Lettre de Grothendieck à Deligne

7.8.74

Cher Deligne,

Étant peut-être empêché par mon jambe d'assurer un cours de 1er cycle au 1er trimestre, je vais peut-être à la place faire un petit séminaire d'algèbre, et envisage de le faire sur les fourbis de Mme Sinh, éventuellement transposés dans le contexte des "champs". À ce propos, je tombe sur le truc suivant, qui pour l'instant reste heuristique. Si M, N sont deux faisceaux abéliens sur un topos X, et $\tau_{\leqslant 2}\, \mathrm{R}\, \underline{\mathrm{Hom}}(M,N) = E(M,N)$ est le complexe ayant les invariants

$$\begin{cases} \underline{\mathrm{H}}^i &= \underline{\mathrm{Ext}}^i(M,N) \quad \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant 2 \\ \underline{\mathrm{H}}^i &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{si } i \notin [0,2]\ , \end{cases}$$

il doit y avoir un triangle distingué canonique

$$\text{(T)}\qquad \begin{tikzcd} & \underline{\mathrm{Hom}}(M,\, {}_2N)[-2] \arrow[dl] & \\ E(M,N) \arrow[rr] & & E'(M,N)\ , \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

donc $E'(M,N)$ est un complexe dont les invariants $\underline{\mathrm{H}}^i$ sont ceux de $E(M,N)$ en degré $i \neq 2$, et qui en degré 2 donne lieu à une suite exacte

$$(*)\qquad 0 \to \underline{\mathrm{Ext}}^2(M,N) \to \overbrace{\underline{\mathrm{H}}^2(E'(M,N))}^{P(M,N)} \xrightarrow{\sigma} \underline{\mathrm{Hom}}(M,\, {}_2N) \to 0\ .$$

Heuristiquement, $E'(M,N)$ est le complexe qui exprime le "2-champ de Picard strict" formé des 1-champs de Picard (pas nécessairement stricts) "épinglés" par M, N sur des objets variables de X, en admettant que ta théorie pour les 1-champs de Picard stricts s'étend aux 2-champs de Picard stricts (ce qui pour moi ne fait guère de doute) ; de même $E(M,N)$ correspond aux champs de Picard *stricts* épinglés par M, N. La suite exacte $(*)$ se construit en tous cas canoniquement "à la main", où le terme médian est le faisceau des classes à "équivalence" près des champs de Picard épinglés par M, N, or étant l'invariant qui s'obtient en associant à toute section L d'un champ de Picard la symétrie de $L \otimes L$, interprété comme section de ${}_2N$. Je sais prouver (sauf erreur) que tout homomorphisme $M \to {}_2N$ provient d'un champ de Picard convenable (épinglé par M, N) (a priori l'obstruction est dans $\mathrm{Ext}^3(X; M, N)$, mais un argument "universel" prouve qu'elle est nulle). Cela prouve que l'extension $(*)$ est bien proche d'être splittée : toute section du troisième faisceaux, sur un objet quelconque de X, se remonte – en d'autres termes, l'extension a une section "ensembliste". Bien sûr, il y a mieux en fait : toute section sur un $U \in \mathrm{Ob}\, X$ "provient" d'un élément de $\mathcal{H}^2(U, E'(M,N))$ (hypercohomologie $\mathcal{H}^2$).

Exemple. Soit $\mathcal{A}$ un anneau sur X, soient M, N respectivement les faisceaux K^0, K^1 associés au champ additif des $\mathcal{A}$-Modules projectifs de type fini (p. ex.). Alors la construction de Mme Sinh nous fournit un champ de Picard épinglé par M, N, d'où une section canonique du terme médian $P(M,N)$ de $(*)$.

NB. Tout ce qui précède a les fonctorialités évidentes en M, N, X, ...

Question. Le triangle exact (T) et la suite exacte $(*)$ sont-ils connus par les compétences (Quillen, Breen, Illusie ...) ? Connaissent-ils des variantes "supérieures" ? (Un principe "géométrique" pour les obtenir pourrait être via des n-champs de Picard non nécessairement stricts ...)

Je profite de l'occasion pour soulever une question sur la "cohomologie relative". Soit $q : X \to Y$ un morphisme de topos. Si F est un faisceau abélien (ou un complexe d'iceux) sur Y, peut-on définir *fonctoriellement* en F la cohomologie relative $\mathrm{R}\,\Gamma(Y \bmod X, F)$ (de la catégorie dérivée de $\mathrm{Ab}(Y)$ dans celle de Ab) ? L'interprétation "géométrique" en termes d'opérations sur des n-champs de Picard (n "grand") suggère que ça doit exister. Mais je ne vois de construction évidente "à la main" que dans les deux cas extrêmes :

(a) q est "(-1)-acyclique", i.e. pour tout F sur Y, $F \to q_*q^*F$ est injectif (*NB* C'est le cas de $Y/P \to Y$ si $P \to e_Y$ est un épimorphisme – c'est donc le cas de $\mathrm{B}_e \to \mathrm{B}_G$ plus haut.)

On prend

$$\mathrm{R}\,\Gamma(\mathrm{Coker}(F \to q_*(\underbrace{C(q^*(F))}_{\text{résolution injective}}))[-1]) \,.$$

(b) $\forall$ F injectif sur Y, $q^*(F)$ est injectif et $F \to q_*q^*F$ est un épimorphisme (exemple : q inclusion d'un ouvert $U \hookrightarrow e_Y$). On prend

$$\mathrm{R}\,\Gamma_Y(\mathrm{Ker}(\underbrace{C(F)}_{\text{résolution injective}} \to q_*q^*(C(F)))) \,.$$

Dans le cas général, la difficulté provient du fait que le cône d'un morphisme de complexes (tel que

$$F \;\to\; q_*(q^*(F)) \qquad\qquad)$$

n'est pas fonctoriel (dans la catégorie dérivée) par rapport à la flèche dont on veut prendre le cône. Et pourtant, dans le cas particulier actuel, il devrait y avoir un choix fonctoriel. Est-ce évident ?

Question pour Illusie : Dans sa théorie des déformations de schémas en groupes plats, il tombe sur des $\mathrm{H}^3(\mathrm{B}_G/X, -)$ resp. des $\mathrm{Ext}^2(X; -, =)$. Peut-on court-circuiter sa théorie via la théorie (supposée écrite) des Gr-champs – resp. via ta théorie des champs de Picard ? J'ai `[phrase incomplète]`

Je te signale que j'ai réfléchi aux Gr-champs sur X. Si G est un Groupe sur X, N un G-Module, les Gr-champs sur X "épinglés par G, N" forment a priori une 2-catégorie et même une 2-catégorie de Picard stricte, grâce à l'opération évidente à la Baer. On trouve que le complexe (de cochaînes) tronqué à 1 échelon à qui lui correspond est le tronqué

$$\tau_{\leqslant 2}(\mathrm{R}\,\Gamma(\mathrm{B}_G \bmod X, N)[1]) \,.$$

(*NB* la cohomologie de $\mathrm{R}\,\Gamma(\mathrm{B}_G \bmod X, N)$ commence en degré 1.) Plus géométriquement, un Gr-champ sur X épinglé par (G, N) est essentiellement "la même chose" qu'une 2-gerbe sur B_G, liée par N, et munie d'une trivialisation au dessus de $X \approx \mathrm{B}_e = (\mathrm{B}_G)/P$ (où P est l'objet de B_G "torseur universel sous G"). Ces 2-gerbes forment en fait une 3-catégorie de Picard a priori, mais il se trouve que dans celle-ci, les 3-flèches sont triviales (i.e. si source = but, ce sont des identités) – cela ne fait qu'exprimer $\mathrm{H}^0(\mathrm{B}_G/X,N)=0$ (i.e. $\mathrm{H}^0(\mathrm{B}_G,N)\to\mathrm{H}^0(X,N)$ injectif…). Donc la 3-catégorie peut être regardée comme une 2-catégorie – et "c'est" celle des Gr-champs sur X épinglés par G, N. Si on veut localiser sur X, et décrire le 2-*champs* de Picard sur X des champs de Picard (sur des objets variables de X) épinglés par G, N, on trouve qu'il est exprimé par le complexe

$$\tau_{\leqslant 2}(\mathrm{R}\,p_{G*}\,\mathrm{Coker}(N\to\mathrm{R}\,q_{G*}\overbrace{C(q_G^*N)}^{\text{résolution injective}}))\ ,$$

où $p_G:\mathrm{B}_G\to X$ et $q_G:\mathrm{B}_e\approx X\simeq(\mathrm{B}_G)_P\to\mathrm{B}_G$. Toutes ces descriptions étant compatibles avec des variations de G, N, X, cela donne en principe une description de la 2-catégorie des Gr-champs, avec X, G, N variables…