Verfasser: Veronika Kollmann

……

Einführung der zentrischen Streckung

Zusammenfassung:

Wie können Schülerinnen und Schüler einer Klasse 9 an das Thema „zentrische Streckung“ herangeführt werden? Welche Fragen und Aufgaben führen zur Definition der zentrischen Streckung? Auf welche Weise sollten die Eigenschaften der zentrischen Streckung im Unterricht erarbeitet werden?

Vorliegende Abhandlung setzt sich schwerpunktmäßig mit Fragen der didaktischen Reduktion im Zusammenhang mit der Einführung der zentrischen Streckung in einer Klasse 9 auseinander. Ausgehend von einer Sachanalyse werden Fragen zur didaktischen Reduktion im Zusammenhang mit dem Vergleich von Schulbüchern analysiert. Es folgt die Darstellung und Reflexion der Erprobung des Unterrichtseinstiegs.

1. Sachanalyse

1.1 Die zentrische Streckung in der affinen und der analytischen Geometrie

In der affinen Geometrie wird die zentrische Streckung wie folgt definiert:

Definition: Die **zentrische Streckung** ist eine **Dilatation mit genau einem Fixpunkt**.

Die zentrische Streckung wird also auf den Begriff der Dilatation zurückgeführt. Im Folgenden wird zunächst der Begriff Dilatation mit Hilfe des Begriffs Kollineation definiert:

Kollineationen sind geradentreue, bijektive Abbildungen der affinen Ebene auf sich selbst. Unter Geradentreue verstehen wir folgende Eigenschaft: Sind die Punkte A, B und C kollinear, dann gilt dies auch für ihre Bildpunkte A‘, B‘ und C‘. Damit liegen alle Punkte einer Geraden g wieder auf einer Geraden g‘, der Bildgeraden von g.

Kollineationen, bei denen Bild- und Urbildgeraden parallel sind, werden als Dilatationen bezeichnet. Aus der Parallelität von Bild- und Urbildgerade folgt unmittelbar die Parallelentreue.[1]

Folgende Eigenschaften von Dilatationen lassen sich mithilfe der Definition und des Parallelenaxioms nachweisen[2]:

[1] Parallele Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet. Damit ist jede Dilatation parallelentreu. Die Umkehrung gilt nicht, wie man am Beispiel einer Drehung mit Drehwinkel $\propto \neq 180°$ leicht erkennen kann.
[2] [Krauter], S. 171ff

Verfasser: Veronika Kollmann

- Eine Gerade durch einen Punkt P und seinen Bildpunkt P‘ wird auf sich abgebildet, ist also eine Fixgerade.
- Eine Dilatation, die nicht die Identität ist, hat entweder keinen oder genau einen Fixpunkt.

Aus der Definition der zentrischen Streckung als Dilatation mit genau einem Fixpunkt folgen unmittelbar folgende **Eigenschaften der zentrischen Streckung:**

I. Die zentrische Streckung ist geradentreu, da sie eine Kollineation ist.
II. Die zentrische Streckung bildet Geraden auf parallele Geraden ab und ist damit auch parallelentreu.
III. Die zentrische Streckung hat genau einen Fixpunkt. Er wird Zentrum Z genannt.
IV. Die Geraden durch dieses Zentrum Z (und nur diese) sind Fixgeraden.[3]
V. Der Bildpunkt P‘ eines Punktes P liegt auf der Geraden ZP.

Mit Hilfe dieser Eigenschaften lassen sich Bildpunkte konstruieren, sobald das Zentrum und ein Punktepaar (A; A‘) gegeben sind:

Der Bildpunkt von B liegt sowohl auf der Fixgeraden ZB als auch auf der Parallelen zu AB durch A‘ (Abb. 1).

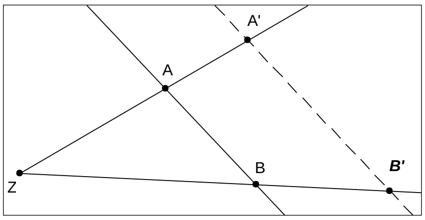


Abb. 1: B‘ ist der Schnittpunkt von ZB mit der Parallelen zu AB durch A‘

Betrachten wir die zentrische Streckung aus dem Blickwinkel der analytischen Geometrie, können wir ergänzend zu den Eigenschaften I – V folgende **charakterisierende Streckungseigenschaft** formulieren und beweisen:

Satz: Ist eine zentrische Streckung festgelegt durch ein Streckzentrum Z und ein Punktepaar (A; A‘), dann gibt es ein $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $\overrightarrow{ZA'} = k \cdot \overrightarrow{ZA}$, $\overrightarrow{ZB'} = k \cdot \overrightarrow{ZB}$ und $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ für alle Punkte B der Ebene.

Das heißt: Bei einer zentrischen Streckung werden alle Vektoren $\overrightarrow{AB}$ mit demselben Streckfaktor $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gestreckt.

Beweis: Nach Eigenschaft V liegen die Bildpunkte A‘ und B‘ auf den Geraden ZA bzw. ZB. Es gibt also reelle Zahlen k_1 und k_2 ($k_1, k_2 \neq 0$) mit $\overrightarrow{ZA'} = k_1 \cdot \overrightarrow{ZA}$ und $\overrightarrow{ZB'} = k_2 \cdot \overrightarrow{ZB}$.

Nach Eigenschaft II liegt der Bildpunkt B‘ auf einer Geraden durch A‘, die parallel zu AB verläuft. Daher gibt es eine reelle Zahl k_3 ($k_3 \neq 0$) mit $\overrightarrow{A'B'} = k_3 \cdot \overrightarrow{AB}$.

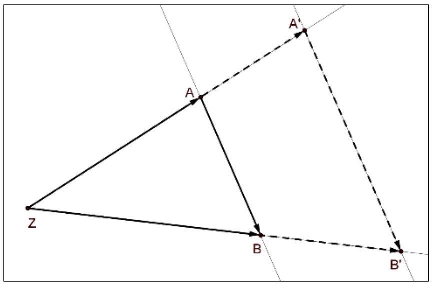


Abb. 2: Zentrische Streckung von Vektoren

[3] Aus der Annahme einer weiteren Fixgeraden, die nicht durch das Zentrum verläuft, folgt im Widerspruch zur Definition der zentrischen Streckung unmittelbar die Existenz weiterer Fixpunkte.

Zu zeigen ist $k_1 = k_2 = k_3$.

Es gilt: $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = \mathrm{k_3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathrm{k_3}(\overrightarrow{\mathrm{ZB}} - \overrightarrow{\mathrm{ZA}})$ und $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = \overrightarrow{\mathrm{ZB'}} - \overrightarrow{\mathrm{ZA'}} = \mathrm{k_2}\overrightarrow{\mathrm{ZB}} - \mathrm{k_1}\overrightarrow{\mathrm{ZA}}$.

Daraus folgt: $\mathrm{k_3}(\overrightarrow{\mathrm{ZB}} - \overrightarrow{\mathrm{ZA}}) = \mathrm{k_2}\overrightarrow{\mathrm{ZB}} - \mathrm{k_1}\overrightarrow{\mathrm{ZA}}$, also: $(\mathrm{k_1} - \mathrm{k_3})\overrightarrow{\mathrm{ZA}} + (\mathrm{k_3} - \mathrm{k_2})\overrightarrow{\mathrm{ZB}} = \vec{0}$ (*)

Fall 1: Sind Z, A und B nicht kollinear, die Vektoren $\overrightarrow{\mathrm{ZA}}$ und $\overrightarrow{\mathrm{ZB}}$ also linear unabhängig, so folgt aus (*): $\mathrm{k_1} - \mathrm{k_3} = \mathrm{k_3} - \mathrm{k_2} = 0$ und damit $\mathrm{k_1} = \mathrm{k_2} = \mathrm{k_3}$. Diesen gemeinsamen Streckfaktor bezeichnen wir mit k.

Fall 2 (Z, A und B kollinear) lässt sich mithilfe eines weiteren Punktes C, der nicht auf $\mathrm{ZA} = \mathrm{ZB}$ liegt, auf den Fall 1 zurückführen.

1.2 Die Definition der zentrischen Streckung und ihre Eigenschaften in der Schulmathematik

Die Definition der zentrischen Streckung als Dilatation mit genau einem Fixpunkt unterscheidet sich deutlich von der üblichen Schuldefinition[4]:

Eine zentrische Streckung wird festgelegt durch das Streckzentrum Z und den positiven Streckfaktor k[5].

Zu einem Punkt erhältst du den Bildpunkt wie folgt:

(1) Wenn der Punkt P nicht mit dem Streckzentrum Z zusammenfällt, dann erhält man den Bildpunkt P' wie folgt:
……(a) Zeichne die Halbgerade ZP
(b) Zeichne den Punkt P' auf der Halbgeraden ZP so, dass gilt: $|ZP'| = k \cdot |ZP|$

(2) Der Bildpunkt Z' von Z fällt mit Z zusammen: $Z' = Z$.

Die Schuldefinition greift Eigenschaft V auf und ergänzt die Streckungsbedingung: Die Abstände aller Punkte von Zentrum werden mit demselben Faktor gestreckt.

[4] [Griesel], S. 16
[5] Für negative Streckfaktoren wird die Definition anschließend noch erweitert: Streckung von Z aus mit |k| und anschließende Punktspiegelung an Z.

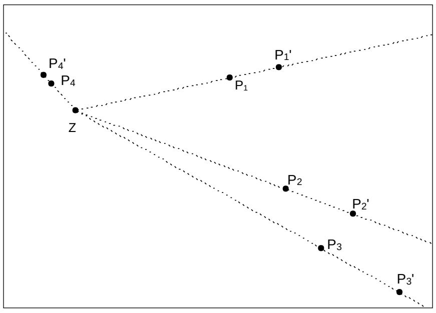


Abb. 3: k = 1,32

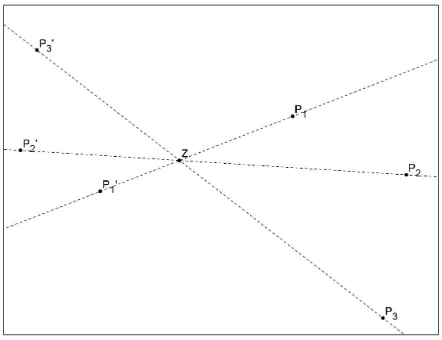


Abb. 4: k = -0,7

Die Eigenschaften I (Geradentreue) und II (Bildgerade ist parallel zur Urbildgeraden) folgen aus der Schuldefinition nicht offensichtlich. Wie können diese mit den Mitteln der Elementargeometrie bewiesen werden? Die Antwort hängt davon ab, ob die Strahlensätze bereits zur Verfügung stehen oder nicht.

1.2.1 Beweis der Eigenschaften der zentrischen Streckung mithilfe der Strahlensätze

Im Folgenden sollen die Eigenschaften I und II zunächst auf der Basis der Strahlensätze bewiesen werden:[6]

Zeige: Bei einer zentrischen Streckung mit Streckzentrum Z und Streckfaktor k sind die Bilder von drei kollinearen Punkten A, B und C kollinear.

Dies folgt in dem Fall, dass die Punkte A, B und C auf einer Geraden durch Z liegen, aus der Definition der zentrischen Streckung.

Liegen die Punkte A, B und C auf einer Geraden g, die nicht durch Z verläuft, konstruieren wir durch A‘ eine Parallele zu g. Diese schneidet die Geraden durch Z und B bzw. C in den Punkten P bzw. Q (Abb. 5).

Aus dem 1. Strahlensatz folgt:

$$\overline{ZP} : \overline{ZB} = \overline{ZQ} : \overline{ZC} = \overline{ZA'} : \overline{ZA} = k : 1.$$

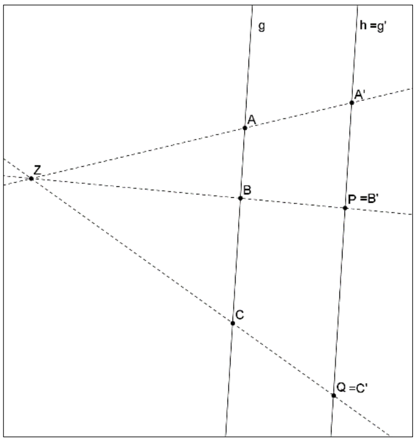


Abb. 5: Bilder kollinearer Punkte sind kollinear.

Damit sind P und Q die Bilder von B und C bei der durch A und A‘ festgelegten zentrischen Streckung.

Es wird also jeder Punkt auf der Geraden g auf einen Punkt auf der Geraden h abgebildet, die parallel zu g liegt. Umgekehrt ist jeder Punkt Q auf der Gerade g Bild des Schnittpunktes von g mit der Geraden durch Z und Q.

[6] Beweis in Anlehnung an [Krauter], S. 174

Verfasser: Veronika Kollmann

……

Zusammengefasst werden diese Eigenschaften in der Schulmathematik im

Satz von der zentrischen Streckung:

Bei einer zentrischen Streckung ist das Bild einer Geraden g eine zu g parallele Gerade g'.[7]

In der Schulmathematik werden darüber hinaus folgende Eigenschaften der zentrischen Streckung thematisiert:

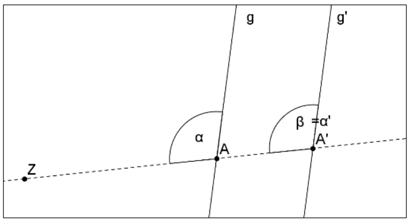


Abb. 6: Winkeltreue der zentrischen Streckung

VI. Winkelgrößen bleiben bei einer zentrischen Streckung erhalten: Kurz: Die zentrische Streckung ist winkeltreu

Diese Eigenschaft folgt aus Eigenschaft II und dem Satz von den Stufenwinkeln an Parallelen (Abb. 6).

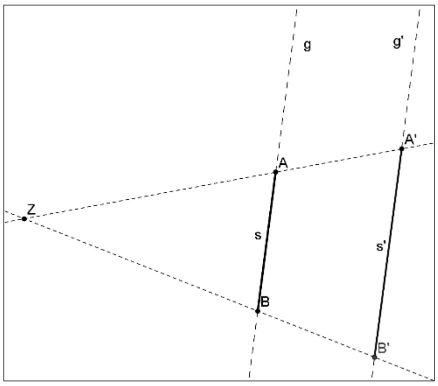


Abb. 7: $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$

VII. Die Länge einer Bildstrecke beträgt das k-fache der Länge der Urbildstrecke. Diese Eigenschaft ist äquivalent zur Längenverhältnistreue.[8]

Beweis für den Fall, dass die Strecke AB auf einer Geraden liegt, die nicht durch Z liegt:[9]

Die Bildstrecke A'B' liegt nach Eigenschaft II auf einer Parallelen zu AB. Nun kommt der 2. Strahlensatz zum Zug (Abb. 7):

$\overline{\mathrm{A'B'}} : \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{A'Z}} : \overline{\mathrm{AZ}} = \mathrm{k}.$

Damit folgt: $\overline{\mathrm{A'B'}} = \mathrm{k} \cdot \overline{\mathrm{AB}}$. ■

Aus dieser Eigenschaft folgt die nächste:

VIII. Der Flächeninhalt einer Bildfigur beträgt das k^2-fache des Flächeninhalts der Urbildfigur.

Die Eigenschaften I, VI und VII stellen zusammen eine mathematisch exakte Beschreibung dessen dar, was wir bei einer maßstabgetreuen Vergrößerung bzw. Verkleinerung verlangen.

Um die Eigenschaften der zentrischen Streckung mit den Mitteln der Schulmathematik zu beweisen, wurden also vor allem die Strahlensätze benötigt. Stehen diese noch nicht zur Verfügung wird es schwieriger.

---

[7] Vgl. z. B. [Schmid], S. 111

[8] Eine Abbildung ist längenverhältnistreu, wenn das Verhältnis der Längen von zwei Strecken durch die Abbildung nicht verändert wird..

[9] In dem Fall, dass die Strecke AB auf einer Geraden durch das Zentrum Z liegt folgt mithilfe der Definition der zentrischen Streckung, dass die Bildstrecke A'B' k-mal so lang ist wie die Urbildstrecke.

1.2.2 Beweis der Eigenschaften der zentrischen Streckung ohne die Strahlensätze

Wir benötigen zunächst einen Hilfssatz, den **Projektionssatz**[10]:

Erzeugt eine Parallelenschar auf einer schneidenden Geraden gleichlange Abschnitte, dann tut sie dies auf allen schneidenden Geraden.

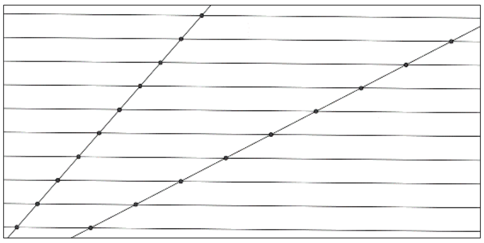


Abb. 8: Projektionssatz

Wir betten nun die Konstruktion einer zentrischen Streckung einfach in eine solche Parallelenschar ein. Dies gelingt für positive, rationale Streckfaktoren $k = \frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ folgendermaßen:[11]

Die Strecke ZA wird in n und die Strecke ZA‘ in m gleich lange Teilstrecken unterteilt und durch die Teilpunkte wird eine Parallelenschar parallel zur Geraden AB konstruiert.

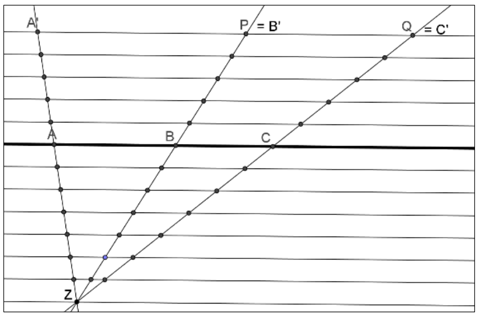


Abb. 9: zentrische Streckung mit dem Faktor $k = \frac{12}{7}$

Mit dieser Vorarbeit und dem Projektionssatz läuft der Beweis der Eigenschaften I und II der zentrischen Streckung wie oben dargestellt. Es gilt $\overline{ZP} : \overline{ZB} = \overline{ZQ} : \overline{ZC} = \overline{ZA'} : \overline{ZA} = m : n$. Damit sind P und Q die Bilder von B und C bei der durch A und A‘ festgelegten zentrischen Streckung und die Parallele durch A‘ zur Geraden AB ist das Bild von AB.

Beim Beweis der Eigenschaft VII wurde oben der 2. Strahlensatz benötigt. Will man ohne ihn auskommen, benötigt man eine 2. Parallelenschar parallel zu ZB durch die Teilpunkte der Strecke ZA‘ (Abb. 10).

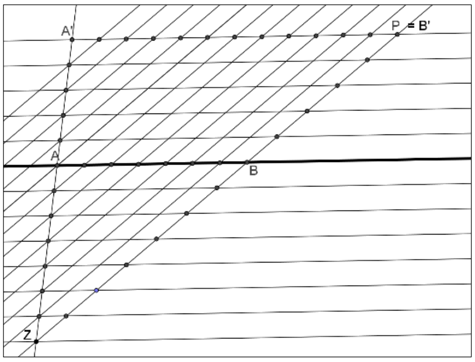


Abb. 10: $A'B' = \frac{12}{7} \cdot AB$

[10] [Krauter], S. 149, Beweis ebd.

[11] Für irrationale Streckfaktoren ist diese Konstruktion nicht möglich, da die Strecken ZA und ZB in diesem Fall inkommensurabel sind. Da sich irrationalen Längenverhältnisse aber nur rationale Längenverhältnisse beliebig genau annähern lassen, gilt der Satz von der zentrischen Streckung auch im irrationalen Fall.

Verfasser: Veronika Kollmann

…….

Bemerkung: Der hier dargestellte Ansatz zum Beweis von Eigenschaften der zentrischen Streckung mithilfe von Parallelenscharen ist offensichtich zugleich ein Ansatz zum Beweis der Strahlensätze.[12]

2. Didaktische Reduktion. Vergleich der Schulbücher

Welche Eigenschaften der zentrischen Streckung sollten bei der Behandlung des Themas in Klasse 9 vermittelt werden? Welche Eigenschaften sollten dabei einfach der Anschauung (einer Handzeichnung oder einer Konstruktion mit einer dynamischen Geometriesoftware (DGS) entnommen werden, weil sie offensichtlich sind, und welche Eigenschaften sollten hinterfragt und begründet werden? Das sind die zentralen Fragen zur didaktischen Reduktion bei der Planung einer Einführung zum Thema „zentrische Streckung“.

Der aktuelle Bildungsplan gibt auf diese Frage keine eindeutige Antwort. Hier heißt es in den Bildungsstandards für die Klassenstufen 9 und 10 lediglich: „Figuren zentrisch strecken; Eigenschaften der zentrischen Streckung kennen und anwenden“.[13]

Daher zunächst ein Blick in drei aktuelle Schulbücher:

Lambacher Schweizer 5 (2007)

In Analogie zum Situation der Bildvergrößerung mit einem Diaprojektor wird am Beispiel der Vergrößerung einer teils gerade, teils krummlinig begrenzten Figur die Konstruktion der zentrischen Streckung erklärt: *„Nach einem solchen Prinzip soll auch eine vergrößerte Figur konstruiert werden. Als Ausgangspunkt für die Konstruktion legt man dazu einen Punkt S fest. Verlängert man dann alle Strecken von S zur Figur mit demselben Faktor (z.B. k = 2), so erhält man die Punkte der vergrößerten Figur. Eine solche Konstruktion nennt man zentrische Streckung mit dem Streckfaktor k. Der Punkt S ist dabei das Streckzentrum der Konstruktion.“* [14]

Im Anschluss an diese Anleitung zur Konstruktion führt ein Vergleich von Ausgangs- und Bildfigur dazu, dass die Eigenschaften VI und VII der zentrischen Streckung erkannt werden. Daraus wird geschlossen, dass Ausgangs- und Bildfigur ähnlich sind.[15]

Insgesamt wird zwischen Definition und Konstruktion der zentrischen Streckung nicht deutlich unterschieden. Ein Beweis der Eigenschaften VI und VII erfolgt nicht. Die Eigenschaften I und II (Satz von der zentrischen Streckung) werden nicht thematisiert. Konstruktionen und

---

[12] Ein alternativer Beweis des 1. Strahlensatzes mithilfe von Flächeninhalten von Dreiecken ist dargestellt in [Hefendehl-Hebeker], S. 152 f. Dieser Beweis führt überraschend zur Aussage des 1. Strahlensatzes, visualisiert diese aber im Gegensatz zum Ansatz über die Parallelen-schar nicht.
[13] [MKJS], S. 99
[14] [Baum], S. 13
[15] Hier wird die im Kapitel zuvor vermittelte Definition ähnlicher Vielecke verwendet: *Zwei Vielecke heißen ähnlich, wenn die Längenverhältnisse einander entsprechender Seiten und einander entsprechende Winkel gleich sind.* ([Baum] , S. 10)

Argumentationen mithilfe von Parallelenkonstruktionen sind damit nicht möglich. Die Eigenschaft VIII wird im Rahmen einer Übungsaufgabe entdeckt.[16]

Fokus Mathematik 5 (2008)

Einführend wird die Aufgabe gestellt, zu einem gegebenen Dreieck ein Dreieck mit doppelt so langen Seiten zu konstruieren. Die nahe liegende einfache Lösung (Beibehalten eines Eckpunktes und Verlängerung der von diesem Punkt ausgehenden Seiten auf das Doppelte ihrer ursprünglichen Länge) wird als proportionale Vergrößerung bezeichnet und zentrische Streckung genannt. Dabei wird nicht hinterfragt, ob die dritte Seite des Dreiecks auch einen Verdoppelung ihrer Länge erfährt.

Es folgt eine formale Definition der zentrischen Streckung:

Eine zentrische Streckung ist gegeben durch ein Zentrum S und einen Streckfaktor $k \neq 0$.

Für einen Punkt P der Ebene und seinen Bildpunkt P‘ gilt:

(1) *P‘ liegt auf der Geraden SP.*
(2) $\overline{|SP'|} = k \cdot \overline{|SP|}; k = \frac{\overline{|SP'|}}{|SP|}$
(3) *Ist k > 0, dann liegen P und P‘ auf einer Seite von S.*
Ist k < 0, dann liegen P und P‘ auf verschiedenen Seiten von S. [17]

Nun wird eine weitere Lösung der einführenden Dreiecksverdoppelungsaufgabe dargestellt: Zentrische Streckung des Dreiecks von einem Höhenfußpunkt aus mit dem Streckfaktor 2. Es scheint jetzt nicht mehr so offensichtlich, dass das Bilddreieck die gewünschen Eigenschaften (Verdoppelung der Seitenlängen) aufweist.

Die zur Begründung benötigten Eigenschaften und weitere Eigenschaften der zentrischen Streckung werden nun als Satz formuliert, aber nicht bewiesen: Geradentreue, Parallelität von Bildgerade und Urbildgerade, Parallelentreue, Winkeltreue, und Längenverhältnistreue. Dabei wird explizit formuliert: *Die Mitte wird wieder auf die Mitte abgebildet.*[18]

Merkwürdiger Weise wird dagegen der folgende Satz umständlich unter Verwendung der Winkeltreue der zentrischen Streckung und des Satzes von den Stufenwinkeln an Parallelen bewiesen, obwohl er unmittelbar aus den oben genannten Eigenschaften der zentrischen Streckung folgt: *Durch eine Gerade und eine zu ihr parallele Bildgerade sowie durch einen Punkt S ist eine zentrische Streckung mit dem Streckzentrum S definiert.*[19]

Insgesamt wird zwischen der Definition der zentrischen Streckung und den zu beweisenden Eigenschaften klar unterschieden. Alle Eigenschaften der zentrischen Streckung werden thematisiert. Auf Beweise wird, abgesehen von einer wenig überzeugenden Ausnahme, verzichtet.

[16] [Baum], S. 15 Nr. 7
[17] [Lütticken], S. 10
[18] [Lütticken], S. 10
[19] [Lütticken], S. 11

Verfasser: Veronika Kollmann

………

Mathematik Neue Wege 5. Arbeitsbuch für Gymnasien (2007)

In diesem Schulbuch, das den Anspruch hat ein Arbeitsbuch für Schülerinnen und Schüler zu sein, wird die zentrische Streckung nach einer Reihe von Aufgaben zum Vergrößern und Verkleinern von Figuren und Körpern als die Abbildung eingeführt, die sich hinter den meisten Vergrößerungs- bzw. Verkleinerungsverfahren verbirgt.

Dabei wird die Konstruktion an einem Beispiel mittels einer Bildfolge vermittelt und folgende Eigenschaften der zentrischen Streckung werden am Beispiel der Streckung eines Dreiecks ABC mit Streckfaktor $k = 2{,}5$ und Streckzentrum Z aufgelistet:

1. *Der Bildpunkt P' von P liegt auf der Geraden ZP.*

2. *Den Streckfaktor findet man in den Streckenlängen*

   $\overline{ZA'} = 2{,}5 \cdot \overline{ZA}, \overline{A'B'} = 2{,}5 \cdot \overline{AB}, \overline{B'C'} = 2{,}5 \cdot \overline{BC}$

3. *Entsprechende Winkel in Ausgangsfigur und Bildfigur sind gleich groß:*
   $$\alpha = \alpha' \quad \beta = \beta' \quad \gamma = \gamma'$$

4. *Ausgangsstrecke und zugehörige Bildstrecke sind parallel, z. B.:* $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$.[20]

   In diesem Schulbuch wird nicht deutlich zwischen definierenden Eigenschaften (Punkt 1 und Punkt 2a) und daraus abgeleiteten, zu beweisenden Eigenschaften (Punkte 2b - 4) unterschieden. Die Geradentreue wird nicht explizit genannt. Beweise fehlen vollständig.

Elemente der Mathematik 5 (2007)

Ähnlich wie im Schulbuch Fokus 5 (2007) wird am Beispiel der maßstäblichen Vergrößerung eines Dreiecks durch Streckung von einem Eckpunkt aus (Streckfaktor $k = 1{,}5$) in die zentrische Streckung eingeführt. Im Gegensatz zum Vorgehen bei Fokus 5 wird hier aber explizit die Frage gestellt, ob aus der Vergrößerung von zwei Dreiecksseiten mit dem Faktor 1,5 auch die Vergrößerung der dritten Seite mit diesem Faktor folgt.

Die Definition der zentrische Streckung wird im Stil einer Konstruktionsanleitung zunächst für positive und dann für negative Streckfaktoren formuliert. [21]

Deutlich davon getrennt werden in einem folgenden Abschnitt Eigenschaften der zentrischen Streckung als Satz formuliert:

Für jede zentrische Streckung mit positivem Streckfaktor k gilt:

(a) Gerade und Bildgerade sind parallel zueinander.
(b) Eine Bildstrecke ist k-mal so lang wie die Originalstrecke.
(c) Winkel und Bildwinkel sind gleich groß. [22]

[20] [Lergenmüller] S. 8
[21] [Griesel], S. 16f
[22] [Griesel], S. 19

Verfasser: Veronika Kollmann

Die Geradentreue wird nicht explizit genannt. Die Parallelität von Gerade und Bildgerade wird nicht bewiesen aber beim Beweis der Eigenschaften (b) und (c) verwendet.[23]

Zusammenfassung des Schulbuchvergleichs

Tabelle 1: Schulbuchvergleich zum Thema Einführung zentrische Streckung

	Unterscheidung zwischen definierenden und daraus folgenden Eigenschaften?	Thematisierung der Eigenschaften? I. Geradentreue II. $g \parallel g'$ VI. Winkeltreue VII. $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$	Beweis der Eigenschaften?
Lambacher Schweizer	nein	VI und VII	nein
Fokus Mathematik	ja	alle	nein
Mathematik Neue Wege	nein	II, VI und VII	nein
Elemente der Mathematik	ja	II, VI und VII	VI und VII

In Bezug auf die Frage, ob die Eigenschaften der zentrischen Streckung bewiesen werden sollten, ergibt der Schulbuchvergleich eine klare Antwort: Nein. Ein vollständiger Beweis aller Eigenschaften wäre vermutlich zu aufwändig und nur unter enger Anleitung der Lehrkraft zu vermitteln. Ein uneinheitliches Bild ergibt sich dagegen in Bezug auf die Frage, ob zwischen den definierenden Eigenschaften der zentrischen Streckung und den daraus resultierenden Eigenschaften unterschieden werden sollte. Da das Erlernen des schlussfolgernden Denkens, das Unterscheiden von Voraussetzung (*wenn ... ,*) und Behauptung (*dann ...*), zu den allgemeinen Zielen des Mathematikunterrichts gehört, wird bei der nachfolgend dargestellten Einführung in die zentrische Streckung diese Unterscheidung deutlich gemacht. Ebenso keine klare Antwort liefert der Schulbuchvergleich in Bezug auf die Frage, ob auch der Satz von der zentrischen Streckung (Geradentreue; Bildgerade parallel zur Urbildgerade) thematisiert werden sollte. Dieser Frage soll im Folgenden bei der Gestaltung und Reflexion der Unterrichtssequenz nachgegangen werden.

3. Einführende Aufgaben

Vom Gummifadenexperiment zur Konstruktion der zentrischen Streckung

[23] [Griesel], S. 20

Verfasser: Veronika Kollmann

Der Einstieg in das Thema zentrische Streckung soll nach dem EIS-Prinzip auf der enaktiven Ebene mit einem Experiment beginnen[24]:

An die Tafel wird ein schematisierter Baum gezeichnet. Ein Stück Hosengummi wird an einem Ende mit einer Hand auf der Tafel fixiert, in ein Loch am anderen Ende wird ein Stift gesteckt. Nun wird das Gummi vom Stiftende aus so gespannt, dass die markierte Mitte des Hosengummis genau der Linie des gezeichneten Baumes entlang fährt. Dabei zeichnet der Stift das Bild des Baumes.

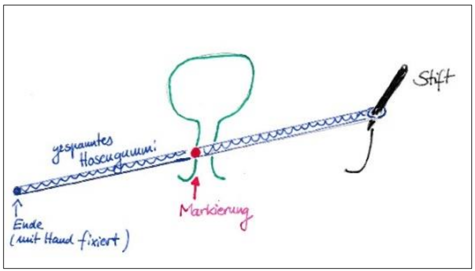


Abb. 11: Hosengummi-Experiment

Nach der Erläuterung des Vorgehens mit dem Gummiband an der Tafel erhalten die Schülerinnen und Schüler folgende Aufgaben sowie DIN A3 Blätter zum Zeichnen:

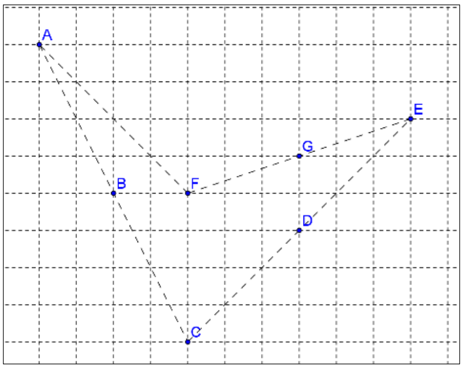
Aufgabe 1:

a) Zeichne eine beliebige Figur auf dein Blatt und vergrößere diese mithilfe deines Gummibandes. Markiere den Punkt, in dem der Gummifaden festgehalten wird, und bezeichne ihn mit Z. Setze die Markierung auf dem Gummiband in die Mitte. Vergleiche die Größe der ursprünglichen Figur und der vergrößerten Figur. Verschiebe nun die Markierung. Was ändert sich?

b) Gelingt es dir, deine Figur mithilfe des Gummibandes zu verkleinern? Beschreibe dein Vorgehen auf dem Blatt.

Aufgabe 2:

Übertrage nebenstehende Punktefigur in dein Heft und vergrößere sie. Gehe dabei vor wie im Gummifadenexperiment und markiere zunächst den Punkt Z, von dem aus die Figur vergrößert wird, verwende aber anstelle des Gummifadens dein Geodreieck und zeichne geeignete Hilfslinien.



a) Beschreibe deine Konstruktion. Nenne dabei den Punkt, von dem aus die Figur vergrößert wird, Z.

b) Vergleiche die entstandene Figur mit der ursprünglichen Figur. Was hat sich verändert, was ist gleich geblieben? Achte auf Winkel, Seiten und Mittelpunkte.

Mit dieser Aufgabe wird das Ziel verfolgt, die Definition der zentrischen Streckung nach dem EIS-Prinzip zu erarbeiten: Mit dem Experiment werden die Schüler zunächst auf der enaktiven Ebene zur Konstruktion der zentrischen Streckung einer selbst gewählten Figur angeleitet. Dabei sollen sie beim Zeichnen verschiedener Beispiele durch Variation des Markierungspunktes selbstständig arbeiten und konkrete Erfahrungen sammeln. Nach dem Prinzip des entdeckenden Lernens werden sie angeregt, erste Zusammenhänge zwischen der Lage des Markierungspunktes und der Größe der Bildfigur zu erkennen und zu entdecken, dass sie Stift und Markierung vertauschen müssen, um die Umkehraufgabe (Verkleinerung der Ausgangsfigur) zu lösen.

[24] [Griesel], S. 7, Aufgabe 4

Auf der nächsten Abstraktionsstufe (ikonische Ebene) sollen die Schülerinnen und Schüler auf der Grundlage ihrer Erfahrungen aus dem Experiment eine vorgegebene Punktefigur (Viereck mit Seitenmitten) vergrößern. Der Vergrößerungsfaktor und die Lage des Streckzentrums werden nicht vorgeben. Die Schülerinnen und Schüler sollen nun erkennen und verbalisieren, dass sie anstelle des Hosengummis Hilfsstrecken zeichnen müssen, die im Streckzentrum beginnen, durch die Urbildpunkte verlaufen und doppelt (bzw. k-mal) so lang sind wie die Entfernung vom Streckzentrum zu den Urbildpunkten.

Anschließend soll ein Vergleich von Urbild- und Bildfigur zum Erkennen erster Eigenschaften der zentrischen Streckung führen:

(1) Bildstrecken sind doppelt (k-mal) so groß wie ihre Urbilder,
(2) Winkelweiten bleiben erhalten,
(3) Mittelpunkte werden auf Mittelpunkte abgebildet.

Es wird damit gerechnet, dass Ungenauigkeiten beim Zeichnen diese Erkenntnisse erschweren oder gar verhindern. Dies soll genutzt werden, um die Eigenschaften der zentrischen Streckung im anschließenden Unterrichtsgespräch zu hinterfragen.

Das Parallelenverfahren: Alternative zur Konstruktion der zentrischen Streckung?

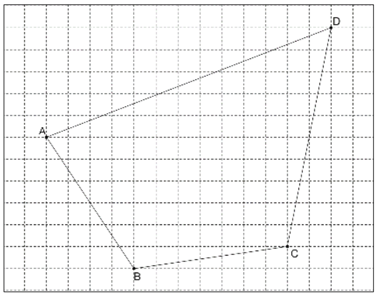
Die Erarbeitung der Definition und der Eigenschaften der zentrischen Streckung soll durch folgende Aufgabe vertieft und abgeschlossen werden. Dabei wird die mühsame punktweise Konstruktion der zentrischen Streckung mit einem einfacheren „Parallelenverfahren“ kontrastiert, um anschließend festzustellen, dass dieses einige aber nicht alle Eigenschaften der zentrischen Streckung erfüllt.

Aufgabe 3:

a) Übertrage folgendes Viereck in dein Heft. Zeichne nach außen Parallelen zu den Seiten des Vierecks im Abstand 1 cm. Die Schnittpunkte der 4 Parallelen bilden ein neues, größeres Viereck.

b) Übertrage das Viereck ein zweites Mal in dein Heft. Zeichne nach innen Parallelen zu den Seiten des Vierecks im Abstand 1 cm. Die Schnittpunkte der 4 Parallelen bilden ein neues, kleineres Viereck.

c) Sind die neu entstandenen Vierecke Bilder bei einer zentrischen Streckung des ursprünglichen Vierecks? Begründe deine Entscheidung.



Die Schüler sollen anhand von dieser Aufgabe erkennen, dass das Zeichnen von Parallelen in gleichem Abstand zu den Urbildgeraden in der Regel kein Bild einer zentrischen Streckung liefert, obwohl eine wesentliche Eigenschaft der zentrischen Streckung, die Winkeltreue, erhalten bleibt. Dazu stellen sie entweder fest, dass die definierende Eigenschaft nicht erfüllt ist, sich also die Geraden durch Bild und

Urbildpunkte nicht in einem Punkt schneiden, oder sie erkennen, dass sich die Seitenverhältnisse ändern und entdecken damit eine weitere Eigenschaft der zentrischen Streckung.

Abschließend führt die Kombination der definierenden Eigenschaft (Bildpunkte liegen auf Strahlen durch das Zentrum) und der Paralleleneigenschaft (Parallelität von Bild und Urbildgerade) zur vereinfachten Konstruktion der zentrischen Streckung (Abbildung 12).

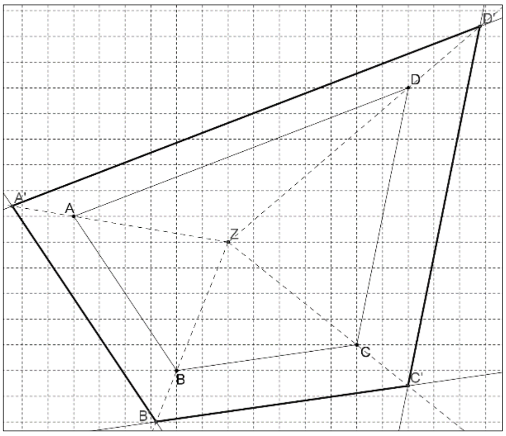


Abb. 12: Konstruktion des Bilds einer zentrischen Streckung mithilfe von Parallelen

4. Reflexion der Unterrichtserfahrungen

Die Einführung in das Thema zentrische Streckung an Hand der vorgestellten Aufgaben wurde in einer Klasse 9 (24 Schülerinnen und Schüler) im Rahmen von einer Doppelstunde und einer Einzelstunde erprobt. Aufgrund der Unterrichtsergebnisse sollten auf folgende Fragen erste Antworten gefunden werden:

Frage 1: Fördert der Einstieg auf der enaktiven Ebene (Gummibandexperiment) die Entwicklung einer anschaulichen Vorstellung von der zentrischen Streckung (bei positivem Streckfaktor) und erleichtert er die selbstständige Erarbeitung der Konstruktionsvorschrift

Frage 2: Ist es sinnvoll im Unterricht die Geradentreue der zentrischen Streckung und die Parallelität von Urbild- und Bildgerade zu thematisieren?

Abgesehen von anfänglichen feinmotorischen Schwierigkeiten einzelner Schülerinnen und Schüler (SuS), die in Partnerarbeit gelöst werden konnten, erstellten alle SuS mindestens zwei Vergrößerungen und waren hoch motiviert bei der Arbeit. Dabei wählten mehr als die Hälfte der SuS krummlinige Figuren. Fast alle SuS erkannten, dass die Bildfigur umso größer wird, je weiter der Markierungspunkt in Richtung Streckzentrum verschoben wird. Zwei Schüler konnten auf Nachfrage den Zusammenhang konkretisieren: *Die Vergrößerung ist viermal so groß, wenn die Markierung bei einem Viertel liegt. Bei einem Achtel ist es achtmal so groß*. Dabei wurden auch die Grenzen des nicht beliebig dehnbaren Gummibandes angesprochen.

Die anschließende Konstruktion bereitete ca. der Hälfte der SuS zunächst Probleme, da sie nicht wussten, wie lang das mit Geodreieck zu zeichnende „Gummiband“ sein soll. Teilweise wurden Bild- und Urbildpunkt verwechselt, so dass es zu einer Verkleinerung kam. Hier half der Hinweis der Lehrkraft weiter, den Markierungspunkt wie beim Experiment zunächst in der Mitte des Gummibandes zu wählen (Streckfaktor $k = 2$). Die Beschreibung der Konstruktion wurde nur von einem Viertel der SuS erstellt. Dabei beschränkten sich alle auf den Sonderfall $k = 2$. Die Beschreibungen ähnelten folgendem Schülerbeitrag: *Verbinde Z mit A und verlängere die Strecke bis sie doppelt so lang ist. Das Ende ist der Punkt A‘*. Ausgehend von diesem Sonderfall konnte die allgemeine Konstruktionsvorschrift im abschließenden Unterrichtsgespräch rasch erarbeitet werden. Dabei war den Schülern sofort klar, dass für Streckfaktoren $k < 1$ (und k positiv) eine Verkleinerung vorliegt.

Insgesamt ergibt sich folgende Antwort auf Frage 1: Der Einstieg auf der enaktiven Ebene ist gelungen, da alle SuS das Gummifadenexperiment motiviert und erfolgreich durchgeführt haben und auf diese Weise eine anschauliche Vorstellung der zentrischen Streckung entwickeln konnten. Der Übergang zur Konstruktion mithilfe des Geodreiecks und zur Erarbeitung einer Konstruktionsvorschrift wurde durch das Experiment gestützt, konnte teilweise aber nur mit Hilfe der Lehrkraft bewältigt werden.

Zur Erarbeitung der Eigenschaften der zentrischen Streckung haben die SuS ihre ursprünglichen Figuren mit den Bildfiguren verglichen. Rasch genannt wurden folgende Eigenschaften:

- Die „Form“ bleibt gleich.
- Die Winkelweiten bleiben gleich.
- Die Seitenlängen sind k-mal so lange wie die ursprünglichen Seiten.

Nicht genannt wurden von den SuS die Parallelität von Urbild- und Bildstrecken bzw. Bildgeraden sowie die Geradentreue. Nach dem Hinweis der Lehrkraft, dass die Seiten der Bildvierecke bei einigen SuS einen Knick zeigten, und der damit verbundenen Frage, ob das Bild einer Strecke wieder eine Strecke oder eine „Knickstrecke“ oder vielleicht sogar eine „Krumme“ sei, reagierten die Schüler eher mit Unverständnis und führten die „Knickstrecken“ in einigen Schülerlösungen sofort auf Ungenauigkeiten beim Zeichnen zurück. Dies wurde darauf von der Lehrkraft nicht weiter hinterfragt sondern bestärkt, aber nicht als Eigenschaft der zentrischen Streckung fixiert. Hinwiesen wurden die Schüler dagegen explizit auf die gegenseitige Lage von Bild- und Urbildstrecke. Die Schüler erkannten die Parallelität. Ein sehr guter Schüler stellte dabei den Zusammenhang mit der Winkeltreue her: *Da die Winkel gleich groß sind, sind die Strecken parallel.* Hier musste ergänzt werden, dass diese Aussage nur für Stufenwinkel (bzw. Wechselwinkel) zutrifft und nicht für beliebig liegende Figuren.

Damit kann an dieser Stelle Frage 2 beantwortet werden: Die Geradentreue der zentrischen Streckung ist für die Schüler so selbstverständlich, dass selbst ungenaue Zeichnungen, die Anlass geben könnten an ihr zu zweifeln, diesen Glauben nicht erschüttern können. Dagegen erscheint es sinnvoll die Parallelität von Urbildgerade und Bildgerade zu thematisieren, da sie eng mit der Winkeltreue zusammenhängt und die Konstruktion der zentrischen Streckung von Figuren erheblich erleichtert.

Nach einer schriftlichen Formulierung der erkannten Eigenschaften der zentrischen Streckung bearbeiteten die SuS Aufgabe 3. Bei der Zeichnung des ersten Parallelenrahmens im Abstand von 1 cm nach außen waren sich die meisten Schüler einig, dass es sich um das Bild einer zentrischen Streckung handelt. Begründung: Die Winkel bleiben gleich! Erst beim Zeichnen des Parallelenrahmens nach innen kamen Zweifel auf und es wurde erkannt, dass sich die „Form ändert“, obwohl die Winkelweiten gleich bleiben. Als Grund wurde genannt, dass die *kürzeste Seite zu stark verkürzt wird bzw. nicht genauso wie die anderen Seiten*. Beim genauen Nachmessen wurde festgestellt, dass jede Seite mit einem anderen Faktor verkleinert worden war und sich dadurch die Form verändert hatte. Einige Schüler versuchten das Streckzentrum mithilfe der Strahlen durch Bild- und Urbildpunkte zu konstruieren und entdeckten, dass sich die vier Strahlen nicht in einem Punkt schneiden. Damit konnte anhand dieser Aufgabe geklärt werden, dass das Zeichnen von Parallelen im gleichen Abstand zu den Urbildstrecken in der Regel keine maßstäbliche Vergrößerung bzw. Verkleinerung und damit auch keine zentrische Streckung liefert. Abschließend wurde das Viereck korrekt zentrisch gestreckt.

Bei einem abschließenden Test sollten die SuS ähnlich wie bei Aufgabe 3 untersuchen, ob es sich bei gegebenen Bild- und Urbildfiguren und zentrische Streckungen handelt. In den Fällen, in denen keine zentrische Streckung vorlag, argumentierten sie erfolgreich mit den Eigenschaften der zentrischen Streckung.

Verfasser: Veronika Kollmann

Literatur:

[Agrikola] Agrikola, I. und Friedrich, F. (2014): Elementargeometrie. Springer Spektrum Wiesbaden; 4. Auflage

[Hefendehl-Hebeker] Hefendehl-Hebeker, L. (2000): Figuren und Abbildungen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe. Wißner-Verlag Augsburg

[Koecher] Koecher, M. und Krieg, A. (2007): Ebene Geometrie. Springer Berlin Heidelberg New York; 3., neu bearb. und erw. Auflage

[Krauter] Krauter, S. (2007): Erlebnis Elementargeometrie. Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken. Spektrum Akademischer Verlag / Elsevier GmbH München

Schulbücher:

[Griesel] Griesel, H. u.a. (Hrsg.) (2007): Elemente der Mathematik 5 Baden-Württemberg. Schroedel Braunschweig

[Lütticken] Lütticken, R. und Uhl, C. (Hrsg.) (2008): Fokus Mathematik 5 Gymnasium Baden-Württemberg. Cornelsen Berlin

[Baum] Baum, M. u. a. (Hrsg.) (2007): Lambacher Schweizer 5 Baden-Württemberg. Klett Stuttgart

[Schmid] Schmid, A. (Hrsg.) (1997): Lambacher Schweizer 9 Baden-Württemberg. Klett Stuttgart

[Lergenmüller] Lergenmüller, A. und Schmidt, G. (2007): Mathematik Neue 5. Arbeitsbuch für Gymnasien. Baden-Württemberg. Schroedel Braunschweig

Bildungspläne:

[MKJS] Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.) (2004): Bildungsplan 2004. Allgemein bildendes Gymnasium. Stuttgart

Versicherung:

Ich versichere, dass ich dieses Skript selbständig angefertigt, nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt und alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quellen als Entlehnungen kenntlich gemacht habe.

(eigenhändige Unterschrift)

Verfasser: Veronika Kollmann
…….