)\end{aligned}$$

für $m \in M$ und also

$$(g, h)((g', h')f) = (g, h)(g', h')f\ .$$

Zu (3). Für $U \leqslant G$ und $g \in G$ sei ${}^gU := g \cdot U \cdot g^-$.
Da die Konjugation mit g ein Automorphismus von G ist, ist ${}^gU \leqslant G$.
Es wird ${}^1U = 1 \cdot U \cdot 1^- = U$.
Für g, $h \in G$ wird

$${}^g({}^hU) = g \cdot (h \cdot U \cdot h^-) \cdot g^- = (g \cdot h) \cdot U \cdot (g \cdot h)^- = {}^{(g\cdot h)}U\ .$$

Zu (4). Wir betrachten die G-Menge $\text{Pot}(M)$. Für $N \in \text{Pot}(M)$, also $N \subseteq M$, und $g \in G$ ist

$$g \cdot N = \{ gn : n \in N \} \subseteq M\ .$$

Darin liegt die G-Teilmenge $\Omega \subseteq \text{Pot}(M)$. Wir wollen zeigen, daß Ω_{max} eine G-Teilmenge von Ω ist. Zu zeigen ist hierzu, daß für eine Menge $M' \in \Omega_{\text{max}}$ und ein Element $g \in G$ auch die Menge gM' in Ω_{max} liegt.
Annahme, es gibt ein $M'' \in \Omega$ mit $gM' \subset M''$. Dann ist $M' = g^- gM' \subset g^- M''$ und $g^- M'' \in \Omega$. Somit ist M' nicht maximal in Ω, im *Widerspruch* zur Voraussetzung.