

Cher Deligne,

Étant peut-être empêché par ma jambe d'assurer un cours de 1<sup>er</sup> cycle au 1<sup>er</sup> trimestre, je vais peut-être à la place faire un petit séminaire d'algèbre, et envisage de le faire sur les fourbis de Mme Sinh, éventuellement transposés dans le contexte des "champs". À ce propos, je tombe sur le truc suivant, qui pour l'instant reste heuristique. Si  $M, N$  sont deux faisceaux abéliens sur un topos  $X$ , et  $\tau_{\leq 2} \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}(M, N) = E(M, N)$  est le complexe ayant les invariants

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{H}}^i = \underline{\mathrm{Ext}}^i(M, N) & \text{pour } 0 \leq i \leq 2 \\ \underline{\mathbf{H}}^i = 0 & \text{si } i \notin [0, 2], \end{cases}$$

il doit y avoir un triangle distingué canonique

$$(T) \quad \begin{array}{ccc} & \underline{\mathrm{Hom}}(M, {}_2N)[-2] & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ E(M, N) & \longrightarrow & E'(M, N), \end{array}$$

donc  $E'(M, N)$  est un complexe dont les invariants  $\underline{\mathbf{H}}^i$  sont ceux de  $E(M, N)$  en degré  $i \neq 2$ , et qui en degré 2 donne lieu à une suite exacte

$$(*) \quad 0 \rightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^2(M, N) \rightarrow \overbrace{\underline{\mathbf{H}}^2(E'(M, N))}^{P(M, N)} \xrightarrow{\sigma} \underline{\mathrm{Hom}}(M, {}_2N) \rightarrow 0.$$

Heuristiquement,  $E'(M, N)$  est le complexe qui exprime le "2-champ de Picard strict" formé des 1-champs de Picard (pas nécessairement stricts) "épinglés" par  $M, N$  sur des objets variables de  $X$ , en admettant que ta théorie pour les 1-champs de Picard stricts s'étend aux 2-champs de Picard stricts (ce qui pour moi ne fait guère de doute); de même  $E(M, N)$  correspond aux champs de Picard *stricts* épinglés par  $M, N$ . La suite exacte (\*) se construit en tous cas canoniquement "à la main", où le terme médian est le faisceau des classes à "équivalence" près des champs de Picard épinglés par  $M, N$ ,  $\sigma$  étant l'invariant qui s'obtient en associant à toute section  $L$  d'un champ de Picard la symétrie de  $L \otimes L$ , interprétée comme section de  ${}_2N$ . Je sais prouver (sauf erreur) que tout homomorphisme  $M \rightarrow {}_2N$  provient d'un champ de Picard convenable (épinglé par  $M, N$ ) (a priori l'obstruction est dans  $\mathrm{Ext}^3(X; M, N)$ , mais un argument "universel" prouve qu'elle est nulle). Cela prouve que l'extension (\*) est bien proche d'être splittée: toute section du troisième faisceaux, sur un objet quelconque de  $X$ , se remonte – en d'autres termes, l'extension a une section "ensembliste". Bien sûr, il y a mieux en fait: toute section sur un  $U \in \mathrm{Ob} X$  "provient" d'un élément de  $\mathcal{H}^2(U, E'(M, N))$  (hypercohomologie  $\mathcal{H}^2$ ).

*Exemple.* Soit  $\mathcal{A}$  un anneau sur  $X$ , soient  $M, N$  respectivement les faisceaux  $K^0, K^1$  associés au champ additif des  $\mathcal{A}$ -Modules projectifs de type fini (p. ex.). Alors la construction de Mme Sinh nous fournit un champ de Picard épinglé par  $M, N$ , d'où une section canonique du terme médian  $P(M, N)$  de (\*).

*NB.* Tout ce qui précède a les functorialités évidentes en  $M, N, X, \dots$

*Question:* Le triangle exact (T) et la suite exacte (\*) sont-ils connus par les compétences (Quillen, Breen, Illusie...)? Connaissent-ils des variantes “supérieures”? (Un principe “géométrique” pour les obtenir pourrait être via des  $n$ -champs de Picard non nécessairement stricts...)

Je profite de l'occasion pour soulever une question sur la “cohomologie relative”. Soit  $q : X \rightarrow Y$  un morphisme de topos. Si  $F$  est un faisceau abélien (ou un complexe d'iceux) sur  $Y$ , peut-on définir *fonctoriellement* en  $F$  la cohomologie relative  $R\Gamma(Y \text{ mod } X, F)$  (de la catégorie dérivée de  $\text{Ab}(Y)$  dans celle de  $\text{Ab}$ )? L'interprétation “géométrique” en termes d'opérations sur des  $n$ -champs de Picard ( $n$  “grand”) suggère que ça doit exister. Mais je ne vois de construction évidente “à la main” que dans les deux cas extrêmes :

- (a)  $q$  est “(-1)-acyclique”, i.e. pour tout  $F$  sur  $Y$ ,  $F \rightarrow q_*q^*F$  est injectif (*NB* C'est le cas de  $Y/P \rightarrow Y$  si  $P \rightarrow e_Y$  est un épimorphisme – c'est donc le cas de  $B_e \rightarrow B_G$  plus haut.)

On prend

$$R\Gamma(\text{Coker}(F \rightarrow \underbrace{q_*(C(q^*(F)))}_{\text{résolution injective}}))[-1] .$$

- (b)  $\forall F$  injectif sur  $Y$ ,  $q^*(F)$  est injectif et  $F \rightarrow q_*q^*F$  est un épimorphisme (exemple :  $q$  inclusion d'un ouvert  $U \hookrightarrow e_Y$ ). On prend

$$R\Gamma_Y(\text{Ker}(\underbrace{C(F) \rightarrow q_*q^*(C(F))}_{\text{résolution injective}})) .$$

Dans le cas général, la difficulté provient du fait que le cône d'un morphisme de complexes (tel que

$$F \rightarrow q_*(q^*(F)) \quad )$$

n'est pas fonctoriel (dans la catégorie dérivée) par rapport à la flèche dont on veut prendre le cône. Et pourtant, dans le cas particulier actuel, il devrait y avoir un choix fonctoriel. Est-ce évident ?

*Question pour Illusie :* Dans sa théorie des déformations de schémas en groupes plats, il tombe sur des  $H^3(B_G/X, -)$  resp. des  $\text{Ext}^2(X; -, =)$ . Peut-on court-circuiter sa théorie via la théorie (supposée écrite) des Gr-champs – resp. via ta théorie des champs de Picard? J'ai [**phrase incomplète**]

Je te signale que j'ai réfléchi aux Gr-champs sur  $X$ . Si  $G$  est un Groupe sur  $X$ ,  $N$  un  $G$ -Module, les Gr-champs sur  $X$  “épinglés par  $G, N$ ” forment a priori une 2-catégorie et même une 2-catégorie de Picard stricte, grâce à l'opération évidente à la Baer. On trouve que le complexe (de cochaînes) tronqué à l'échelon 2 qui lui correspond est le tronqué

$$\tau_{\leq 2}(R\Gamma(B_G \text{ mod } X, N)[1]) .$$

(*NB* la cohomologie de  $R\Gamma(B_G \text{ mod } X, N)$  commence en degré 1.) Plus géométriquement, un Gr-champ sur  $X$  épinglé par  $(G, N)$  est essentiellement “la même chose” qu'une 2-gerbe sur  $B_G$ , liée par  $N$ , et munie d'une trivialisatoin au dessus de  $X \approx B_e = (B_G)/P$  (où  $P$  est l'objet de  $B_G$  “torseur universel sous  $G$ ”). Ces 2-gerbes forment en fait une 3-catégorie de Picard a priori, mais il se trouve que dans celle-ci, les 3-flèches sont triviales (i.e. si source = but, ce

sont des identités) – cela ne fait qu’exprimer  $H^0(B_G/X, N) = 0$  (i.e.  $H^0(B_G, N) \rightarrow H^0(X, N)$  injectif...). Donc la 3-catégorie peut être regardée comme une 2-catégorie – et “c’est” celle des Gr-champs sur  $X$  épinglés par  $G, N$ . Si on veut localiser sur  $X$ , et décrire le 2-*champs* de Picard sur  $X$  des champs de Picard (sur des objets variables de  $X$ ) épinglés par  $G, N$ , on trouve qu’il est exprimé par le complexe

$$\tau_{\leq 2}(\mathbb{R} p_{G*} \text{Coker}(N \rightarrow \mathbb{R} q_{G*} \overbrace{C(q_G^* N)}^{\text{résolution injective}})),$$

où  $p_G : B_G \rightarrow X$  et  $q_G : B_e \approx X \simeq (B_G)_P \rightarrow B_G$ . Toutes ces descriptions étant compatibles avec des variations de  $G, N, X$ , cela donne en principe une description de la 2-catégorie des Gr-champs, avec  $X, G, N$  variables...