(Co)homologie von Gruppen

Matthias Künzer

RWTH Aachen

Inhalt

Vorwort

Das vorliegende Skript wurde begleitend zu einer Vorlesung zur Cohomologie von Gruppen erstellt, welche sich an Studenten mit Vorkenntnissen aus der Algebra richtete. Die benötigte Homologische Algebra wurde behandelt.

Einige Verifikationen wurden in die Übungen ausgelagert. Übungen und Lösungen sollten daher als Bestandteil dieses Skripts angesehen werden; der Leser findet sie im Anhang A.

Der Autor lernte die Gruppencohomologie in einer Vorlesung von W. Kimmerle in Stuttgart [**14**]. Vieles aus dem vorliegenden Skript stammt daraus, und manches auch vom gemeinsamen Nacharbeiten zusammen mit H. Weber. Ein Dank geht an meine Studenten für Korrekturen und Verbesserungen, insbesondere an S. Stigler und S. Thomas. Für weitere Hinweise auf Fehler oder Unklarheiten bin ich dankbar.

Aachen, den 19.05.2006

Matthias Künzer

Mit meinem Steilkurs Homologische Algebra in §1 bin ich nicht mehr so recht zufrieden. Der Leser, der es etwas weniger skizzenhaft bevorzugt, sei auf [**16**] verwiesen.

Bremen, den 10.02.2010

Matthias Künzer

Konventionen.

(1) Ist X eine endliche Menge, so bezeichnet $\#X$ oder $|X|$ ihre Kardinalität, d.h. die Anzahl ihrer Elemente.

(2) Ist $m \in M$ ein Element einer Menge M, und $M \xrightarrow{f} N$ eine Abbildung, so gibt es verschiedene Möglichkeiten, das Bild von m unter f in N zu bezeichnen: $f(m)$, mf, m^f, ${}^f m$ (z.B. wenn f ein Automorphismus ist), f_m (z.B. wenn N eine aus Abbildungen bestehende Menge ist), ...

(3) Sind $a, b \in \mathbf{Z}$, so schreiben wir $[a, b] := \{c \in \mathbf{Z} \ : \ a \leqslant c \leqslant b\}$, $]a, b] := \{c \in \mathbf{Z} \ : \ a < c \leqslant b\}$, $[a, b[:= \{c \in \mathbf{Z} \ : \ a \leqslant c < b\}$ etc. Analog in anderen linear geordneten Mengen.

(4) Sind $a, b, m \in \mathbf{Z}$, so schreiben wir $a \equiv_m b$, falls $a - b \in m\mathbf{Z}$.

(5) Ein *Ring* ist ein Ring mit 1, nicht notwendigerweise kommutativ.

(6) Ist R ein Ring, so bezeichnet $R^* := \{r \in R \ : \ \text{es gibt ein } s \in R \text{ mit } rs = sr = 1\}$ seine Einheitengruppe.

(7) Sind m, n, $a \in \mathbf{Z}$, und ist n ein Teiler von am, so bezeichnen wir mit $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \xrightarrow{a} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ die durch $x + m\mathbf{Z} \longmapsto ax + n\mathbf{Z}$ definierte Abbildung.

(8) Bisweilen kürzen wir $\mathbf{Z}/a := \mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ ab für $a \geqslant 1$.

(9) Wir setzen $\mathbf{N} := \{z \in \mathbf{Z} \ : \ z \geqslant 0\}$.

(10) Sind x und y Elemente einer Menge, so setzen wir $\partial_{x,y} := 1$ falls $x = y$, und $\partial_{x,y} := 0$ falls $x \neq y$ (Kronecker-Delta). Hierbei kann 1 auch die Identität auf einem Objekt und 0 ein Nullmorphismus bedeuten.

(11) Sind x und y Elemente einer Gruppe, so bezeichne ${}^x y := xyx^{-1}$ resp. $y^x := x^{-1}yx$ das Konjugierte von y mit x von links resp. rechts.

(12) Ist U eine Untergruppe einer Gruppe G, geschrieben $U \leqslant G$, so schreiben wir $\mathrm{C}_G(U) := \{g \in G \ : \ {}^g u = u \text{ für alle } u \in U\}$ für den Zentralisator von U in G, und $\mathrm{N}_G(U) := \{g \in G \ : \ {}^g U = U\}$ für den Normalisator von U in G. Ist $V \leqslant G$, so schreibe $\mathrm{N}_V(U) := V \cap \mathrm{N}_G(U)$. Schreibe $U \trianglelefteq G$ für $\mathrm{N}_G(U) = G$.

(13) Ist g ein Element einer Gruppe G, so schreiben wir auch kurz $g^- := g^{-1}$ für sein Inverses. Dito für einen Isomorphismus in einer Kategorie.

(14) Ist R ein Ring, so bezeichnen wir als R-Moduln per default R-Linksmoduln.

Kapitel 1

Homologische Algebra

1.1 Kategorien

Die elementare Theorie der Kategorien und Funktoren gilt als trivial, in demselben Sinne, in dem auch die elementare Theorie der Vektorräume und linearen Abbildungen als trivial gilt. Nichtsdestoweniger sollte sie geläufig sein. Weiteres, auch weniger Elementares, findet sich in [**18**].

1.1.1 Definition

Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus den folgenden Daten unter folgenden Bedingungen.

- - Eine Menge $\mathcal{C}_0 = \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ von *Objekten* ([1]).
  - Eine Menge $\mathcal{C}_1$ von *Morphismen.*
- Abbildungen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r, shift left=2, "s"] \arrow[r, shift right=2, "t"'] & \mathcal{C}_0 \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd}$$

(engl. source, identity, target), welche

$$s \circ i \;=\; t \circ i \;=\; \mathrm{id}_{\mathcal{C}_0}$$

erfüllen. Wir schreiben in aller Regel $1 = 1_X := i(X) \in \mathcal{C}_1$ für die *Identität auf* $X \in \mathcal{C}_0$.

Für einen Morphismus f nennen wir $s(f)$ das *Start*- und $t(f)$ das *Ziel*objekt von f.

Ein Morphismus $f \in \mathcal{C}_1$ mit $s(f) = X$ und $t(f) = Y$ wird auch $X \xrightarrow{f} Y$ geschrieben. Die Gleichung $s \circ i = t \circ i = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_0}$ besagt gerade, daß das Start- und das Zielobjekt der Identität auf einem Objekt X gerade wieder gleich X sind: $X \xrightarrow{1_X} X$.

Wir schreiben $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = {}_{\mathcal{C}}(X,Y) = (X,Y) := \{f \in \mathcal{C}_1 \;:\; s(f) = X,\ t(f) = Y\}$ für die Menge der Morphismen von X nach Y.

- Für je drei Objekte X, Y und Z in $\mathcal{C}_0$ gibt es eine *Kompositions*abbildung

$$\begin{array}{ccccc} (X,Y) & \times & (Y,Z) & \longrightarrow & (X,Z) \\ (f & , & g) & \longmapsto & fg \ \ (= g \circ f)\,. \end{array}$$

Wir werden also beide Kompositionsrichtungen verwenden. In größeren Diagrammen ist die “natürliche” Schreibung fg bequemer zwecks Vermeidung gedanklicher Knoten; hat man es mit vielen Elementen und wenigen Abbildungen zu tun, ist man die “traditionelle” Schreibung $g \circ f$ eher gewohnt. Die Bezeichnungen fg und $g \circ f$ sind synonym.

Folgende Axiome sollen gelten.

  - Für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ ist $(fg)h = f(gh)$ (Assoziativität).
  - Für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ ist $f1_Y = f$ und $1_Y g = g$ (Identität).

Beispiel.

(1) Die Kategorie (Mengen) der Mengen hat als Objekte Mengen ([1]), und als Morphismen beliebige Abbildungen zwischen je zwei Mengen.

(2) Die Kategorie (Gruppen) der Gruppen hat als Objekte Gruppen ([1]), und als Morphismen Gruppenmorphismen zwischen je zwei Gruppen.

(3) Die Kategorie (AbGruppen) der abelschen Gruppen hat als Objekte abelsche Gruppen ([1]), und als Morphismen Gruppenmorphismen zwischen je zwei abelschen Gruppen.

(4) Die Kategorie (Ringe) der Ringe hat als Objekte Ringe ([1]), und als Morphismen Ringmorphismen zwischen je zwei Ringen.

(5) Die Kategorie (Monoide) der Monoide hat als Objekte Monoide ([1]), i.e. Mengen ausgestattet mit einer assoziativen Multiplikation mit Eins, und als Morphismen Monoidmorphismen zwischen je zwei Monoiden, i.e. multiplikations- und einserhaltenden Abbildungen.

[1] Hierüber gibt es verschiedene Auffassungen. Wir stellen uns auf den Standpunkt, daß, wann immer mengentheoretische Probleme auftreten könnten, wir den Objektbereich hinreichend einschränken. Bei Interesse sei auf Grothendieck, SGA 4, Kapitel I.0, verwiesen – dort wird erklärt, was Universen und bezüglich gegebener Universen kleine Mengen sind.

(6) Die Kategorie (Top) hat als Objekte topologische Räume ([1]), und als Morphismen stetige Abbildungen zwischen je zwei topologischen Räumen.

(7) Die Kategorie $\mathbf{\Delta}$ hat als Objekte die linear geordneten Mengen $\Delta_n := [0, n]$ für $n \in \mathbf{N}$, und als Morphismen die ordnungserhaltenden (manchmal auch als monoton bezeichneten) Abbildungen zwischen je zwei solchen Mengen.

Beispiel. Sei R ein Ring. Ein *R-(Links)modul* ist ein Tupel (M, φ) aus einer abelschen Gruppe M, zusammen mit einem Ringmorphismus $R \xrightarrow{\varphi} \operatorname{End}(M)^\circ$, wobei $\operatorname{End}(M)$ den Endomorphismenring von M bezeichne, in welchem Multiplikation durch die Komposition zweier Endomorphismen u und v in der Reihenfolge uv aufgefaßt werde, und wobei aus einem Ring E der *entgegengesetzte Ring E°* aus E durch Vertauschung der Multiplikationsreihenfolge hervorgeht.

Häufig schreiben wir kurz $M = (M, \varphi)$, sowie $rm := (m)(\varphi(r))$ für $r \in R$, $m \in M$. Ein *Morphismus von R-Moduln* von (M, φ) nach (N, ψ), auch *R-lineare Abbildung* genannt, ist ein Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ abelscher Gruppen derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi(r)"'] & N \arrow[d, "\psi(r)"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

kommutiert für alle $r \in R$. In anderen Worten, es gelte $(rm)f = r(mf)$ für alle $r \in R$ und alle $m \in M$.

Die Kategorie der R-Moduln wird mit R-Mod bezeichnet.

Ist z.B. $R = \mathbf{Z}$, so ist $\mathbf{Z}$-Mod = (AbGruppen). Genauer, die beiden Kategorien sind äquivalent (s.u.), und wir verwenden die Äquivalenz als Identifikation.

Ist z.B. $R = k$ ein Körper, so ist k-Mod die Kategorie der k-Vektorräume und k-linearen Abbildungen.

1.1.2 Eigenschaften von Morphismen

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$.

1.1.2.1 Iso- und Automorphismen

Ist $X = Y$, so heißt $X \xrightarrow{f} X$ ein *Endomorphismus.* Wir schreiben auch $\operatorname{End} X = \operatorname{End}_{\mathcal{C}} X := {}_{\mathcal{C}}(X, X)$.

Gibt es ein $Y \xrightarrow{g} X$ mit $(X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X) = (X \xrightarrow{1} X)$, so heißt $X \xrightarrow{f} Y$ *Coretraktion.*

Gibt es ein $Y \xrightarrow{g} X$ mit $(Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y) = (Y \xrightarrow{1} Y)$, so heißt $X \xrightarrow{f} Y$ *Retraktion.*

Beispiel. Der Morphismus $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ in $\mathbf{Z}$-Mod ist keine Retraktion.

Ist $X \xrightarrow{f} Y$ Retraktion und Coretraktion, so heißt $X \xrightarrow{f} Y$ *Isomorphismus,* oder *isomorph,* auch oft $X \xrightarrow[\sim]{f} Y$ geschrieben. Gibt es dementsprechend Morphismen g, g' mit $fg = 1_X$ und $g'f = 1_Y$, so folgt $g = g'fg = g' =: f^{-1} = f^{-}$.

Ist $X \xrightarrow[\sim]{f} X$ Iso- und Endomorphismus, so handelt es sich um einen *Automorphismus.* Wir schreiben auch $\operatorname{Aut} X = \operatorname{Aut}_{\mathcal{C}} X := \{f \in \operatorname{End}_{\mathcal{C}} X \;:\; f \text{ ist isomorph}\}$. Ausgestattet mit der Komposition bildet $\operatorname{Aut} X$ eine Gruppe.

Zwei Objekte X und Y in $\mathcal{C}$ heißen *isomorph,* geschrieben $X \simeq Y$, falls es einen Isomorphismus $X \xrightarrow[\sim]{f} Y$ gibt. Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{C}_0$. Die *Isoklasse* eines Objektes X ist gegeben durch $[X] := \{Y \in \mathcal{C}_0 \;:\; X \simeq Y\}$.

So z.B. kann man die Kardinalität einer Menge M definieren als ihre Isoklasse $[M]$ in der Kategorie (Mengen).

Beispiel.

(1) Es ist per Definition $\operatorname{Aut}_{(\text{Mengen})}[1, n] = \mathcal{S}_n$ für $n \geqslant 0$.

(2) Für $m \geqslant 2$ ist $\operatorname{Aut}_{\mathbf{Z}\text{-Mod}}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \simeq (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$ (Isomorphie von Gruppen).

(3) Ist k ein Körper, so ist $\operatorname{Aut}_{k\text{-Mod}}(k^n) \simeq \mathrm{GL}_n(k)$ für $n \geqslant 0$.

Beispiel.

(1) Eine Kategorie, welche nur ein Objekt enthält, heißt auch *Monoid.*

(2) Eine Kategorie, in welcher alle Morphismen Isomorphismen sind, heißt auch *Gruppoid.*

(3) Ist eine Kategorie ein Monoid und ein Gruppoid, so ist sie eine Gruppe. Genauer, die Endomorphismen des einzigen Objektes bilden eine Gruppe.

(4) Ist in einer Kategorie stets $\#(X, Y) \leqslant 1$, und folgt aus $X \simeq Y$, stets, daß bereits $X = Y$, so heißt sie auch *Poset* (engl. partially ordered set) oder *halbgeordnete Menge.* Genauer, die Objekte bilden ein Poset, wobei $X \leqslant Y$ genau dann, wenn $\#(X, Y) = 1$.

1.1.2.2 Mono- und Epimorphismen

Es heißt $X \xrightarrow{f} Y$ *Monomorphismus* oder *monomorph,* falls für alle Morphismenpaare $T \underset{t'}{\overset{t}{\rightrightarrows}} X$ aus $tf = t'f$ stets $t = t'$ folgt. Manchmal werden Monomorphismen auch $X \overset{f}{\rightarrowtail} Y$ geschrieben.

Es heißt $X \xrightarrow{f} Y$ *Epimorphismus* oder *epimorph,* falls für alle Morphismenpaare $Y \underset{t'}{\overset{t}{\rightrightarrows}} T$

aus $ft = ft'$ stets $t = t'$ folgt. Manchmal werden Epimorphismen auch $X \xrightarrow{f} Y$ geschrieben.

Beispiel.

(1) In (Mengen) ist ein Monomorphismus aus einer nichtleeren Menge dasselbe wie eine Coretraktion, nämlich eine injektive Abbildung. Ein Epimorphismus ist dasselbe wie eine Retraktion, nämlich eine surjektive Abbildung. Siehe Aufgabe 3.$(1, 2)$.

(2) Sei R ein Ring. In R-Mod ist ein Monomorphismus dasselbe wie eine injektive R-lineare Abbildung. Ein Epimorphismus ist dasselbe wie surjektive R-lineare Abbildung. Siehe Aufgabe 3.$(3, 4)$.

   Ein R-Modul M heiße *endlich erzeugt,* falls es für ein $k \geqslant 0$ einen Epimorphismus $R^k \twoheadrightarrow M$ gibt.

   Ist z.B. $R = k$ ein Körper, so ist ein Vektorraum über k endlich erzeugt genau dann, wenn er endlichdimensional ist.

(3) In (Ringe) ist die Inklusionsabbildung $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Q}$, $z \longmapsto \frac{z}{1}$, ein Monomorphismus und ein Epimorphismus, aber kein Isomorphismus. Vgl. Aufgabe 2.(4).

(4) Sei $X = \{1, 2\}$ ein topologischer Raum mit den offenen Mengen $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$ (diskrete Topologie), und sei $Y = \{1, 2\}$ ein topologischer Raum mit den offenen Mengen $\emptyset$ und $\{1, 2\}$ (verklumpte Topologie). Die stetige Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ mit $(1)f = 1$ und $(2)f = 2$ ist ein Mono- und ein Epi-, aber kein Isomorphismus in (Top).

1.1.3 Eigenschaften von Objekten

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Sei X ein Objekt in $\mathcal{C}$.

1.1.3.1 Nullobjekte

Ist $\#(X, Y) = 1$ für alle $Y \in \mathcal{C}_0$, so heißt X *initiales Objekt.* Sind X und X' initiale Objekte, so sind also insbesondere $(X, X) = \{1_X\}$, $(X', X') = \{1_{X'}\}$, $(X, X') = \{f\}$, $(X', X) = \{g\}$, und mangels anderer Möglichkeiten sind $fg = 1$ und $gf = 1$. Wir sagen, das initiale Objekt ist, falls es existiert, bis auf einen eindeutigen Isomorphismus bestimmt.

Ist $\#(Y, X) = 1$ für alle $Y \in \mathcal{C}_0$, so heißt X *terminales Objekt.* Mit dem dualen Argument folgt, daß das terminale Objekt, falls es existiert, bis auf einen eindeutigen Isomorphismus bestimmt ist. Vgl. Aufgabe 1.

Ein Objekt, das zugleich initial und terminal ist, heißt *Nullobjekt,* und wird in der Regel mit 0 bezeichnet. Es ist bis auf einen eindeutigen Isomorphismus bestimmt, so es existiert.

Beispiel. Das Nullobjekt in (Gruppen) ist die triviale Gruppe $1 = \{1\}$ (ausnahmsweise nicht mit 0 bezeichnet). Weitere Beispiele behandeln wir in Aufgabe 4.

Existiert in $\mathcal{C}$ ein Nullobjekt 0, so gibt es zwischen je zwei Objekten X und Y auch den *Nullmorphismus* $X \longrightarrow 0 \longrightarrow Y$, oft $X \xrightarrow{0} Y$ geschrieben.

1.1.3.2 Injektiv, projektiv, bijektiv

Es heißt X *projektiv,* falls jeder Epimorphismus mit Ziel X eine Retraktion ist.

Es heißt X *injektiv,* falls jeder Monomorphismus mit Start X eine Coretraktion ist.

Es heißt X *bijektiv,* falls X injektiv und projektiv ist.

Beispiel.

(1) Ist R ein Ring, so ist R selbst ein projektiver R-Modul. Siehe Aufgabe 5.(1).

(2) Ist k ein Körper, so ist jeder k-Modul bijektiv. Siehe Aufgabe 5.(2).

(3) In $\mathbf{Z}$-Mod ist $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ weder projektiv noch injektiv. Es ist $\mathbf{Z}$ projektiv, aber nicht injektiv. Dahingegen sind $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ injektiv, da divisibel. Siehe Aufgabe 5.(3).

1.2 Additive Kategorien

1.2.1 Produkte und Coprodukte

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Sei I eine Indexmenge. Sei $(X_i)_{i\in I}$ ein Tupel von Objekten von $\mathcal{C}$.

Ein Objekt P zusammen mit einem Tupel von Morphismen $(P \xrightarrow{\pi_i} X_i)_{i\in I}$ heißt *Produkt* von $(X_i)_{i\in I}$, falls folgende universelle Eigenschaft zutrifft.

> Für jedes Tupel von Morphismen $(T \xrightarrow{t_i} X_i)_{i\in I}$ gibt es genau einen Morphismus $T \xrightarrow{t} P$ mit $t\pi_i = t_i$ für alle i.

Das Produkt P von $(X_i)_{i\in I}$ ist, falls es existiert, bis auf einen eindeutigen Isomorphismus bestimmt. Denn sind $(P,(\pi_i)_i)$ und $(P',(\pi'_i)_i)$ Produkte von $(X_i)_i$, so gibt es genau einen Morphismus $P \xrightarrow{f} P'$ mit $f\pi'_i = \pi_i$ stets, und auch genau einen Morphismus $P \xleftarrow{g} P'$ mit $g\pi_i = \pi'_i$ stets. Nun sind $fg\pi_i = \pi_i$ und, alternativ, $1_P\pi_i = \pi_i$ stets, so daß mit der Eindeutigkeit $fg = 1_P$ folgt. Genauso folgt auch $gf = 1_{P'}$.

Wir schreiben auch $\prod_{i\in I} X_i := P$. Ist $I = \{1,2\}$, so schreiben wir auch $X_1 \sqcap X_2 := P$, usf.

Dual dazu, ein Objekt C zusammen mit einem Tupel von Morphismen $(X_i \xrightarrow{\iota_i} C)_{i\in I}$ heißt *Coprodukt* von $(X_i)_{i\in I}$, falls folgende universelle Eigenschaft zutrifft.

Für jedes Tupel von Morphismen $(X_i \xrightarrow{t_i} T)_{i\in I}$ gibt es genau einen Morphismus $C \xrightarrow{t} T$ mit $\iota_i t = t_i$ für alle i.

Das Coprodukt C von $(X_i)_{i\in I}$ ist, falls es existiert, bis auf einen eindeutigen Isomorphismus bestimmt.

Wir schreiben auch $\coprod_{i\in I} X_i := C$. Ist $I = \{1,2\}$, so schreiben wir auch $X_1 \amalg X_2 := C$, usf.

Beispiel. In (Mengen) ist das Produkt der Mengen X und Y durch das cartesische Produkt $X \sqcap Y = X \times Y$ gegeben, mit $X \times Y \xrightarrow{\pi_X} X$, $(x,y) \longmapsto x$ und $X \times Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$, $(x,y) \longmapsto y$. Ihr Coprodukt ist gegeben durch die disjunkte Vereinigung $X \amalg Y = X \sqcup Y$, mit $X \xrightarrow{\iota_X} X \sqcup Y$, $x \longmapsto x$ und $Y \xrightarrow{\iota_Y} X \sqcup Y$, $y \longmapsto y$.

Bemerkung. Es ist $X_1 \amalg X_2 \amalg X_3 \simeq (X_1 \amalg X_2) \amalg X_3 \simeq X_1 \amalg (X_2 \amalg X_3)$, etc.

1.2.2 Direkte Summen

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit Nullobjekt, in der alle Produkte und alle Coprodukte von Paaren von Objekten existieren.

Es gibt für jedes Paar (X,Y) von Objekten einen eindeutigen Morphismus $X \amalg Y \xrightarrow{z_{X,Y}} X \sqcap Y$ mit

$$\begin{array}{rclcrcl} \iota_X\, z_{X,Y}\, \pi_X &=& 1 && \iota_X\, z_{X,Y}\, \pi_Y &=& 0 \\ \iota_Y\, z_{X,Y}\, \pi_X &=& 0 && \iota_Y\, z_{X,Y}\, \pi_Y &=& 1\,. \end{array}$$

Ist $z_{X,Y}$ ein Isomorphismus, so verwenden wir ihn zur Identifikation und schreiben

$$X \oplus Y \;:=\; X \amalg Y \overset{z_{X,Y}}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} X \sqcap Y\;,$$

genannt die *(direkte) Summe* von X und Y. Wir sagen, das Paar (X,Y) *hat eine direkte Summe.*

Wobei Identifikation bedeutet, daß wir Morphismen $X \xrightarrow{\iota_X} X \oplus Y$, $Y \xrightarrow{\iota_Y} X \oplus Y$, $X \oplus Y \xrightarrow{\pi_X} X$ und $X \oplus Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$ haben, die

$$\begin{array}{rclcrcl} \iota_X \pi_X &=& 1 && \iota_X \pi_Y &=& 0 \\ \iota_Y \pi_X &=& 0 && \iota_Y \pi_Y &=& 1 \end{array}$$

erfüllen.

Ist $Z \simeq X \oplus Y$, so heißt X ein *(direkter) Summand* von Z.

Habe im folgenden jedes Paar von Objekten in $\mathcal{C}$ eine direkte Summe.

Sei $X \xrightarrow{\Delta} X \oplus X$ durch $\Delta\pi_1 = \Delta\pi_2 = 1_X$ und $Y \oplus Y \xrightarrow{\nabla} Y$ durch $\iota_1\nabla = \iota_2\nabla = 1_Y$ definiert, wobei ι_i resp. π_i für $i \in \{1,2\}$ die zu Coprodukt resp. Produkt zugehörigen Morphismen bezeichne.

Gegeben $X \xrightarrow{f} Y$ und $X' \xrightarrow{f'} Y'$, definieren wir $X \oplus X' \xrightarrow{f\oplus f'} Y \oplus Y'$ durch

$$\begin{array}{rclcrcl} \iota_X(f\oplus f')\pi_Y & = & f & \quad & \iota_X(f\oplus f')\pi_{Y'} & = & 0 \\ \iota_{X'}(f\oplus f')\pi_Y & = & 0 & \quad & \iota_{X'}(f\oplus f')\pi_{Y'} & = & f' \, . \end{array}$$

Also z.B. $z_{X,Y} = 1_X \oplus 1_Y$.

Es ist $\iota_X(f\oplus f') = f\iota_Y$ und $\iota_{X'}(f\oplus f') = f'\iota_{Y'}$, wie man jeweils nach Kompositition mit π_Y und mit $\pi_{Y'}$ feststellt.

Für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ und $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z'$ ist $(f\oplus f')(g\oplus g') = (fg)\oplus(f'g')$. In der Tat werden

$$\begin{array}{rclclcl} \iota_X(f\oplus f')(g\oplus g') & = & f\iota_Y(g\oplus g') & = & fg\iota_Z & = & \iota_X(fg)\oplus(f'g') \\ \iota_{X'}(f\oplus f')(g\oplus g') & = & f'\iota_{Y'}(g\oplus g') & = & f'g'\iota_{Z'} & = & \iota_{X'}(fg)\oplus(f'g') \, . \end{array}$$

Setze nun für $X \overset{f}{\underset{f'}{\rightrightarrows}} Y$

$$f + f' \;:=\; \Delta(f\oplus f')\nabla \;\in\; {}_{\mathcal{C}}(X,Y) \, .$$

Definition. Eine Kategorie $\mathcal{A}$ heißt *additiv,* falls sie ein Nullobjekt enthält, falls jedes Paar von Objekten eine direkte Summe hat, und falls für jedes Objekt X in $\mathcal{A}$ ein Endomorphismus -1_X von X existiert mit $1_X + (-1_X) = 0$.

In Aufgabe 7.(1) wird verifiziert, daß für je zwei Objekte X und Y einer additiven Kategorie $\mathcal{A}$ die Morphismenmenge ${}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ mit der Operation $(+)$ eine abelsche Gruppe bildet, und daß $(f+f')(g+g') = fg + fg' + f'g + f'g'$ für $X \overset{f}{\underset{f'}{\rightrightarrows}} Y \overset{g}{\underset{g'}{\rightrightarrows}} Z$ darin.

Beispiel.

(1) Ist R ein Ring, so ist R-Mod eine additive Kategorie.

(2) Ist $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie, so auch $\mathcal{A}^\circ$.

1.2.3 Matrixkalkül

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Es lassen sich durch Iteration auch direkte Summen $\bigoplus_{i\in[1,n]} X_i = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ von endlichen Tupeln $(X_1,\ldots,X_n)$ von Objekten bilden. Ist $n = 1$, so ist die direkte Summe des Tupels (X_1) gerade X_1, ist $n = 0$, so ist die direkte Summe des leeren Tupels () gleich 0.

Die Beschränkung auf *endliche* direkte Summen ist nicht artifiziell. Der Leser kann sich überlegen, daß allgemein das Produkt von, sagen wir, abelschen Gruppen gerade deren cartesisches Produkt ist, wohingegen ihr Coprodukt darin als die Untergruppe der Tupel mit nur endlich vielen Einträgen ungleich 0 wiedergefunden wird. Vgl. Aufgabe 19.(1).

Der induzierte Morphismus vom Coprodukt in das Produkt von $(X_1, \ldots, X_n)$ ist ein Isomorphismus, so daß wir über Morphismen

$$X_i \xrightarrow{\iota_i} X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \xrightarrow{\pi_j} X_j$$

verfügen für $i,\ j \in [1,n]$, mit der Eigenschaft, daß $\iota_i \pi_j = \partial_{i,j}$.

Ein Morphismus

$$X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \xrightarrow{f} Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m$$

ist durch Angabe der Matrix $(f_{i,j})_{i\in[1,n],\, j\in[1,m]} := (\iota_i f \pi_j)_{i,j}$ eindeutig festgelegt, wobei $f_{i,j} \in \mathcal{A}(X_i, Y_j)$.

Umgekehrt läßt sich durch beliebige Matrixeinträge $f_{i,j} \in \mathcal{A}(X_i, Y_j)$ ein Morphismus von $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ nach $Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m$ definieren. D.h. als abelsche Gruppen ist

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n,\ Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{i,j} \mathcal{A}(X_i, Y_j) \\ f & \longmapsto & (\iota_i f \pi_j)_{i,j} \end{array}$$

und wir verwenden diesen Isomorphismus in der Notation als Identifikation, d.h. wir sehen Matrizen von Morphismen zwischen den Summanden als Morphismus zwischen den Summen an.

So werden z.B.

$$\begin{array}{rcl} (X \xrightarrow{\iota_X} X \oplus Y) & = & (X \xrightarrow{(1\,0)} X \oplus Y) \\ (X \oplus Y \xrightarrow{\pi_X} X) & = & (X \oplus Y \xrightarrow{\binom{1}{0}} X) \\ (X \xrightarrow{\Delta} X \oplus X) & = & (X \xrightarrow{(1\,1)} X \oplus X) \\ (Y \oplus Y \xrightarrow{\nabla} Y) & = & (Y \oplus Y \xrightarrow{\binom{1}{1}} Y) \\ (X \oplus X' \xrightarrow{f \oplus f'} Y \oplus Y') & = & (X \oplus X' \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{smallmatrix}\right)} Y \oplus Y')\ . \end{array}$$

Lemma (Matrixmultiplikation). *Es wird die Komposition*

$$\left(\bigoplus_i X_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_j Y_j \xrightarrow{(g_{j,k})_{j,k}} \bigoplus_k Z_k \right) = \left(\bigoplus_i X_i \xrightarrow{(\sum_j f_{i,j} g_{j,k})_{i,k}} \bigoplus_k Z_k \right)\ .$$

Kurz gefaßt, es gelten die Rechenregeln der Linearen Algebra, sofern man dort mit Zeilenvektoren arbeitet.

Beweisskizze. In Matrixschreibweise lautet die Definition der Addition

$$u + v \;=\; (1\,1) \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \binom{1}{1}\ .$$

Nach den vorgenommenen Identifikationen der Assoziativität der direkten Summe wird daher z.B. für drei Summanden

$$\begin{aligned}(u+v)+w &= \left(\begin{smallmatrix}1&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}u+v&0\\0&w\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\\ &= \left(\begin{smallmatrix}1&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}u&0&0\\0&v&0\\0&0&w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\\ &= \left(\begin{smallmatrix}1&1&1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}u&0&0\\0&v&0\\0&0&w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ ,\end{aligned}$$

wobei die Komposition $\left(\begin{smallmatrix}1&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\end{smallmatrix}\right)$ durch Komposition mit den π_i verifiziert wird, und analog auf der rechten Seite. Allgemeiner ist

$$\sum_{i\in[1,n]} u_i = \left(\begin{smallmatrix}1&\dots&1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}u_1&&\\&\ddots&\\&&u_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\ .$$

Nun zur eigentlich zu zeigenden Gleichung. Nach Komposition mit ι_i von links und π_k von rechts dürfen wir annehmen, daß die äußeren beiden Summen aus nur einem Summanden bestehen.

Es wird

$$\left(\begin{smallmatrix}f_1&\dots&f_n\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&\dots&1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}f_1&&\\&\ddots&\\&&f_n\end{pmatrix}\ ,$$

wie man mittels Komposition mit π_j von rechts verifiziert; und damit und der dazu dualen Gleichung wird

$$\begin{aligned}\left(\begin{smallmatrix}f_1&\dots&f_n\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_n\end{pmatrix} &= \left(\begin{smallmatrix}1&\dots&1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}f_1&&\\&\ddots&\\&&f_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_1&&\\&\ddots&\\&&g_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\\ &= \left(\begin{smallmatrix}1&\dots&1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}f_1g_1&&\\&\ddots&\\&&f_ng_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\\ &= f_1g_1+\dots+f_ng_n\ .\end{aligned}$$

□

Beispiel. In $\mathbf{Z}$-Mod ist $\left(\begin{smallmatrix}2&0\\1&2\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{End}(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})$ nilpotent von Nilpotenzgrad 3, da $\left(\begin{smallmatrix}2&0\\1&2\end{smallmatrix}\right)^2=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&4\end{smallmatrix}\right)\neq 0$, aber $\left(\begin{smallmatrix}2&0\\1&2\end{smallmatrix}\right)^3=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)=0$.

1.3 Funktoren und Transformationen

1.3.1 Funktoren

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein *(kovarianter) Funktor* $\mathcal{C}\xrightarrow{F}\mathcal{D}$ besteht aus zwei Abbildungen

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}_0 & \xrightarrow{F_0} & \mathcal{D}_0\\ \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{F_1} & \mathcal{D}_1\end{array}$$

derart, daß $F_0 \circ s_{\mathcal{C}} = s_{\mathcal{D}} \circ F_1$, $F_0 \circ t_{\mathcal{C}} = t_{\mathcal{D}} \circ F_1$ und $F_1 \circ i_{\mathcal{C}} = i_{\mathcal{D}} \circ F_1$, und derart, daß für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}$ stets die Gleichheit

$$F_1(f)F_1(g) \;=\; F_1(fg)$$

besteht.

In der Regel unterschlägt man die Indizes und schreibt kurz $Ff = F(f) := F_1(f)$ für einen Morphismus f in $\mathcal{C}$ und $FX = F(X) := F_0(X)$ für ein Objekt X in $\mathcal{C}$.

Die angeführten Verträglichkeiten bedeuten zunächst, daß $F(X \xrightarrow{f} Y) = F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$ stets, daß $F(1_X) = 1_{F(X)}$ stets, und daß, wie angegeben, $F(f)F(g) \;=\; F(fg)$ stets.

Sind $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$ zwei Funktoren, so ist ihr Kompositum $\mathcal{C} \xrightarrow{G\circ F} \mathcal{E}$ definiert via $(G \circ F)_0 := G_0 \circ F_0$ und $(G \circ F)_1 := G_1 \circ F_1$, und wiederum ein Funktor.

> Da sich die Anzahl der zu komponierenden Funktoren in Grenzen halten wird, verwenden wir die “traditionelle” Kompositionsrichtung.

Der identische Funktor $1_{\mathcal{C}}$ besteht aus $1_{\mathcal{C}_0}$ und $1_{\mathcal{C}_1}$.

Betrachte für ein Paar (X, Y) von Objekten von $\mathcal{C}$ die Abbildung ${}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow {}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$, $f \longmapsto Ff$.

Der Funktor F heißt *voll,* wenn diese Abbildung stets surjektiv ist.

Der Funktor F heißt *treu,* wenn diese Abbildung stets injektiv ist.

Der Funktor F heißt *dicht,* falls für jedes Objekt M von $\mathcal{D}$ ein Objekt X von $\mathcal{C}$ so existiert, daß $FX \simeq M$.

Bemerkung. Ein Funktor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ induziert eine Abbildung auf den Isoklassen, da das Bild eines Isomorphismus unter einem Funktor wieder ein Isomorphismus ist. Es ist F dicht genau dann, wenn diese induzierte Abbildung surjektiv ist.

Konvention. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein *kontravarianter Funktor von* $\mathcal{C}$ *nach* $\mathcal{D}$ ist ein Funktor von $\mathcal{C}^\circ$ nach $\mathcal{D}$. Wir schreiben ihn

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\circ & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ (X \xrightarrow{f} X') & \longmapsto & (FX \xleftarrow{Ff} FX')\,, \end{array}$$

was insofern ein Mißbrauch von Bezeichnungen ist, als daß wir den Morphismus $X \xrightarrow{f} X'$ in $\mathcal{C}$ und nicht, wie wir eigentlich müßten, als $X \xleftarrow{f} X'$ in $\mathcal{C}^\circ$ notieren.

Beispiel.

(1) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

Die Zuweisung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{{}_{\mathcal{C}}(X,-)} & \text{(Mengen)} \\ (Y \xrightarrow{y} Y') & \longmapsto & \big({}_{\mathcal{C}}(X, Y) \xrightarrow{{}_{\mathcal{C}}(X,y)} {}_{\mathcal{C}}(X, Y') \;:\; f \longmapsto fy\big) \end{array}$$

definiert einen Funktor, den *(kovarianten) Homfunktor von* X*.*

Die Zuweisung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\circ & \xrightarrow{{}_{\mathcal{C}}(-,X)} & (\text{Mengen}) \\ (Y \xrightarrow{y} Y') & \longmapsto & \left({}_{\mathcal{C}}(Y,X) \xleftarrow{{}_{\mathcal{C}}(y,X)} {}_{\mathcal{C}}(Y',X) \;:\; yf \longleftarrow\!\dashv f \right) \end{array}$$

definiert einen Funktor, den *(kontravarianten) Homfunktor von* X (vgl. obige Konvention).

Manchmal schreibt man auch $(-)y := {}_{\mathcal{C}}(X,y)$ und $y(-) := {}_{\mathcal{C}}(y,X)$.

Im allgemeinen sind sowohl ${}_{\mathcal{C}}(X,-)$ als auch ${}_{\mathcal{C}}(-,X)$ weder voll noch treu noch dicht.

(2) Wie (1), nur mit einer additiven Kategorie $\mathcal{C}$ und dafür den Homfunktoren mit Zielkategorie $\mathbf{Z}$-Mod. Wir sagen, es *nehmen* für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ die Homfunktoren ${}_{\mathcal{C}}(X,-)$ und ${}_{\mathcal{C}}(-,X)$ *Werte in* $\mathbf{Z}$-Mod *an.*

(3) Sei k ein Körper. Für $V \in \operatorname{Ob} k$-Mod nimmt der Funktor ${}_{k\text{-Mod}}(-,V)$ Werte in k-Mod an. Insbesondere nimmt die *Dualität* $(-)^* := {}_{k\text{-Mod}}(-,k)$ Werte in k-Mod an. Hierfür gilt die bekannte Beziehung $(fg)^* = g^* f^*$ für k-lineare Abbildungen $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} X$ zwischen Vektorräumen über k.

(4) Sei G eine Gruppe. Eine G*-Menge* ist ein Paar (M,φ), bestehend aus einer Menge M und einem Gruppenmorphismus $G \xrightarrow{\varphi} (\operatorname{Aut} M)^\circ$. Meist schreibt man $M = (M,\varphi)$ und $gm := (m)(\varphi(g))$ für $g \in G$ und $m \in M$. Ein *Morphismus von* G*-Mengen* zwischen (M,φ) und (N,ψ) ist eine Abbildung $M \xrightarrow{f} N$ von Mengen derart, daß $f\psi(g) = \varphi(g)f$ für alle $g \in G$, i.e. derart, daß $g(mf) = (gm)f$ für alle $m \in M$ und alle $g \in G$. Die Kategorie der G-Mengen und ihrer Morphismen werde mit $(G\text{-Mengen})$ bezeichnet.

Insbesondere gibt es die *triviale* einelementige G-Menge $\{*\}$, auf welcher alle Elemente von G identisch operieren. Für eine G-Menge M wird

$$\begin{array}{rcl} {}_{(G\text{-Mengen})}(\{*\},M) & = & \{\{*\} \xrightarrow{f} M \;:\; g(*f) = *f \text{ für alle } g \in G\} \\ & = & \{m \in M \;:\; gm = m \text{ für alle } g \in G\} \;=\; \operatorname{Fix}_G M \;=:\; M^G\,, \end{array}$$

wobei die zweite Gleichheit als Identifikation zu verstehen ist. Wir erhalten also einen Funktor $(-)^G := {}_{(G\text{-Mengen})}(\{*\},-)$, welcher auf Morphismen durch Einschränken auf die jeweiligen Fixpunktmengen operiert – der Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ von G-Mengen wird auf die Abbildung $M^G \xrightarrow{f^G} N^G$ eingeschränkt.

Wir bemerken noch, daß wir alternativ eine G-Menge auch als einen Funktor von G°, mit G gesehen als Kategorie, nach (Mengen) hätten definieren können.

(5) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Eine *Teilkategorie* $\mathcal{D}$ besteht aus Teilmengen $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{C}_0$ und $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{C}_1$ derart, daß die Operationen s, t, i und die Komposition nach $\mathcal{D}$ einschränken. Wir schreiben $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. Wir haben einen *Inklusionsfunktor* $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$, der jedes Objekt und jeden Morphismus von $\mathcal{D}$ auf sich selbst abbildet, nun gesehen als Objekt bzw. als Morphismus von $\mathcal{C}$. Eine Teilkategorie heißt *voll,* wenn der zugehörige Inklusionsfunktor voll ist. Eine volle Teilkategorie $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ ist also durch Angabe von $\mathcal{D}_0$ bestimmt, da für je zwei Objekte $X, Y \in \mathcal{D}_0$ gilt, daß ${}_{\mathcal{D}}(X,Y) = {}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

1.3.2 Transformationen

1.3.2.1 Begriff

Seien $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}$ Funktoren. Eine *(natürliche) Transformation* a von F nach G, geschrieben $F \xrightarrow{a} G$ oder $\begin{tikzcd}\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow a"] & \mathcal{D}\end{tikzcd}$, ist ein Tupel

$$a \;=\; (FX \xrightarrow{aX} GX)_{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}$$

von Morphismen in $\mathcal{D}$ derart, daß für alle Morphismen $X \xrightarrow{x} X'$ in $\mathcal{C}$ das Viereck

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "aX"] \arrow[d, "Fx"'] & GX \arrow[d, "Gx"] \\ FX' \arrow[r, "aX'"] & GX' \end{tikzcd}$$

kommutiert, i.e. es gilt $(aX)(Gx) = (Fx)(aX')$ stets. Diese Eigenschaft wird auch als die *Natürlichkeit von* aX *in* X bezeichnet.

Auf einem Funktor F gibt es die *identische Transformation* $1_F = (1_{FX})_{X\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}}$.

Die Komposition zweier Transformationen $F \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} H$ ist durch

$$ab \;=\; ((ab)X)_{X\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}} \;:=\; ((aX)(bX))_{X\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}}\;,$$

i.e. durch *punktweise* (d.h. objektweise) Komposition gegeben, und ihrerseits eine Transformation $F \xrightarrow{ab} H$.

Sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien, so erhalten wir die Kategorie $[\![\mathcal{C},\mathcal{D}]\!]$, welche als Objekte Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, und welche als Morphismen zwischen je zwei Funktoren F und G die Menge der Transformationen von F nach G hat.

Eine Transformation, die in dieser Kategorie $[\![\mathcal{C},\mathcal{D}]\!]$ ein Isomorphismus ist, heißt auch *Isotransformation* (oder *natürliche Äquivalenz*).

Lemma. *Es ist* $\begin{tikzcd}\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow a"] & \mathcal{D}\end{tikzcd}$ *eine Isotransformation genau dann, wenn für alle* $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$

der Morphismus $FX \xrightarrow{aX} GX$ *ein Isomorphismus ist. Kurz, Isotransformationen kann man punktweise erkennen.*

Beweis. Ist a eine Isotransformation, so ist aX stets ein Isomorphismus. Ist umgekehrt aX stets ein Isomorphismus, so müssen wir zeigen, daß das Tupel $(GX \xrightarrow[\sim]{(aX)^{-1}} FX)_{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}$ eine Transformation darstellt. In der Tat wird für einen Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ aus $\mathcal{C}$

$$(aX)\Big((aX)^{-1}(Ff)\Big)(aY) \;=\; (Ff)(aY) \;=\; (aX)(Gf) \;=\; (aX)\Big((Gf)(aY)^{-1}\Big)(aY)\;,$$

und wir dürfen die Isomorphismen aX und aY kürzen. ▫

Beispiel.

(1) Sei k ein Körper. Wir haben die Transformation $1_{k\text{-Mod}} \xrightarrow{\text{ev}} (-)^{**}$, gegeben durch $X \xrightarrow{\text{ev}X} X^{**}$, $x \longmapsto (\lambda \longmapsto (x)\lambda)$. Dies ist in der Tat eine Transformation, denn gegeben eine k-lineare Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ und ein $x \in X$, so stimmen

$$\begin{array}{lcl} (x)f(\text{ev}Y) & = & (\mu \longmapsto (x)f\mu) \\ (x)(\text{ev}X)f^{**} & = & (\lambda \longmapsto (x)\lambda)f^{**} \;=\; (\mu \longmapsto (x)((\mu)f^*)) \;=\; (\mu \longmapsto (x)f\mu) \end{array}$$

überein. Es ist $\text{ev}X$ monomorph stets. Bezeichet k-mod die Kategorie der endlichdimensionalen Vektorräume, so ist die Einschränkung $1_{k\text{-mod}} \xrightarrow[\sim]{\text{ev}} (-)^{**}$ darauf eine Isotransformation.

(2) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Wir haben einen Funktor

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{C} & \xrightarrow{(-,=)} & [\![\mathcal{C}^\circ, (\text{Mengen})]\!] \\ X & \longmapsto & (-, X) \end{array}$$

Sei $F \in \operatorname{Ob}[\![\mathcal{C}^\circ, (\text{Mengen})]\!]$ ein Funktor von $\mathcal{C}^\circ$ nach (Mengen).

Das *Yonedalemma* besagt, daß die Auswertungsabbildung

$$\begin{array}{rcl} ((-, X), F) & \xrightarrow{e} & FX \\ \alpha & \longmapsto & (\alpha)e \;:=\; (1_X)(\alpha X) \end{array}$$

eine Bijektion ist für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Insbesondere ist $(-,=)$ voll und treu. Siehe Aufgabe 9.

(3) Sei $n \geqslant 0$, sei $\mathcal{C} = \Delta_n$. Sei $\mathcal{D}$ eine Kategorie. Die Kategorie $[\![\Delta_n, \mathcal{D}]\!]$ hat als Objekte Diagramme der Form

$$X \;=\; (X^0 \xrightarrow{x} X^1 \xrightarrow{x} \cdots \xrightarrow{x} X^n)\;,$$

und als Morphismen zwischen zwei solchen Diagrammen X und Y Tupel $(X^i \xrightarrow{f^i} Y^i)_{i \in [0,n]}$, welche

$$\begin{tikzcd} X^0 \arrow[r, "x"] \arrow[d, "f^0"'] & X^1 \arrow[r, "x"] \arrow[d, "f^1"'] & \cdots \arrow[r, "x"] & X^n \arrow[d, "f^n"] \\ Y^0 \arrow[r, "y"] & Y^1 \arrow[r, "y"] & \cdots \arrow[r, "y"] & Y^n \end{tikzcd}$$

zu einem kommutativen Diagramm machen, i.e. $f^i y = x f^j$ für $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ – wobei bei den Morphismen $X^i \xrightarrow{x} X^j$ die Indizierung unterschlagen wurde.

(4) Die Kategorie der G-Mengen kann man alternativ als $[\![G^\circ, (\text{Mengen})]\!]$ definieren.

1.3.2.2 Äquivalenzen

Sei $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ ein Funktor. Es heißt F eine *Äquivalenz,* falls es einen Funktor $\mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{D}$ gibt mit $G \circ F \simeq 1_\mathcal{C}$ und $F \circ G \simeq 1_\mathcal{D}$, geschrieben $\mathcal{C} \underset{\sim}{\xrightarrow{F}} \mathcal{D}$. Existiert eine Äquivalenz zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$, so heißen diese beiden Kategorien *äquivalent,* geschrieben $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.

Lemma. *Ein Funktor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ ist genau dann eine Äquivalenz, wenn er voll, treu und dicht ist.*

Ist F voll und treu, und ist dazuhin F_0 eine surjektive Abbildung von $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ nach $\operatorname{Ob}\mathcal{D}$, so finden wir darüberhinaus einen Funktor $\mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{D}$, für welchen $G \circ F \simeq 1_\mathcal{C}$ und $F \circ G = 1_\mathcal{D}$ ist.

Beweis. Ist $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ eine Äquivalenz, so gibt es ein $\mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{D}$ und Isotransformationen $F \circ G \underset{\sim}{\xrightarrow{\alpha}} 1_\mathcal{D}$ und $G \circ F \underset{\sim}{\xrightarrow{\beta}} 1_\mathcal{C}$. Um zu zeigen, daß F dicht ist, sei uns ein $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ vorgegeben. Wir müssen zeigen, daß es ein $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ gibt mit $FX \simeq Y$. Mit $X = GY$ ist in der Tat $F(GY) \underset{\sim}{\xrightarrow{\alpha Y}} Y$. Ferner müssen wir zeigen, daß die Abbildung $(X, X') \longrightarrow (FX, FX')$, $(X \xrightarrow{f} X') \longmapsto (FX \xrightarrow{Ff} FX')$ für alle X, $X' \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ bijektiv ist. Dazu wollen wir die Behauptung zeigen, daß die Abbildung $(FX, FX') \longrightarrow (X, X')$, $(FX \xrightarrow{g} FX') \longmapsto (X \underset{\sim}{\xrightarrow{(\beta X)^{-1}}} GFX \xrightarrow{Gg} GFX' \underset{\sim}{\xrightarrow{\beta X'}} X')$ unsere Abbildung beidseitig invertiert. Sei zum einen $X \xrightarrow{f} X'$ gegeben. Anwenden der beiden Abbildungen liefert $(\beta X)^{-1}(GFf)(\beta X') = f$, da β eine Transformation ist. Sei zum anderen $FX \xrightarrow{g} FX'$ gegeben. Anwenden der beiden Abbildungen liefert $(F\beta X)^{-1}(FGg)(F\beta X')$. Bleibt also zu zeigen, daß dies gleich g ist.

Beachte zunächst, daß allgemein $(\beta GFZ)(\beta Z) = (GF\beta Z)(\beta Z)$ für $Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ wegen β Transformation. Also ist auch $(\beta GFZ) = (GF\beta Z)$, da βZ Isomorphismus ist.

Da α eine Isotransformation ist, ist $(\alpha FX)g' = (FGg')(\alpha FX')$, oder, in anderen Worten, $g' = (\alpha FX)^{-1}(FGg')(\alpha FX')$ für $FX \xrightarrow{g'} FX'$. Somit wird in der Tat

$$\begin{array}{rcl}(F\beta X)^{-1}(FGg)(F\beta X') & = & (\alpha FX)^{-1}(FG\Big((F\beta X)^{-1}(FGg)(F\beta X')\Big))(\alpha FX') \\ & = & (\alpha FX)^{-1}F\Big((GF\beta X)^{-1}(GFGg)(GF\beta X')\Big)(\alpha FX') \\ & = & (\alpha FX)^{-1}F\Big((\beta GFX)^{-1}(GFGg)(\beta GFX')\Big)(\alpha FX') \\ & = & (\alpha FX)^{-1}F\Big((\beta GFX)^{-1}(\beta GFX)(Gg)\Big)(\alpha FX') \\ & = & (\alpha FX)^{-1}F(Gg)(\alpha FX') \\ & = & g\,. \end{array}$$

Sei nun umgekehrt F voll, treu und dicht. Wähle für jedes $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ ein Objekt X_Y zusammen mit einem Isomorphismus $F(X_Y) \xrightarrow[\sim]{\vartheta_Y} Y$ ([2]). Beachte hierbei, daß X und X_{FX} nicht notwendig übereinstimmen, und daß auch ϑ_{FX} nicht notwendig eine Identität ist.

Ist F_0 sogar surjektiv, so wählen wir $F(X_Y) = Y$ und $\vartheta_Y = 1_Y$ für alle $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$.

Für $Y \xrightarrow{g} Y'$ in $\mathcal{D}$ setzen wir zunächst $GY := X_Y$, entsprechend $GY' := X_{Y'}$, und charakterisieren

$$GY \;=\; X_Y \;\xrightarrow{Gg}\; X_{Y'} \;=\; GY'$$

durch $FGg = \vartheta_Y g \vartheta_{Y'}^{-1}$. Dies ist eine wohldefinierte Abbildung von $\mathcal{D}_1$ nach $\mathcal{C}_1$, da F voll und treu ist. Es ist $G1_Y = 1_{GY}$, da $F(1_{GY}) = 1_{FGY} = \vartheta_Y 1_Y \vartheta_Y^{-1}$. Bleibt zu zeigen, daß G mit der Komposition verträglich ist, daß $F \circ G \simeq 1_{\mathcal{D}}$ und daß $G \circ F \simeq 1_{\mathcal{C}}$.

Seien $Y \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{g'} Y''$ Morphismen in $\mathcal{D}$. Es ist $GY \xrightarrow{Gg} GY'$ charakterisiert durch $FGg = \vartheta_Y g \vartheta_{Y'}^{-1}$ und $GY' \xrightarrow{Gg'} GY''$ durch $FGg' = \vartheta_{Y'} g' \vartheta_{Y''}^{-1}$. Somit ist

$$F((Gg)(Gg')) \;=\; (FGg)(FGg') \;=\; (\vartheta_Y g \vartheta_{Y'}^{-1})(\vartheta_{Y'} g' \vartheta_{Y''}^{-1}) \;=\; \vartheta_Y (gg') \vartheta_{Y''}^{-1}\,,$$

was $(Gg)(Gg')$ dazu qualifiziert, als $G(gg')$ Verwendung zu finden. Somit ist G ein Funktor.

Setze $\vartheta := (FGY \xrightarrow[\sim]{\vartheta_Y} Y)_{Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}}$. Nach Charakterisierung von Gg für $Y \xrightarrow{g} Y'$ über $(FGg)(\vartheta_{Y'}) = \vartheta_Y g$ ist ϑ eine Isotransformation von $F \circ G$ nach $1_{\mathcal{D}}$. Somit ist $F \circ G \simeq 1_{\mathcal{D}}$.

Ist F_0 nun sogar surjektiv, und also $\vartheta_Y = 1_Y$ gewählt für alle $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, so ist $F \circ G = 1_{\mathcal{D}}$.

Wir haben für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ einen Isomorphismus $FGFX = FG(FX) \xrightarrow[\sim]{\vartheta_{FX}} FX$, und wegen F voll und treu folglich auch einen Isomorphismus $GFX \xrightarrow[\sim]{\eta_X} X$, der durch $F(\eta_X) = \vartheta_{FX}$ charakterisiert ist. Nun ist für $X \xrightarrow{f} X'$ in $\mathcal{C}$

$$F\Big(\eta_X f\Big) \;=\; (\vartheta_{FX})(Ff) \;=\; (FGFf)(\vartheta_{FX'}) \;=\; F\Big((GFf)\eta_{X'}\Big)$$

wegen F treu auch $\eta_X f = (GFf)\eta_{X'}$. Somit ist η eine Isotransformation von $G \circ F$ nach $1_{\mathcal{C}}$, und damit ist $G \circ F \simeq 1_{\mathcal{C}}$. ▫

Die Argumentationsweise in der zweiten Hälfte des vorstehenden Beweis, über Wahlen und indirekte Definitionen, tritt in der Kategorientheorie eher selten auf.

Beispiel.

(1) Eine volle Teilkategorie $\mathcal{D}$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt ein *Skelett* von $\mathcal{C}$, falls $\operatorname{Ob}\mathcal{D}$ ein Repräsentantensystem der Isoklassen von $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ darstellt. Es ist der Inklusionsfunktor $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ eine Äquivalenz.

(2) Sei k ein Körper. Sei k-mod die Kategorie der endlichdimensionalen Vektorräume. Es ist $(k\text{-mod})^\circ \xrightarrow{(-)^*} k\text{-mod}$ eine Äquivalenz, mit der Umkehrung $k\text{-mod} \xrightarrow{(-)^*} (k\text{-mod})^\circ$. In der Tat ist $(-)^{**} \simeq 1$.

[2]Dieser Schritt verwendet das Auswahlaxiom.

Vorsicht, es sind k-Mod und $(k\text{-Mod})^\circ$ nicht äquivalent! In k-Mod gibt es ein (unendliches) Tupel von Objekten, für welches der induzierte Morphismus vom Coprodukt in das Produkt monomorph, aber nicht epimorph ist — wohingegen in $(k\text{-Mod})^\circ$, und so auch in allen dazu äquivalenten Kategorien, ein solcher Morphismus stets epimorph ist, da er gesehen in k-Mod stets monomorph ist.

1.3.2.3 Adjunktionen

Sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien, so definieren wir ihr direktes Produkt $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ durch $(\mathcal{C} \times \mathcal{D})_0 := \mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}_0$, durch $(\mathcal{C} \times \mathcal{D})_1 := \mathcal{C}_1 \times \mathcal{D}_1$ und durch komponentenweise Anwendung von s, t, i und Komposition.

Seien Funktoren $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ gegeben. Es heißt F *linksadjungiert* zu G, oder, äquivalent, G *rechtsadjungiert* zu F, geschrieben $F \dashv G$, falls

$$ {}_{\mathcal{D}}(F(-),=) \;\simeq\; {}_{\mathcal{C}}(-,G(=)) $$

in $[\![\mathcal{C}^\circ \times \mathcal{D}, (\text{Mengen})]\!]$. Ausgeschrieben bedeutet dies, es gibt ein Tupel $(\Phi_{X,Y})_{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C},\, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}}$ von Isomorphismen, der Übersichtlichkeit halber unten indiziert, verlaufend zwischen

$$ {}_{\mathcal{D}}(FX,Y) \xrightarrow[\sim]{\Phi_{X,Y}} {}_{\mathcal{C}}(X,GY)\,, $$

und zwar derart, daß für alle Morphismen $X' \xrightarrow{f} X$ in $\mathcal{C}$, $Y \xrightarrow{g} Y'$ in $\mathcal{D}$ und $FX \xrightarrow{s} Y$ in $\mathcal{D}$

$$ f((s)\Phi_{X,Y})(Gg) \;=\; ((Ff)sg)\Phi_{X',Y'} $$

ist.

Beispiel.

(1) Der Vergißfunktor $(\text{Gruppen}) \xrightarrow{V} (\text{Mengen})$ ordnet einer Gruppe ihre unterliegende Menge, und einem Gruppenmorphismus seine unterliegende Abbildung zu. Wir vergessen also die Gruppenstruktur resp. die Verträglichkeit mit der Gruppenstruktur.

Sei auf der anderen Seite $(\text{Mengen}) \xrightarrow{F} (\text{Gruppen})$ der Funktor, der einer Menge die freie Gruppe auf dieser Menge, und jeder Mengenabbildung den induzierten Morphismus der freien Gruppen zuordnet.

Wir behaupten, es ist $F \dashv V$. Dazu geben wir für eine Menge M und eine Gruppe G die Bijektion wie folgt an.

$$ \begin{array}{rcl} {}_{(\text{Gruppen})}(FM,G) & \xrightarrow{\Phi_{M,G}} & {}_{(\text{Mengen})}(M,VG) \\ s & \longmapsto & s|_M\,. \end{array} $$

Die universelle Eigenschaft der freien Gruppe besagt gerade, daß es sich um eine Bijektion handelt. Prüfen wir nach, daß dies eine Transformation von Funktoren auf $(\text{Mengen})^\circ \times (\text{Gruppen})$ darstellt. Sei hierzu $M' \xrightarrow{f} M$ eine Abbildung und $G \xrightarrow{g} G'$

ein Gruppenmorphismus. Bezeichnen wir mit $M \xrightarrow{i} FM$ und $M' \xrightarrow{i'} FM'$ die Inklusionabbildungen, so erhalten wir in der Tat

$$\begin{array}{rcl} f(s|_M)(Vg) & = & f\,i\,s\,g \\ & = & i'(Ff)sg \\ & = & ((Ff)sg)|_{M'}\ . \end{array}$$

(2) Sei G eine Gruppe. Wir haben einen Inklusionsfunktor (Mengen) $\xrightarrow{I}$ (G-Mengen), der einer Menge M die G-Menge M zuordnet, ausgestattet mit der trivialen G-Operation. Ferner sei an den Fixpunktfunktor (G-Mengen) $\xrightarrow{(-)^G}$ (Mengen) erinnert. Schließlich haben wir einen Funktor (G-Mengen) $\xrightarrow{B}$ (Mengen), der einer G-Menge M die Menge ihrer Bahnen auf M zuordnet, und einem Morphismus $M \xrightarrow{f} M'$ von G-Mengen die induzierte Abbildung auf den Bahnen. Beachte hierzu, daß Elemente einer Bahn von M unter einem Morphismus von G-Mengen auf Elemente einer Bahn von M' abgebildet werden. Wir behaupten

$$B \dashv I \dashv (-)^G\ .$$

Zu $B \dashv I$. Sei M eine G-Menge und X eine Menge. Wir haben die Abbildung $M \xrightarrow{m} BM$, die jedes Element auf seine Bahn schickt. Die verlangte Bijektion ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} {}_{\text{(Mengen)}}(BM, X) & \xrightarrow{\Phi_{M,X}} & {}_{(G\text{-Mengen})}(M, IX) \\ f & \longmapsto & mf\ . \end{array}$$

Da jeder Morphismus von G-Mengen von M in eine G-Menge IX mit trivialer Operation konstant auf den Bahnen ist, faktorisiert er über m. Dies liefert die Umkehrabbildung. Man prüft nach, daß dies eine Transformation ist.

Zu $I \dashv (-)^G$. Sei X eine Menge und N eine G-Menge. Sei $N^G \xrightarrow{n} N$ die Inklusionsabbildung. Die verlangte Bijektion ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} {}_{(G\text{-Mengen})}(IX, N) & \xleftarrow{\Psi_{X,N}} & {}_{\text{(Mengen)}}(X, N^G) \\ fn & \longleftarrow\!\!| & f \end{array}$$

Da jeder Morphismus von G-Mengen von einer G-Menge IX mit trivialer Operation in eine G-Menge N sein Bild in N^G hat, ist dies in der Tat eine Bijektion. Man prüft nach, daß dies eine Transformation ist, und zwar am besten in der angegebenen Richtung von (X, N^G) nach (IX, N).

Ohne Begründung sei angemerkt, daß der Linksadjungierte zu einem Funktor bis auf Isotransformation eindeutig bestimmt ist, so er existiert; dito der Rechtsadjungierte. (Man kann mit dem Yonedalemma aus Aufgabe 9.(3) aus $(-, G(=)) \simeq (F(-), =) \simeq (-, G'(=))$ folgern, daß $G \simeq G'$.)

Beispiel (2) zeigt nun, daß sich für einen gegebenen Funktor sich dessen Links- und Rechtsadjungierter unterscheiden, so sie beide existieren.

1.4 Additive Funktoren

1.4.1 Begriff

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien. Ein Funktor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ heißt *additiv*, wenn er für jedes Paar (X, Y) von Objekten von $\mathcal{A}$ folgende Eigenschaften (0, 1, 2) hat.

(0) Es ist $F0$ ein Nullobjekt in $\mathcal{B}$.

(1) Es ist $F(X \oplus Y)$, zusammen mit $F\iota_X$ und $F\iota_Y$, ein Coprodukt von FX und FY.

(2) Es ist $F(X \oplus Y)$, zusammen mit $F\pi_X$ und $F\pi_Y$, ein Produkt von FX und FY.

Kurz, F bewahrt Null und direkte Summen. Wir dürfen also, qua Wahl des Bildes der direkten Summe als direkte Summe der Bilder, folgende Identifikationen vornehmen.

$$\begin{array}{rcl} F(X \oplus Y) & = & FX \oplus FY \\ F\iota_X & = & \iota_{FX} \\ F\pi_X & = & \pi_{FX} \,. \end{array}$$

Allgemeiner wird

$$F\Big(\bigoplus_i X_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_j Y_j\Big) \;=\; \Big(\bigoplus_i FX_i \xrightarrow{(Ff_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_j FY_j\Big)\,.$$

D.h. F wird in direkten Summen summandenweise und in Matrizen eintragsweise angewandt.

Es ist $1_{\mathcal{A}}$ ein additiver Funktor. Sind $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ additive Funktoren zwischen additiven Kategorien, so ist auch $G \circ F$ ein additiver Funktor.

> Es werden keine speziellen Transformationen zwischen additiven Funktoren ausgezeichnet, sondern einfach alle betrachtet. Kurz, den Begriff der "additiven Transformationen" gibt es nicht.

Bemerkung. Zum Nachweis der Additivität von F genügt es zu zeigen, daß $F0 \simeq 0$ und daß

$$\begin{array}{ccc} FX \oplus FY & \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} F\iota_X \\ F\iota_Y \end{smallmatrix}\right)} & F(X \oplus Y) \\ FX \oplus FY & \xleftarrow{(\,F\pi_X \; F\pi_Y\,)} & F(X \oplus Y) \end{array}$$

sich wechselseitig invertieren. Denn dann zeigen $\iota_{FX}\left(\begin{smallmatrix} F\iota_X \\ F\iota_Y \end{smallmatrix}\right) = F\iota_X$ und $\iota_{FY}\left(\begin{smallmatrix} F\iota_X \\ F\iota_Y \end{smallmatrix}\right) = F\iota_Y$, daß $F(X \oplus Y)$ zusammen mit $F\iota_X$ und $F\iota_Y$ ein Coprodukt von FX und FY ist; und dual für die Produkteigenschaft. Entlang dieser beiden Isomorphismen wird dann identifiziert.

Es ist hierbei $\left(\begin{smallmatrix} F\iota_X \\ F\iota_Y \end{smallmatrix}\right)(\,F\pi_X \; F\pi_Y\,) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ schon allein wegen F Funktor und wegen $F0 \simeq 0$. Zu zeigen bleibt also nur, daß $(\,F\pi_X \; F\pi_Y\,)\left(\begin{smallmatrix} F\iota_X \\ F\iota_Y \end{smallmatrix}\right) = F(\pi_X\iota_X) + F(\pi_Y\iota_Y) \overset{!}{=} 1$, i.e. daß $F\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) +$

$F\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) \overset{!}{=} F\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Oder aber, es genügt zu zeigen, daß $\left(\begin{smallmatrix}F\iota_X\\F\iota_Y\end{smallmatrix}\right)$ epimorph ist. Oder aber, es genügt zu zeigen, daß $\left(\begin{smallmatrix}F\pi_X & F\pi_Y\end{smallmatrix}\right)$ monomorph ist.

Beispiel.

(1) Ist $\mathcal{A} \xrightarrow[\sim]{F} \mathcal{B}$ eine Äquivalenz zwischen additiven Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, so ist F automatisch additiv.

(2) Ist $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie, und ist $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, so sind ${}_{\mathcal{A}}(X,-)$ und ${}_{\mathcal{A}}(-,X)$ additive Funktoren von $\mathcal{A}$ resp. $\mathcal{A}^\circ$ nach $\mathbf{Z}$-Mod. Dies folgt aus der Formel aus §1.2.3, die erlaubt, direkte Summen aus dem Homfunktor herauszuziehen, die also dem Matrixkalkül zugrundeliegt.

(3) Sind R und S Ringe, und ist N ein R-S-Bimodul, so ist $S\text{-Mod} \xrightarrow{N\otimes_S -} R\text{-Mod}$ ein additiver Funktor. Siehe Aufgabe 13.(4).

1.4.2 Quotientenkategorien

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie.

Eine volle Teilkategorie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ heißt *volle additive Teilkategorie,* wenn sie ein Nullobjekt aus $\mathcal{A}$ enthält, und wenn $\operatorname{Ob}\mathcal{B}$ in $\operatorname{Ob}\mathcal{A}$ unter direkten Summen je zweier Objekte abgeschlossen ist. Es ist dann $\mathcal{B}$ eine additive Kategorie, und auch der Inklusionsfunktor $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$ ist dann additiv.

Sei nun $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ eine volle additive Teilkategorie.

> $\mathcal{N}$ wie Null – wir wollen die Objekte von $\mathcal{N}$ in einer geeigneten Kategorie "zu Null machen".

Wir definieren die Kategorie $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ wie folgt. Sei zunächst $(\mathcal{A}/\mathcal{N})_0 = \mathcal{A}_0$. Um die Morphismen zu definieren, setzen wir zunächst für $X,\ Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}_0$

$$ {}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y) \;:=\; \left\{ X \xrightarrow{f} Y \;:\; \begin{array}{l} \text{es gibt eine Faktorisierung} \\ (X \xrightarrow{f} Y) = (X \xrightarrow{f'} N \xrightarrow{f''} Y) \text{ für ein } N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N} \end{array} \right\} . $$

Es ist ${}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y) \leqslant {}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ eine Untergruppe, da zum einen die 0 enthalten ist, und da aus

$$ \begin{array}{rcl} (X \xrightarrow{f} Y) & = & (X \xrightarrow{f'} N \xrightarrow{f''} Y) \\ (X \xrightarrow{g} Y) & = & (X \xrightarrow{g'} M \xrightarrow{g''} Y) \end{array} $$

mit $N,\ M \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$ folgt, daß

$$ (X \xrightarrow{f-g} Y) \;=\; (X \xrightarrow{(f'\ g')} N \oplus M \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f'' \\ -g'' \end{smallmatrix}\right)} Y) \;\in\; {}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y) \,. $$

Sei nun für $X,\ Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$

$$ {}_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}(X,Y) \;:=\; {}_{\mathcal{A}}(X,Y)/{}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y) \,, $$

was zugleich $(\mathcal{A}/\mathcal{N})_1$, $s_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}$ und $t_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}$ festlegt. Der identische Morphismus auf X in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ sei die Restklasse des identischen Morphismus 1_X in $\mathcal{A}$. Um zu zeigen, daß die Komposition wohldefiniert ist, müssen wir nachweisen, daß für $f \in {}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y)$ und für $X' \xrightarrow{x} X$, $Y \xrightarrow{y} Y'$ beliebig, auch $xfy \in {}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X',Y')$ liegt. Faktorisiert aber f über ein Objekt von $\mathcal{N}$, so gilt dies auch für xfy.

Wir unterscheiden unter Mißbrauch der Notation die Restklassen in der Schreibung nicht von ihren Repräsentanten.

In Aufgabe 15.(1) wird verifiziert, daß $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ eine additive Kategorie ist, und daß der Restklassenfunktor $\mathcal{A} \xrightarrow{Q} \mathcal{A}/\mathcal{N}$, $(X \xrightarrow{f} Y) \longmapsto (X \xrightarrow{f} Y)$ additiv ist.

Wir bemerken, daß $QN \simeq 0$ für $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.

Ferner hat dieser Restklassenfunktor $\mathcal{A} \xrightarrow{Q} \mathcal{A}/\mathcal{N}$ folgende universelle Eigenschaft.

> Für jeden additiven Funktor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$, für den $FN \simeq 0$ für alle $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, gibt es genau einen additiven Funktor $\mathcal{A}/\mathcal{N} \xrightarrow{\bar{F}} \mathcal{B}$ mit $\bar{F} \circ Q = F$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{B} \\ \mathcal{A}/\mathcal{N} \arrow[ur, "\bar{F}"'] & \end{tikzcd}$$

Dies wird in Aufgabe 15.(2) überprüft.

Beispiel. Sei $\mathbf{Z}$-mod die Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen. Sei darin $\mathbf{Z}$-free die volle additive Teilkategorie der endlich erzeugten freien abelschen Gruppen, und $\mathbf{Z}$-tors die volle additive Teilkategorie der endlichen (Torsions)moduln. Dann ist die Komposition

$$(\mathbf{Z}\text{-tors} \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-mod}/\mathbf{Z}\text{-free}) \;=\; (\mathbf{Z}\text{-tors} \hookrightarrow \mathbf{Z}\text{-mod} \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-mod}/\mathbf{Z}\text{-free})$$

eine Äquivalenz. In der Tat ist sie voll als Komposition zweier voller Funktoren; und treu, da nur der Nullmorphismus zwischen endlichen abelschen Gruppen über eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe faktorisiert. Sie ist ferner dicht, da die Inklusion $X_{\text{tors}} \xrightarrow{i} X$ des Torsionssummanden in eine endlich erzeugte abelsche Gruppe X in $\mathbf{Z}$-mod$/\mathbf{Z}$-free beidseitig von der Projektion $X \xrightarrow{p} X_{\text{tors}}$ auf den Torsionssummanden invertiert wird.

1.5 Komplexe

Ein kleiner Vorgriff. In §1.6 werden wir den i-ten rechtsabgeleiteten Funktor R^iF eines additiven Funktors R-Mod $\xrightarrow{F}$ S-Mod definieren als

$$(R\text{-Mod} \xrightarrow{\mathrm{R}^iF} S\text{-Mod}) \;:=\; (R\text{-Mod} \xrightarrow{\mathrm{IRes}} \mathrm{K}(R\text{-Mod}) \xrightarrow{\mathrm{K}(F)} \mathrm{K}(S\text{-Mod}) \xrightarrow{\mathrm{H}^i} S\text{-Mod})\,.$$

Der nun folgende Abschnitt stellt dafür die Mittel bereit.

1.5.1 Die Homotopiekategorie

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Mittels punktweise gebildeter direkter Summen ist $[\![\mathbf{Z},\mathcal{A}]\!]$ additiv. Sei $\mathrm{C}(\mathcal{A}) \subseteq [\![\mathbf{Z},\mathcal{A}]\!]$ die volle additive Teilkategorie, deren Objekte

$$X \;=\; (\cdots \xrightarrow{d} X^i \xrightarrow{d} X^{i+1} \xrightarrow{d} X^{i+2} \xrightarrow{d} \cdots)$$

die Relation $(X^i \xrightarrow{d} X^{i+1} \xrightarrow{d} X^{i+2}) = (X^i \xrightarrow{0} X^{i+2})$ für alle $i \in \mathbf{Z}$ erfüllen. Ein Objekt in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ ist ein *Komplex (mit Einträgen in $\mathcal{A}$)*. Dementsprechend heißt $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ die *Kategorie der Komplexe (mit Einträgen in $\mathcal{A}$)*. Die darin auftretenden Morphismen $X^i \xrightarrow{d} X^{i+1}$ heißen *Differentiale* und werden unter Mißbrauch der Bezeichnung, d.h. unter Wegfall der Indizes, alle mit d bezeichnet.

Ein Komplex isomorph zu einem Komplex der Form

$$\cdots \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)} T^i \oplus T^{i+1} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)} T^{i+1} \oplus T^{i+2} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)} T^{i+2} \oplus T^{i+3} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)} \cdots$$

heiße *split* (oder *spaltend*) *azyklisch.* Der Nullkomplex ist split azyklisch. Die direkte Summe zweier split azyklischer Komplexe ist split azyklisch. Die volle additive Teilkategorie von $\mathrm{C}(\mathcal{A})$, die durch die split azyklischen Komplexe gegeben ist, werde $\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A})$ geschrieben.

Sei

$$\mathrm{K}(\mathcal{A}) \;:=\; \mathrm{C}(\mathcal{A})/\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A})$$

die *Homotopiekategorie der Komplexe (mit Werten in $\mathcal{A}$).* Wir halten nochmals fest, daß nach Aufgabe 15 die Kategorie $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ und auch der Restklassenfunktor $\mathrm{C}(\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathrm{K}(\mathcal{A})$ additiv sind. In Aufgabe 16 wird eine konkrete Beschreibung der Untergruppe

$$_{\mathrm{C}(\mathcal{A}),\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A})}(X,Y)$$

der *nullhomotopen* Morphismen für $X,\, Y \;\in\; \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gegeben.

Beispiel. Auf $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ haben wir für jedes $k \in \mathbf{Z}$ eine Autoäquivalenz, den *Shiftfunktor*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{C}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathrm{C}(\mathcal{A}) \\ (X \xrightarrow{f} Y) & \longmapsto & (X[k] \xrightarrow{f[k]} Y[k])\,, \end{array}$$

wobei bei $i \in \mathbf{Z}$ das Differential

$$(X[k]^i \xrightarrow{d} X[k]^{i+1}) \;:=\; (X^{k+i} \xrightarrow{(-1)^k d} X^{k+i+1})$$

sei. I.e. $X[k]$ geht aus X hervor durch eine Verschiebung um k Schritte nach links und durch Einfügen eines Vorzeichens $(-1)^k$ vor jedem Differential.

Für einen Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ wird bei $i \in \mathbf{Z}$

$$f[k]^i \;=\; f^{k+i}\,,$$

was einer Linksverschiebung um k Schritte ohne zusätzlichem Vorzeichen entspricht.

Somit ist insbesondere $X[k+k'] = X[k][k']$ für $k,\, k' \in \mathbf{Z}$, und entsprechend auf den Morphismen.

Da $\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A})$ unter $X \longmapsto X[k]$ nach $\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A})$ abgebildet wird, induziert dieser Shiftfunktor auf $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ auch einen Shiftfunktor gleichen Namens

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{K}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathrm{K}(\mathcal{A}) \\ X & \longmapsto & X[k]\,. \end{array}$$

Wir führen für einen Komplex $X \in \operatorname{Ob}\mathrm{K}(\mathcal{A})$ noch eine untere Indizierung

$$X_i \;:=\; X^{-i}$$

ein, mittels derer sich

$$X \;=\; (\cdots \xrightarrow{d} X_{i+1} \xrightarrow{d} X_i \xrightarrow{d} X_{i-1} \xrightarrow{d} \cdots)$$

schreibt. Dito für Morphismen von Komplexen. Das ist die klassische Schreibweise, und wir werden bei der Betrachtung von Auflösungen ihren Sinn erkennen.

Es gibt eine Theorie sogenannter abelscher Kategorien, die alle für die Homologische Algebra wesentlichen Eigenschaften der Kategorie der abelschen Gruppen erfaßt, und Modulkategorien etc. umfaßt (cf. [**18,** Chap. VIII] oder e.g. [**16,** §4]). Diese Theorie werden wir allerdings nicht behandeln, sondern uns auf Modulkategorien beschränken, da in allgemeinen abelschen Kategorien keine elementweisen Argumente zulässig sind (so man nicht das Theorem behandelt, das das wieder zuläßt...).

Es verhält sich nun aber $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$ für einen Ring R nicht mehr wie eine Modulkategorie; in anderen Worten, es ist im allgemeinen keine abelsche Kategorie mehr. Zum Beispiel haben in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$ zwar alle Morphismen einen schwachen Kern (universelle Eigenschaft wie beim Kern, nur ohne Eindeutigkeit), aber im allgemeinen keinen Kern mehr; cf. Aufgabe 14.

Die Theorie der sogenannten triangulierten Kategorien soll für $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ leisten, was die Theorie der abelschen Kategorien für Modulkategorien leistet. Wie triangulierte Kategorien zu verstehen sind, darüber gibt es verschiedene Auffassungen – von Puppe und Verdier (Standard, und sehr nützlich, s. SGA 4 1/2, p. 262), von Grothendieck (ein recht großer, und sehr allgemeiner Apparat, vgl. www.math.jussieu.fr/~maltsin/ps/ktheory.ps), von Heller (der triangulierte Kategorien als gewisse Teilkategorien gewisser abelscher Kategorien ansieht, s. Bull. Am. Math. Soc. 74, p. 28–63), ...

1.5.2 Induzierte Funktoren auf Homotopiekategorien

Ist $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen den additiven Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, so erhalten wir zunächst einen additiven Funktor

$$[\![\mathbf{Z},\mathcal{A}]\!] \xrightarrow{[\![\mathbf{Z},F]\!]} [\![\mathbf{Z},\mathcal{B}]\!]\,,$$

formal, durch Komposition mit F; intuitiv gesprochen, durch punktweises Anwenden von F. Dieser Funktor schränkt nun wegen der Additivität von F zu einem Funktor $\mathrm{C}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathrm{C}(F)} \mathrm{C}(\mathcal{B})$ ein. Ausgeschrieben operiert dieser via

$$\mathrm{C}(F)\left(\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "d"] & X^i \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^i"'] & X^{i+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^{i+1}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "d"] & Y^i \arrow[r, "d"] & Y^{i+1} \arrow[r, "d"] & \cdots \end{tikzcd}\right) = \left(\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "Fd"] & FX^i \arrow[r, "Fd"] \arrow[d, "Ff^i"'] & FX^{i+1} \arrow[r, "Fd"] \arrow[d, "Ff^{i+1}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "Fd"] & FY^i \arrow[r, "Fd"] & FY^{i+1} \arrow[r, "Fd"] & \cdots \end{tikzcd}\right)$$

Wegen der Additivität von F schränkt $\mathrm{C}(F)$ nun weiter zu einem Funktor $\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(F)} \mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{B})$ ein. Die universelle Eigenschaft der Quotientenkategorie liefert nun einen induzierten Funktor $\mathrm{K}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathrm{K}(F)} \mathrm{K}(\mathcal{B})$ vermöge

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(F)"'] & \mathrm{C}(\mathcal{A}) \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "\mathrm{C}(F)"'] & \mathrm{K}(\mathcal{A}) \arrow[d, "\mathrm{K}(F)"'] \\ \mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{B}) \arrow[r] & \mathrm{C}(\mathcal{B}) \arrow[r, "Q"] & \mathrm{K}(\mathcal{B}) . \end{tikzcd}$$

Es ist $\mathrm{K}(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}$. Für $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ additiv ist $\mathrm{K}(G \circ F) = \mathrm{K}(G) \circ \mathrm{K}(F)$.

1.5.3 Der Homologiefunktor

Sei R ein Ring.

1.5.3.1 Homologiemoduln

Sei X in $\mathrm{Ob}\,\mathrm{C}(R\text{-Mod})$. Sei $k \in \mathbf{Z}$. Setze

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{Z}^k X & := & \mathrm{Kern}(X^k \xrightarrow{d} X^{k+1}) \\ \mathrm{Z}'^k X & := & \mathrm{Cokern}(X^{k-1} \xrightarrow{d} X^k) \\ \mathrm{H}^k X & := & \mathrm{Im}(\mathrm{Z}^k X \longrightarrow \mathrm{Z}'^k X) \end{array}$$

Es steht hierbei Z für "Zykel" und H für "Homologie".

$$\begin{tikzcd} & & \mathrm{H}^k X \arrow[dr] & & \\ & \mathrm{Z}^k X \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{Z}'^k X \arrow[dr] & \\ X^{k-1} \arrow[ur] \arrow[rr, "d"] & & X^k \arrow[ur] \arrow[rr, "d"] & & X^{k+1} \end{tikzcd}$$

Beachte, daß auch $\mathrm{Z}^k X \longrightarrow \mathrm{H}^k X$ ein Cokern von $X^{k-1} \longrightarrow \mathrm{Z}^k X$, und dual, $\mathrm{H}^k X \longrightarrow \mathrm{Z}'^k X$ ein Kern von $\mathrm{Z}'^k X \longrightarrow X^{k+1}$ ist. Insbesondere, bezeichnen wir noch $\mathrm{B}^k X := \mathrm{Im}(X^{k-1} \longrightarrow X^k)$, wobei B für "berandende Zykel" steht, so wird

$$\mathrm{H}^k X \;=\; \mathrm{Z}^k X / \mathrm{B}^k X \,.$$

Das ist die klassische (aber nicht a priori selbstduale) Definition.

Ist $\mathrm{H}^k X = 0$, so sagen wir, der Komplex X ist *exakt bei* X^k. Es "mißt" $\mathrm{H}^k X$ also die Abweichung von der Exaktheit an dieser Stelle. Vgl. Aufgabe 14.(5).

Ein Komplex X, der für alle $k \in \mathbf{Z}$ bei X^k exakt ist, heißt *azyklisch* oder *lang exakt.* Ein split azyklischer Komplex ist azyklisch.

1.5.3.2 Induzierte Morphismen auf den Homologiemoduln

Gegeben ein Morphismus in $[\![\Delta_2, R\text{-Mod}]\!]$, i.e. gegeben ein kommutatives Rechteck

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "x"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "y"] & Y' \end{tikzcd} ,$$

so erhalten wir auf den Kernen einen induzierten Morphismus

$$\begin{tikzcd} K_x \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_K"'] & X \arrow[r, "x"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ K_y \arrow[r, "j"] & Y \arrow[r, "y"] & Y' \end{tikzcd} ,$$

charakterisiert durch $f_K j = if$. Dual auf den Cokernen, und also auch, da gemäß Aufgabe 14.(4.iii) das Bild als Cokern des Kerns gegeben ist, und, damit identifiziert, als Kern des Cokerns, auf den Bildern.

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$. Für $k \in \mathbf{Z}$ erhalten wir mit den eben gemachten Bemerkungen einen induzierten Morphismus $\mathrm{H}^k X \xrightarrow{\mathrm{H}^k f} \mathrm{H}^k Y$. Repräsentiert hierbei $x \in \mathrm{Z}^k X$ ein Element von $\mathrm{H}^k X$, so repräsentiert $x f^k \in \mathrm{Z}^k Y$ das Bildelement $(x)(\mathrm{H}^k f) \in \mathrm{H}^k Y$.

Ferner komponieren die induzierten Morphismen wieder zu einem induzierten Morphismus, wie man über deren jeweige Charakterisierung erkennt. Es gilt also $\mathrm{H}^k(fg) = (\mathrm{H}^k f)(\mathrm{H}^k g)$ für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$. Desweiteren ist $\mathrm{H}^k(1_X) = 1_{\mathrm{H}^k X}$. Somit ist H^k als Funktor erkannt.

Da der Kern einer Diagonalmatrix von Matrizen sich in die direkte Summe der Kerne der Diagonaleinträge zerlegt, und genauso für den Cokern und das Bild, ist H^k auch additiv.

Insgesamt ergibt sich ein additiver Funktor

$$\mathrm{C}(R\text{-Mod}) \xrightarrow{\mathrm{H}^k} R\text{-Mod} \; .$$

Da ein split azyklischer Komplex insbesondere azyklisch ist, und also insbesondere exakt bei X^k, induziert dieser Funktor einen Funktor

$$\mathrm{K}(R\text{-Mod}) \xrightarrow{\mathrm{H}^k} R\text{-Mod}$$

auf der Homotopiekategorie.

Wir schreiben wieder $\mathrm{H}_k := \mathrm{H}^{-k}$ für $k \in \mathbf{Z}$.

1.5.3.3 Begriffe: kurz exakte Sequenzen; links- und rechtsexakte Funktoren

Seien R und S Ringe. Eine Sequenz

$$X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$$

in R-Mod heißt *kurz exakt,* falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

(i) Es ist $0 \longrightarrow X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X'' \longrightarrow 0$ exakt in X', X und X''.

(ii) Es ist $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$ exakt in X, i monomorph und p epimorph.

(iii) Es ist i Kern von p und p Cokern von i.

(iv) Es ist i Kern von p und p epimorph.

(v) Es ist p Cokern von i und i monomorph.

Sei $R\text{-Mod} \xrightarrow{F} S\text{-Mod}$ ein additiver Funktor.

Es heißt F *linksexakt,* falls für jede R-lineare Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$, deren Kern mit $K_f \xrightarrow{i} X$ bezeichnet werde, auch $FK_f \xrightarrow{Fi} FX$ wieder ein Kern von $FX \xrightarrow{Ff} FY$ ist. Kurz, F vertauscht mit Kernbildung.

Es heißt F *rechtsexakt,* falls für jede R-lineare Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$, deren Cokern mit $Y \xrightarrow{p} C_f$ bezeichnet werde, auch $FY \xrightarrow{Fp} FC_f$ wieder ein Cokern von $FX \xrightarrow{Ff} FY$ ist. Kurz, F vertauscht mit Cokernbildung.

Es heißt F *exakt,* wenn F links- und rechtsexakt ist.

Folgende Aussagen über unseren additiven Funktor F sind äquivalent.

(i) F ist exakt.

(ii) F ist linksexakt und bildet Epimorphismen auf Epimorphismen ab.

(iii) F ist rechtsexakt und bildet Monomorphismen auf Monomorphismen ab.

(iv) F bildet kurz exakte Sequenzen auf kurz exakte Sequenzen ab.

Zeigen wir (ii) $\Longrightarrow$ (i). Wir haben zu zeigen, daß F rechtsexakt ist. Sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} C_f$ wie oben. Sei $(X \xrightarrow{f} Y) = (X \xrightarrow{\bar{f}} I_f \xrightarrow{\dot{f}} Y)$ über sein Bild faktorisiert. Es ist $(\dot{f}, p)$ kurz exakt. Also ist $F\dot{f}$ Kern von Fp. Nun sind aber Fp und $F\bar{f}$ epimorph. Also ist Fp Cokern von $F\dot{f}$, und somit auch von Ff.

Siehe auch Aufgabe 17.

1.5.3.4 Die lang exakte Homologiesequenz

Eine Sequenz

$$X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$$

in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$ heißt *kurz exakt*, wenn für alle $k \in \mathbf{Z}$ die Sequenz

$$X'^k \xrightarrow{i^k} X^k \xrightarrow{p^k} X''^k$$

kurz exakt ist.

> Dann sind, mutatis mutandis, auch die obengenannten Bedingungen für eine kurz exakte Sequenz in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$ erfüllt. Mehr noch, $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$ ist ein Beispiel für eine sogenannte abelsche Kategorie. Das werden wir aber nicht brauchen.

In Aufgabe 20.(1) wird verifiziert, daß eine solche kurz exakte Sequenz von Komplexen eine lang exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^k X' \xrightarrow{\mathrm{H}^k i} \mathrm{H}^k X \xrightarrow{\mathrm{H}^k p} \mathrm{H}^k X'' \xrightarrow{\partial^k} \mathrm{H}^{k+1} X' \xrightarrow{\mathrm{H}^{k+1} i} \mathrm{H}^{k+1} X \xrightarrow{\mathrm{H}^{k+1} p} \mathrm{H}^{k+1} X'' \longrightarrow \cdots$$

induziert, wobei der *Verbindungsmorphismus* $\mathrm{H}^k X'' \xrightarrow{\partial^k} \mathrm{H}^{k+1} X'$ wie folgt repräsentantenweise erklärt ist.

Sei $x'' \in \mathrm{Z}^k X''$. Sei $x \in X^k$ gewählt mit $xp^k = x''$. Sei $x' \in X'^{k+1}$ mit $x' i^{k+1} = xd$. Es ist $x'd = 0$, also $x' \in \mathrm{Z}^{k+1} X'$. Es repräsentiert x' in $\mathrm{H}^{k+1} X'$ das Bild unter ∂^k des von x'' in $\mathrm{H}^k X'$ repräsentierten Elementes.

1.5.4 Auflösungen

Sei R ein Ring. Sei R-Proj die volle additive Teilkategorie von R-Mod, die aus den projektiven R-Moduln besteht. Sei R-Inj die volle additive Teilkategorie von R-Mod, die aus den injektiven R-Moduln besteht.

Diese Teilkategorien sind in der Tat additiv. Denn aus P und Q projektiv folgt auch $P \oplus Q$ projektiv. Hierzu dürfen wir mit Aufgabe 18.(4) zeigen, daß mit $(P,-)$ und $(Q,-)$ exakt auch $(P \oplus Q,-)$ exakt ist. Dafür ist nur zu zeigen, daß $(P \oplus Q,-)$ Epimorphismen in Epimorphismen überführt. Das Bild eines Epimorphismus unter $(P \oplus Q,-)$ spaltet aber direkt auf in sein Bild unter $(P,-)$ und sein Bild unter $(Q,-)$, und die direkte Summe zweier Epimorphismen ist epimorph. Woraus man entnimmt, daß auch $(P \oplus Q,-)$ Epimorphismen respektiert. Dual für Injektive.

Aus Aufgabe 19 wissen wir, daß es für jeden R-Modul X einen projektiven R-Modul P zusammen mit einem Epimorphismus $P \twoheadrightarrow X$, und einen injektiven R-Modul I zusammen mit einem Monomorphismus $X \rightarrowtail I$ gibt.

Sei $\mathrm{K}^{+,0}(R\text{-Inj})$ die volle Teilkategorie von $\mathrm{K}(R\text{-Inj})$, die durch

$$\operatorname{Ob}\mathrm{K}^{+,0}(R\text{-Inj}) \;:=\; \left\{ I \in \operatorname{Ob}\mathrm{K}(R\text{-Inj}) \;:\; \begin{array}{rcll} I^i & = & 0 & \text{für } i < 0 \\ \mathrm{H}^i I & = & 0 & \text{für } i > 0 \end{array} \right\}$$

definiert ist. D.h. ein Objekt I von $\mathrm{K}^{+,0}(R\text{-Inj})$ hat die Form

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{d} I^1 \xrightarrow{d} I^2 \longrightarrow \cdots$$

und ist exakt bei I^1, I^2, etc.

Dual dazu, sei $\mathrm{K}^{-,0}(R\text{-Proj})$ die volle Teilkategorie von $\mathrm{K}(R\text{-Proj})$, die durch

$$\operatorname{Ob}\mathrm{K}^{-,0}(R\text{-Proj}) \;:=\; \left\{ P \in \operatorname{Ob}\mathrm{K}(R\text{-Proj}) \;:\; \begin{array}{rcll} P_i & = & 0 & \text{für } i < 0 \\ \mathrm{H}_i P & = & 0 & \text{für } i > 0 \end{array} \right\}$$

definiert ist.

Satz. *Die Einschränkung des Homologiefunktors auf*

$$\mathrm{K}^{+,0}(R\text{-Inj}) \xrightarrow{\mathrm{H}^0} R\text{-Mod}$$

ist eine Äquivalenz.

Dual dazu, die Einschränkung des Homologiefunktors auf

$$\mathrm{K}^{-,0}(R\text{-Proj}) \xrightarrow{\mathrm{H}_0} R\text{-Mod}$$

ist eine Äquivalenz.

> Da wir in Modulkategorien arbeiten, dürfen wir, formal gesprochen, nicht mehr zu den dualen Aussagen übergehen. So die dualen Argumente allerdings anwendbar sind, erlauben wir uns dies dennoch. Um dieses Vorgehen sauber zu rechtfertigen, müßte man die schon erwähnte Theorie der abelschen Kategorien heranziehen. Vgl. §1.5.6.

Ist $I \in \operatorname{Ob}\mathrm{K}^{+,0}(R\text{-Inj})$ mit $\mathrm{H}^0 I = X$, so heißt I auch *injektive Auflösung* von X.

Ist $P \in \operatorname{Ob} \mathrm{K}^{-,0}(R\text{-Proj})$ mit $\mathrm{H}_0 P = X$, so heißt P auch *projektive Auflösung* von X.

Sei $R\text{-Mod} \xrightarrow[\sim]{\mathrm{IRes}} \mathrm{K}^{+,0}(R\text{-Inj})$ (wie "injective resolution") eine zu $\mathrm{K}^{+,0}(R\text{-Inj}) \xrightarrow{\mathrm{H}^0} R\text{-Mod}$ inverse Äquivalenz mit sogar $\mathrm{H}^0 \circ \mathrm{IRes} = 1_{R\text{-Mod}}$. Die Komposition von IRes, gefolgt von der vollen und treuen Einbettung $\mathrm{K}^{+,0}(R\text{-Inj}) \subseteq \mathrm{K}(R\text{-Mod})$, wird wieder mit $R\text{-Mod} \xrightarrow{\mathrm{IRes}} \mathrm{K}(R\text{-Mod})$ bezeichnet.

Sei $R\text{-Mod} \xrightarrow[\sim]{\mathrm{PRes}} \mathrm{K}^{-,0}(R\text{-Proj})$ (wie "projective resolution") eine zu $\mathrm{K}^{-,0}(R\text{-Proj}) \xrightarrow{\mathrm{H}_0} R\text{-Mod}$ inverse Äquivalenz mit sogar $\mathrm{H}_0 \circ \mathrm{PRes} = 1_{R\text{-Mod}}$. Die Komposition von PRes, gefolgt von der vollen und treuen Einbettung $\mathrm{K}^{-,0}(R\text{-Proj}) \subseteq \mathrm{K}(R\text{-Mod})$, wird wieder mit $R\text{-Mod} \xrightarrow{\mathrm{PRes}} \mathrm{K}(R\text{-Mod})$ bezeichnet.

Oft unterschlägt man in der Notation einer injektiven Auflösung die Nullen an den oben indiziert negativen Positionen, und in der Notation einer projektiven Auflösung die Nullen an den unten indiziert negativen Positionen.

Beweis. Zeigen wir, daß der auf $\mathrm{K}^{+,0}(R\text{-Inj})$ eingeschränkte Homologiefunktor voll, treu und dicht ist. Bemerken wir zunächst, daß für $I \in \operatorname{Ob} \mathrm{K}^{+,0}(R\text{-Inj})$ die Gleichheit $\mathrm{Z}^0 I = \mathrm{H}^0 I$ gilt.

Dicht. Wir müssen zu einem gegebenen R-Modul X einen Komplex $I \in \operatorname{Ob} \mathrm{K}^{+,0}(R\text{-Inj})$ mit $\mathrm{Z}^0 I \simeq X$ finden. Wir konstruieren hierzu

$$X =: B^0 \rightarrowtail I^0 \twoheadrightarrow B^1 \rightarrowtail I^1 \twoheadrightarrow B^2 \rightarrowtail I^2 \twoheadrightarrow B^3 \rightarrowtail \cdots ,$$

wobei $B^k \rightarrowtail I^k \twoheadrightarrow B^{k+1}$ für $k \geqslant 0$ je eine kurz exakte Sequenz sei.

Voll. Wir müssen zu gegebenen Komplexen $I,\, J \in \operatorname{Ob} \mathrm{K}^{+,0}(R\text{-Inj})$ und zu einer gegebenen R-linearen Abbildung $\mathrm{Z}^0 I \xrightarrow{f} \mathrm{Z}^0 J$ so einen Morphismus $I \xrightarrow{\hat{f}} J$ von Komplexen finden, daß $\mathrm{Z}^0 \hat{f} = f$. Dieser konstruiert sich wie folgt.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Z}^0 I \arrow[r, tail] \arrow[d, "f"'] & I^0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, dotted, "\hat{f}^0"] & \mathrm{B}^1 I \arrow[r, tail] \arrow[d, dotted] & I^1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, dotted, "\hat{f}^1"] & \mathrm{B}^2 I \arrow[r, tail] \arrow[d, dotted] & I^2 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\hat{f}^2"] & \cdots \\
\mathrm{Z}^0 J \arrow[r, tail] & J^0 \arrow[r, two heads] & \mathrm{B}^1 J \arrow[r, tail] & J^1 \arrow[r, two heads] & \mathrm{B}^2 J \arrow[r, tail] & J^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Wegen J^0 injektiv und $\mathrm{Z}^0 I \rightarrowtail I^0$ monomorph existiert ein $I^0 \xrightarrow{\hat{f}^0} J^0$ so, daß das erste Rechteck kommutiert (vgl. Aufgabe 18.(4, 5)).

Wegen $\mathrm{B}^1 I$ Cokern von $\mathrm{Z}^0 I \rightarrowtail I^0$ und $\mathrm{B}^1 J$ Cokern von $\mathrm{Z}^0 J \rightarrowtail J^0$ induzieren f und $\hat{f}^0$ einen Morphismus $\mathrm{B}^1 I \longrightarrow \mathrm{B}^1 J$ so, daß das zweite Rechteck kommutiert.

Wegen J^1 injektiv und $\mathrm{B}^1 I \rightarrowtail I^1$ monomorph existiert ein $I^1 \xrightarrow{\hat{f}^1} J^1$ so, daß das dritte Rechteck kommutiert.

Wegen $\mathrm{B}^2 I$ Cokern von $\mathrm{B}^1 I \rightarrowtail I^1$ und $\mathrm{B}^2 J$ Cokern von $\mathrm{B}^1 J \rightarrowtail J^1$ wird ein Morphismus $\mathrm{B}^2 I \longrightarrow \mathrm{B}^2 J$ so induziert, daß das vierte Rechteck kommutiert.

Und so fort.

Treu. Sei $I \xrightarrow{g} J$ ein Morphismus in $\mathrm{K}^{+,0}(R\text{-Inj})$ mit $\mathrm{Z}^0 g = 0$. Wir haben zu zeigen, daß $g = 0$. Dazu dürfen wir mit Aufgabe 16 wie folgt eine Homotopie konstruieren, die diesen Morphismus g ergibt.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Z}^0 I \arrow[r, tail] \arrow[d, "0"'] & I^0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "g^0"] & \mathrm{B}^1 I \arrow[r, tail] \arrow[dl, dotted] & I^1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "g^1"] \arrow[dll, dotted, "h^1"'] & \mathrm{B}^2 I \arrow[r, tail] \arrow[dl, dotted] & I^2 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "g^2"] \arrow[dll, dotted, "h^2"'] & \mathrm{B}^2 I \arrow[r, tail] \arrow[dl, dotted] & I^3 \arrow[r] \arrow[d, "g^3"] \arrow[dll, dotted, "h^3"'] & \cdots \\
\mathrm{Z}^0 J \arrow[r, tail] & J^0 \arrow[rr, "d"] & & J^1 \arrow[rr, "d"] & & J^2 \arrow[rr] & & J^3 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Wegen $\mathrm{B}^1 I$ Cokern von $\mathrm{Z}^0 I \rightarrowtail I^0$ und $(\mathrm{Z}^0 I \rightarrowtail I^0 \xrightarrow{g^0} J^0) = 0$ faktorisiert g^0 über einen Morphismus $\mathrm{B}^1 I \longrightarrow J^0$.

Wegen $\mathrm{B}^1 I \rightarrowtail I^1$ monomorph und J^0 injektiv faktorisiert dieses $\mathrm{B}^1 I \longrightarrow J^0$ über einen Morphismus $I^1 \xrightarrow{h^1} J^0$. Insgesamt ist also $g^0 = dh^1$.

Da I bei I^1 exakt ist, ist $\mathrm{B}^2 I$ Cokern von $I^0 \xrightarrow{d} I^1$. Wegen $(I^0 \xrightarrow{d} I^1 \xrightarrow{g^1 - h^1 d} J^1) = 0$ faktorisiert $g^1 - h^1 d$ über einen Morphismus $\mathrm{B}^2 I \longrightarrow J^1$.

Wegen $\mathrm{B}^2 I \rightarrowtail I^2$ monomorph und J^1 injektiv faktorisiert dieses $\mathrm{B}^2 I \longrightarrow J^1$ über einen Morphismus $I^2 \xrightarrow{h^2} J^1$. Insgesamt ist also $g^1 - h^1 d = dh^2$, oder, in anderen Worten, $g^1 = h^1 d + dh^2$.

Da I bei I^2 exakt ist, ist $\mathrm{B}^3 I$ Cokern von $I^1 \xrightarrow{d} I^2$. Wegen $(I^1 \xrightarrow{d} I^2 \xrightarrow{g^2 - h^2 d} J^2) = 0$ faktorisiert $g^2 - h^2 d$ über einen Morphismus $\mathrm{B}^3 I \longrightarrow J^2$.

Wegen $\mathrm{B}^3 I \rightarrowtail I^3$ monomorph und J^2 injektiv faktorisiert dieses $\mathrm{B}^3 I \longrightarrow J^2$ über einen Morphismus $I^3 \xrightarrow{h^3} J^2$. Insgesamt ist also $g^2 - h^2 d = dh^3$, oder, in anderen Worten, $g^2 = h^2 d + dh^3$.

Und so fort.

Ferner ist zwangsläufig $h^i = 0$ für $i \leqslant 0$. □

Für "treu" haben wir den Übergang von der Kategorie der Komplexe zur Homotopiekategorie gebraucht.

Lemma. *Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus in R-*Mod*. Ist $I \xrightarrow{f'} J$ ein Morphismus in* $\mathrm{K}^{+,0}(R\text{-Inj})$ *mit*

$$\mathrm{H}^0(I \xrightarrow{f'} J) \;\simeq\; (X \xrightarrow{f} Y)$$

(in $\llbracket \Delta_1, R\text{-Mod} \rrbracket$), so ist

$$(I \xrightarrow{f'} J) \;\simeq\; \mathrm{IRes}(X \xrightarrow{f} Y)$$

(in $\llbracket \Delta_1, \mathrm{K}^{+,0}(R\text{-Inj}) \rrbracket$). Und dual.

Grob gesprochen, bis auf Isomorphie in $\mathrm{K}^{+,0}(R\text{-Inj})$ dürfen wir eine injektive Auflösung wählen, um IRes zu berechnen, und genauso für Morphismen. Dem Beweis wird man auch entnehmen können, daß man allgemeinere Diagramme als nur Δ_1-Diagramme $X \xrightarrow{f} Y$ hätte anführen können.

Beweis. Seien allgemein $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ zueinander bis auf Isotransformation inverse Äquivalenzen. Sei $U \xrightarrow{g} V$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$, und sei $U' \xrightarrow{g'} V'$ ein Morphismus in $\mathcal{B}$ derart, daß $G(U' \xrightarrow{g'} V') \simeq (U \xrightarrow{g} V)$. Wir haben zu zeigen, daß $(U' \xrightarrow{g'} V') \simeq F(U \xrightarrow{g} V)$. In der Tat ist

$$(U' \xrightarrow{g'} V') \;\simeq\; FG(U' \xrightarrow{g'} V') \;\simeq\; F(U \xrightarrow{g} V)\;,$$

wobei der zweite Isomorphismus durch Anwenden von F auf den gegebenen Isomorphismus erhalten wird. $\square$

Beispiel. Wir kürzen $\mathbf{Z}/a := \mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ ab für $a \geqslant 1$. Sei $R = \mathbf{Z}/8$. Eine projektive Auflösung von $\mathbf{Z}/2$ ist gegeben durch

$$(\cdots \longrightarrow \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{4} \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{4} \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/8)\;.$$

Diese ist zu $\mathrm{PRes}(\mathbf{Z}/2)$ isomorph in $\mathrm{K}(\mathbf{Z}/8\text{-Mod})$, wenn auch nicht notwendig in $\mathrm{C}(\mathbf{Z}/8\text{-Mod})$. So zum Beispiel ist

$$(\cdots \longrightarrow \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{4} \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{(4\,0)} \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/8)\;.$$

ebenfalls eine projektive Auflösung von $\mathbf{Z}/2$.

1.5.5 Hufeisenlemma

Wie schon erwähnt, hat es in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$ nicht mehr viel Sinn, von kurz exakten Sequenzen zu reden. Als Ersatz für die sinnlose Aussage "IRes ist exakt" geben wir das *Hufeisenlemma* an.

Eine Sequenz

$$X' \longrightarrow X \longrightarrow X''$$

in R-Mod heißt *split kurz exakt,* falls sie isomorph zur Sequenz

$$X' \xrightarrow{(1\,0)} X' \oplus X'' \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} X''$$

ist (in $[\![\Delta_2, R\text{-Mod}]\!]$).

Eine Sequenz

$$Y' \longrightarrow Y \longrightarrow Y''$$

in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$ heißt *punktweise split kurz exakt,* falls

$$Y'^k \longrightarrow Y^k \longrightarrow Y''^k$$

split kurz exakt ist für alle $k \in \mathbf{Z}$.

Vorsicht, in einer punktweise split kurz exakten Sequenz ist der linke Morphismus im allgemeinen keine Coretraktion, und der rechte Morphismus im allgemeinen keine Retraktion. Dies gilt nur punktweise.

Lemma. *Sei*

$$X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$$

eine kurz exakte Sequenz in R-Mod. *Es gibt eine punktweise split kurz exakte Sequenz* $I' \longrightarrow I \longrightarrow I''$ *in* $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$ *mit* I', I, $I'' \in \operatorname{Ob}\mathrm{K}^{+,0}(R\text{-Inj})$ *derart, daß*

$$\mathrm{H}^0(I' \longrightarrow I \longrightarrow I'') \;\simeq\; (X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X'')\;,$$

und infolgedessen

$$(I' \longrightarrow I \longrightarrow I'') \;\simeq\; \mathrm{IRes}(X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X'')\;.$$

Genauer, hierbei können $I' = \mathrm{IRes}X'$ *und* $I'' = \mathrm{IRes}X''$ *gewählt werden.*

Und dual.

Beweis. Seien $I' := \mathrm{IRes}X'$ und $I'' := \mathrm{IRes}X''$ die durch die Wahl des Inversen IRes implizit gewählten injektiven Auflösungen von X' resp. von X''. Schreibe $X' \xrightarrow{d} I'^0$ resp. $X'' \xrightarrow{d} I''^0$. Wir konstruieren wie folgt.

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots \\
I'^4 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[u] & I'^4 \oplus I''^4 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[u] & I''^4 \arrow[u] \\
I'^3 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[u] & I'^3 \oplus I''^3 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[u, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^3 & d \end{pmatrix}"'] & I''^3 \arrow[u] \\
I'^2 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[u, "d"] & I'^2 \oplus I''^2 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[u, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^2 & d \end{pmatrix}"'] & I''^2 \arrow[u, "d"'] \\
I'^1 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[u, "d"] & I'^1 \oplus I''^1 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[u, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^1 & d \end{pmatrix}"'] & I''^1 \arrow[u, "d"'] \\
I'^0 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[u, "d"] & I'^0 \oplus I''^0 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[u, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^0 & d \end{pmatrix}"'] & I''^0 \arrow[u, "d"'] \\
X' \arrow[r, "i"] \arrow[u, "d"] & X \arrow[r, "p"] \arrow[u, "(u\,pd)"'] & X'' \arrow[u, "d"']
\end{tikzcd}$$

Wir haben hierin die Morphismen u, w^0, w^1, w^2 etc. geeignet zu konstruieren, und zwar in dieser Reihenfolge.

Da I'^0 injektiv ist und $X' \xrightarrow{i} X$ monomorph, faktorisiert $X' \xrightarrow{d} I'^0$ über einen Morphismus $X \xrightarrow{u} I'^0$, i.e. $iu = d$. Damit kommutieren die unteren beiden Rechtecke.

Alle anderen Rechtecke kommutieren bei beliebiger Wahl der w^i für $i \geqslant 0$. Es bleibt dafür Sorge zu tragen, daß die mittlere Spalte, nach unten um Nullen ergänzt, ein Komplex ist. Ist dies der Fall, so folgt mit der lang exakten Homologiesequenz aus Aufgabe 20, daß die mittlere Spalte sogar ein azyklischer Komplex ist, da dies bei den äußeren beiden Spalten zutrifft. Bezeichnet I die mittlere Spalte, in der noch X durch 0 ersetzt wird, so wird dann

$$\mathrm{H}^0(I' \longrightarrow I \longrightarrow I'') \;\simeq\; (X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X'')\ .$$

Wir müssen ein $I''^0 \xrightarrow{w^0} I'^1$ mit $ud + pdw^0 = 0$ finden. Wegen $i(ud) = 0$ gibt es ein v^0 mit $ud = pv^0$. Wegen $X'' \xrightarrow{d} I''^0$ monomorph und I'^1 injektiv gibt es ein w^0 mit $-dw^0 = v^0$, mit einem künstlich eingefügten Vorzeichen. Zusammen wird $ud = pv^0 = -pdw^0$, wie verlangt.

Wir müssen ein $I''^1 \xrightarrow{w^1} I'^2$ mit $w^0 d + dw^1 = 0$ finden. Da $pdw^0 d = -udd = 0$, ist wegen p epimorph auch $dw^0 d = 0$, und also gibt es wegen I'^2 injektiv ein w^1 mit $w^0 d = -dw^1$, mit einem künstlich eingefügten Vorzeichen.

Wir müssen ein $I''^2 \xrightarrow{w^2} I'^3$ mit $w^1 d + dw^2 = 0$ finden. Da $dw^1 d = -w^0 dd = 0$, gibt es wegen I'^3 injektiv ein w^2 mit $w^1 d = -dw^2$.

Wir müssen ein $I''^3 \xrightarrow{w^3} I'^4$ mit $w^2 d + dw^3 = 0$ finden. Da $dw^2 d = -w^1 dd = 0$, gibt es wegen I'^4 injektiv ein w^3 mit $w^2 d = -dw^3$.

Und so fort. □

Der Name des Lemmas rührt von der Gestalt des "bislang ausgefüllten" Diagramms während der im Beweis angeführten iterativen Konstruktion.

Beachte, daß die Morphismen w^i sich zu einem Morphismus von I'' nach $I'[1]$ zusammensetzen lassen – hier z.B. sieht man den Sinn des Vorzeichens, welches der Shiftfunktor den Differentialen auferlegt.

1.5.6 Eine Bemerkung zum Dualisieren

Sei R ein Ring. Die Aussagen in §1.5, denen eine Modulkategorie R-Mod zugrundeliegt, bleiben richtig, wenn man R-Mod durch $(R\text{-Mod})^\circ$, R-Inj durch $(R\text{-Proj})^\circ$ und R-Proj durch $(R\text{-Inj})^\circ$ ersetzt.

Dies ist für alle Argumente richtig, die nur die universellen Eigenschaften von Kern und Cokern, sowie die Eigenschaften projektiver und injektiver Objekte verwenden.

Wird für eine Aussage eine elementweise Argumentation verwandt, wie z.B. für die lang exakte Homologiesequenz auf einer kurz exakten Sequenz von Komplexen, so ist darauf zu achten, daß die Aussage selbstdual ist.

Die elementweise gezeigte Tatsache, daß jeder Modul epimorphes Bild eines projektiven Moduls ist, ist z.B. nicht selbstdual – und die duale Aussage, wie in Aufgabe 19 gesehen, auch wesentlich anders zu zeigen. Nimmt man nun diese Aussage zusammen mit ihrer dualen Aussage, so erhält man wieder eine selbstduale Aussage. Nur müssen beide Teile separat gezeigt werden.

1.6 Abgeleitete Funktoren, Ext und Tor

1.6.1 Abgeleitete Funktoren eines additiven Funktors

Seien R und S Ringe. Sei $R\text{-Mod} \xrightarrow{F} S\text{-Mod}$ ein additiver Funktor. Sei $k \geqslant 0$.

Sei der *k-te rechtsabgeleitete Funktor* $R\text{-Mod} \xrightarrow{\mathrm{R}^k F} S\text{-Mod}$ von F definiert durch

$$(R\text{-Mod} \xrightarrow{\mathrm{R}^k F} S\text{-Mod}) \;:=\; (R\text{-Mod} \xrightarrow{\mathrm{IRes}} \mathrm{K}(R\text{-Mod}) \xrightarrow{\mathrm{K}(F)} \mathrm{K}(S\text{-Mod}) \xrightarrow{\mathrm{H}^k} S\text{-Mod})\ .$$

Dual, sei der *k-te linksabgeleitete Funktor* $R\text{-Mod} \xrightarrow{\mathrm{L}_k F} S\text{-Mod}$ von F definiert durch

$$(R\text{-Mod} \xrightarrow{\mathrm{L}_k F} S\text{-Mod}) \;:=\; (R\text{-Mod} \xrightarrow{\mathrm{PRes}} \mathrm{K}(R\text{-Mod}) \xrightarrow{\mathrm{K}(F)} \mathrm{K}(S\text{-Mod}) \xrightarrow{\mathrm{H}_k} S\text{-Mod})\ .$$

Zur Berechnung von $\mathrm{R}^k FX$ für $X \in R\text{-Mod}$ bis auf Isomorphie wähle man sich also zunächst eine injektive Auflösung I von X, wende darauf punktweise F an, und bilde die Homologie H^k; i.e.

$$\mathrm{R}^k FX \;\simeq\; \mathrm{H}^k((\mathrm{K}(F))(I))$$

Dual,

$$\mathrm{L}_k FX \;\simeq\; \mathrm{H}_k((\mathrm{K}(F))(P))\ ,$$

wobei P eine projektive Auflösung von X bezeichne.

Bemerkung. *Es gibt eine Transformation $F \xrightarrow{\rho} \mathrm{R}^0 F$, welche eine Isotransformation ist, falls F linksexakt ist. Dual, es gibt eine Transformation $\mathrm{L}_0 F \xrightarrow{\lambda} F$, welche eine Isotransformation ist, falls F rechtsexakt ist.*

Beweis. Betrachten wird den rechtsabgeleiteten Fall. Wir haben einen Funktor Konz von R-Mod nach $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$, der einem Modul den *in Position* 0 *konzentrierten* Komplex $(\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots)$ zuordnet, und entsprechend die Morphismen. Wir haben eine Transformation $\mathrm{Konz} \xrightarrow{\tilde{\rho}} \mathrm{IRes}$, die bei $X \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod}$ gegeben ist durch

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "d"] & I^1 \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

mit $X \longrightarrow I^0$ Kern von $I^0 \xrightarrow{d} I^1$. Wie die Berechnung der Auflösung eines Morphismus in R-Mod zeigt, liegt in der Tat eine Transformation vor.

Beachte, daß $\mathrm{H}^0 \circ \mathrm{K}(F) \circ \mathrm{Konz} = F$. Somit erhalten wir eine Transformation

$$F \;=\; \mathrm{H}^0 \circ \mathrm{K}(F) \circ \mathrm{Konz} \quad \xrightarrow{\;\rho\ :=\ \mathrm{H}^0 \circ \mathrm{K}(F) \circ \tilde{\rho}\;} \quad \mathrm{H}^0 \circ \mathrm{K}(F) \circ \mathrm{IRes} \;=\; \mathrm{R}^0 F\,.$$

Wir haben zu zeigen, daß aus F linksexakt folgt, daß ρX ein Isomorphismus ist für $X \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod}$, i.e. daß H^0 angewandt auf

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & FX \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & FI^0 \arrow[r, "Fd"] & FI^1 \arrow[r, "Fd"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

einen Isomorphismus liefert. Dies folgt aus der Tatsache, daß wir ebensogut Z^0 anwenden können, sowie daraus, daß $FX \longrightarrow FI^0$ Kern von $FI^0 \xrightarrow{Fd} FI^1$ geblieben ist. ▫

Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$ eine kurz exakte Sequenz in R-Mod.

Lemma. *Es gibt eine lang exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathrm{R}^0 FX' \xrightarrow{\mathrm{R}^0 Fi} \mathrm{R}^0 FX \xrightarrow{\mathrm{R}^0 Fp} \mathrm{R}^0 FX'' \xrightarrow{\partial^0} \mathrm{R}^1 FX' \xrightarrow{\mathrm{R}^1 Fi} \mathrm{R}^1 FX \xrightarrow{\mathrm{R}^1 Fp} \mathrm{R}^1 FX'' \xrightarrow{\partial^1} \cdots$$

mit gewissen Verbindungsmorphismen ∂^k für $k \geqslant 0$.

Dual dazu gibt es eine lang exakte Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} \mathrm{L}_1 FX' \xrightarrow{\mathrm{L}_1 Fi} \mathrm{L}_1 FX \xrightarrow{\mathrm{L}_1 Fp} \mathrm{L}_1 FX'' \xrightarrow{\partial_1} \mathrm{L}_0 FX' \xrightarrow{\mathrm{L}_0 Fi} \mathrm{L}_0 FX \xrightarrow{\mathrm{L}_0 Fp} \mathrm{L}_0 FX'' \longrightarrow 0$$

mit gewissen Verbindungsmorphismen ∂_k für $k \geqslant 1$.

Zur *Berechnung* dieser Verbindungsmorphismen ziehe man den nun folgenden Beweis, zusammen mit der Charakterisierung des allgemeinen Verbindungsmorphismus aus §1.5.3.4 heran, vgl. auch Aufgabe 20.(1).

Beweis. Betrachten wir den rechtsabgeleiteten Fall. Nach Anwenden von IRes können wir nach dem Hufeisenlemma $\mathrm{IRes}(X)$ in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$ isomorph durch ein I so ersetzen, daß aus $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$ eine punktweise split kurz exakte Sequenz

$$\mathrm{IRes}(X') \longrightarrow I \longrightarrow \mathrm{IRes}(X'')$$

in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$ hervorgeht. Durch diese isomorphe Ersetzung werden auch die Objekte $\mathrm{R}^k FX$ für $k \geqslant 0$ in der zu konstruierenden Sequenz isomorph ersetzt. Es bringt $\mathrm{C}(F)$ wegen der Additivität von F diese Sequenz in die punktweise split kurz exakte Sequenz

$$\mathrm{C}(F)\mathrm{IRes}(X') \longrightarrow \mathrm{C}(F)(I) \longrightarrow \mathrm{C}(F)(\mathrm{IRes}(X''))$$

in $\mathrm{C}(S\text{-Mod})$. Die lang exakte Homologiesequenz dieser kurz exakten Sequenz von Komplexen liefert nun, wenn man noch die erwähnte isomorphe Ersetzung bei $\mathrm{R}^k FX$ für $k \geqslant 0$ rückgängig macht, das Gewünschte. ▫

Korollar. *Ist F linksexakt, so gibt es eine lang exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow FX' \xrightarrow{Fi} FX \xrightarrow{Fp} FX'' \xrightarrow{(\rho X'')\partial^0} \mathrm{R}^1FX' \xrightarrow{\mathrm{R}^1Fi} \mathrm{R}^1FX \xrightarrow{\mathrm{R}^1Fp} \mathrm{R}^1FX'' \xrightarrow{\partial^1} \cdots .$$

Dual dazu, ist F rechtsexakt, so gibt es eine lang exakte Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} \mathrm{L}_1FX' \xrightarrow{\mathrm{L}_1Fi} \mathrm{L}_1FX \xrightarrow{\mathrm{L}_1Fp} \mathrm{L}_1FX'' \xrightarrow{\partial_1(\lambda X')} FX' \xrightarrow{Fi} FX \xrightarrow{Fp} FX'' \longrightarrow 0 .$$

> Daher rührt der Name des *rechts*abgeleiteten Funktors – die Sequenz im Bild wird nach *rechts* zu einer lang exakten Sequenz fortgesetzt. Entsprechend der Name des *links*abgeleiteten Funktors.

Beweis. Mit obigem Lemma können die ersten resp. letzten drei Terme der vorstehenden lang exakten Sequenz isomorph ersetzt werden. ▫

Beispiel.

(1) Sei $R = \mathbf{Z}/8$. Sei $S = \mathbf{Z}/4$. Sei $F = \mathbf{Z}/4 \otimes_{\mathbf{Z}/8} -$. Berechnen wir die lang exakte Sequenz für die linksabgeleiteten Funktoren L_iF, wobei $i > 0$, auf der kurz exakten Sequenz

$$\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2 .$$

Das Hufeisenlemma liefert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\mathbf{Z}/8 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "4"] & \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[d, "4"] \\
\mathbf{Z}/8 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "2"] & \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[d, "2"] \\
\mathbf{Z}/8 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "4"] & \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[d, "4"] \\
\mathbf{Z}/8 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "2"] & \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[d, "2"] \\
\mathbf{Z}/8 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "1"] & \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\binom{2}{1}"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[d, "1"] \\
\mathbf{Z}/2 \arrow[r, "2"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "1"] & \mathbf{Z}/2
\end{tikzcd}$$

wovon wir noch die unterste Zeile abschneiden müssen, und sodann punktweise F anzuwenden haben. Da dabei sämtliche durch 4 teilbaren Matrixeinträge verschwinden, erhalten wir

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "0"] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[d, "0"] \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "2"] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[d, "2"] \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "0"] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[d, "0"] \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "2"] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[d, "2"] \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, "(1\,0)"] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] & \mathbf{Z}/4
\end{tikzcd}$$

Berechnen der Homologiesequenz gemäß Aufgabe 20.(1) ergibt

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \cdots & \longrightarrow & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{1} \\
\mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{1} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{0} \\
\mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{1} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{1} \\
\mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{1} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{0} \\
\mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{2} & \mathbf{Z}/4 & \xrightarrow{1} & \mathbf{Z}/2 &
\end{array}$$

als lang exakte Sequenz der linksabgeleiteten Funktoren zu F bei $\mathbf{Z}/2$. Beachte, daß an deren Ende gerade das Bild der Ausgangssequenz unter F steht, da F rechtsexakt ist. Und da diese Bildsequenz ebenfalls kurz exakt ist, ist auch a priori klar, daß der letzte Verbindungsmorphismus verschwindet.

Zur Probe vergewissere man sich, daß die aus der Rechnung resultierende Sequenz in der Tat lang exakt ist.

(2) Sei $R = \mathbf{Z}/8$. Sei $S = \mathbf{Z}/2$. Sei $G = \mathbf{Z}/2 \otimes_{\mathbf{Z}/8} -$. Berechnen wir die lang exakte Sequenz für die linksabgeleiteten Funktoren $\mathrm{L}_i G$, wobei $i > 0$, auf der kurz exakten Sequenz

$$\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2\,.$$

Wir tensorieren das Hufeisenlemmadiagramm aus (1) mit $\mathbf{Z}/2$. Da nun sämtliche durch 2 teilbaren Matrixeinträge verschwinden, erhalten wir

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\mathbf{Z}/2 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "0"] & \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/2 \arrow[d, "0"] \\
\mathbf{Z}/2 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "0"] & \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/2 \arrow[d, "0"] \\
\mathbf{Z}/2 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "0"] & \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/2 \arrow[d, "0"] \\
\mathbf{Z}/2 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "0"] & \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/2 \arrow[d, "0"] \\
\mathbf{Z}/2 \arrow[r, "(1\,0)"] & \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] & \mathbf{Z}/2
\end{tikzcd}$$

Berechnen der Homologiesequenz gemäß Aufgabe 20.(1) ergibt

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \cdots & \longrightarrow & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{0} \\
\mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{1} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{1} \\
\mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{1} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{0} \\
\mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{1} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{1} \\
\mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{1} & \mathbf{Z}/2 &
\end{array}$$

als lang exakte Sequenz der linksabgeleiteten Funktoren zu G bei $\mathbf{Z}/2$. Beachte, daß an deren Ende gerade das Bild der Ausgangssequenz unter G steht, da G rechtsexakt ist.

1.6.2 Funktoren in zwei Variablen

Wir wollen die Funktoren ${}_R(-,=)$ und $-\otimes_R =$ für einen Ring R ableiten. Wir wollen die resultierenden Funktoren als abgeleitete Funktoren in einer Variablen, d.h. mit einem fixierten Objekt in der jeweils anderen Variablen, berechnen können.

1.6.2.1 Doppelkomplexe

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien. Ein Funktor $\mathcal{A}\times\mathcal{A}' \xrightarrow{F} \mathcal{B}$, $(X,X') \longmapsto F(X,X')$, heiße *biadditiv,* falls für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ der Funktor $F(X,=) : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{B}$ additiv ist, und für alle $X' \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}'$ der Funktor $F(-,X') : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ additiv ist.

Beispiel.

(1) Sei R ein Ring. Der Funktor $(\text{Mod-}R) \times (R\text{-Mod}) \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$, $(X, X') \longmapsto X \otimes_R X'$, ist biadditiv.

(2) Sei R ein Ring. Der Funktor $(R\text{-Mod})^\circ \times (R\text{-Mod}) \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$, $(X, X') \longmapsto {}_R(X, X')$, ist biadditiv.

Setzt man nun in die erste Variable von F einen Komplex ein, und in die zweite ebenso, so erhalten wir Differentiale "in zwei Richtungen". Dies wollen wir formalisieren.

Sei $\mathrm{CC}(\mathcal{B}) \subseteq [\![\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \mathcal{B}]\!]$ die volle additive Teilkategorie, deren Objekte

$$X \;=\; \begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r, "d"] & X^{i+2,j} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & X^{i+2,j+1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & X^{i+2,j+2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d"] & X^{i+1,j} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & X^{i+1,j+1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & X^{i+1,j+2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d"] & X^{i,j} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & X^{i,j+1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & X^{i,j+2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u, "\delta"] & \vdots \arrow[u, "\delta"] & \vdots \arrow[u, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

stets $dd = 0$ und $\delta\delta = 0$ erfüllen. Beachte, daß ohnehin stets $\delta d = d\delta$ gilt, i.e. alle Rechtecke dieses Diagramms sind kommutativ. Es heiße $\mathrm{CC}(\mathcal{B})$ die *Kategorie der Doppelkomplexe* (mit Einträgen in $\mathcal{B}$). Entsprechend auch die Notation der Morphismen $f = (f^{i,j})_{i,j}$.

Sei $U \in \mathrm{C}(\mathcal{A})$, mit Differentialen d. Sei $U' \in \mathrm{C}(\mathcal{A}')$, mit Differentialen d'.

Definiere $F^{\mathrm{CC}}(U, V) \in \operatorname{Ob} \mathrm{CC}(\mathcal{B})$ durch $F^{\mathrm{CC}}(U, U')^{i,j} := F(U^i, U'^j)$ und durch $d = F(U^i, d')$ resp. $\delta = F(d, U'^i)$ an der jeweiligen Stelle. So erhalten wir einen Funktor

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{C}(\mathcal{A}) & \times & \mathrm{C}(\mathcal{A}') & \xrightarrow{F^{\mathrm{CC}}} & \mathrm{CC}(\mathcal{B}) \\
(U & , & U') & \longmapsto & F^{\mathrm{CC}}(U, U')\,.
\end{array}$$

Auf Morphismen $U \xrightarrow{f} V$ in $\mathcal{A}$ und $U' \xrightarrow{f'} V'$ in $\mathcal{A}'$ setzen wir entsprechend $F^{\mathrm{CC}}(f, f')^{i,j} := F(f^i, f'^j)$, was in der Tat einen Morphismus von Doppelkomplexen liefert.

1.6.2.2 Der Totalkomplexfunktor

Wir behalten die Bezeichnungen $\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ des vorigen Abschnittes bei.

Sei $\mathrm{CC}^{\llcorner}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{CC}(\mathcal{B})$ die volle additive Teilkategorie von $\mathrm{CC}(\mathcal{B})$ bestehend aus den Doppelkomplexen X mit $X^{i,j} \simeq 0$ für $i < 0$ oder $j < 0$.

Wir definieren den Funktor *Totalkomplex* $\mathrm{CC}^{\llcorner}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\mathrm{t}} \mathrm{C}(\mathcal{B})$ auf den Objekten durch

$$(\mathrm{t}X)^k \;:=\; \bigoplus_{i+j=k} X^{i,j}\;,$$

sowie dadurch, daß das Differential $((\mathrm{t}X)^k \xrightarrow{D} (\mathrm{t}X)^{k+1}) = (\bigoplus_{i+j=k} X^{i,j} \xrightarrow{D} \bigoplus_{i+j=k+1} X^{i,j})$ die Matrixeinträge $X^{i,j} \xrightarrow{(-1)^i d} X^{i,j+1}$ und $X^{i,j} \xrightarrow{(-1)^i \delta} X^{i+1,j}$ aufweist, und ansonsten nur Nullen. Hierbei sei $k \geqslant 0$.

In anderen Worten, unter Unterschlagung der Nullobjekte an den Positionen $k < 0$ erhalten wir

$$\mathrm{t}X \;=\; \left(X^{0,0} \xrightarrow{(d\ \delta)} X^{0,1} \oplus X^{1,0} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} d & \delta & 0 \\ 0 & -d & -\delta \end{smallmatrix}\right)} X^{0,2} \oplus X^{1,1} \oplus X^{2,0} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} d & \delta & 0 & 0 \\ 0 & -d & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & d & \delta \end{smallmatrix}\right)} X^{0,3} \oplus X^{1,2} \oplus X^{2,1} \oplus X^{3,0} \longrightarrow \cdots \right)$$

Matrixmultiplikation liefert $DD = 0$, es ist $\mathrm{t}X$ also in der Tat ein Komplex.

Auf den Morphismen operiere der Totalkomplexfunktor t summandenweise, i.e. an Position k hat das Bild eines Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ von Doppelkomplexen die Diagonalmatrix $(\mathrm{t}X)^k = \bigoplus_{i+j=k} X^{i,j} \xrightarrow{(\mathrm{t}f)^k} \bigoplus_{i+j=k} Y^{i,j} = (\mathrm{t}Y)^k$ mit den Diagonaleinträgen $X^{i,j} \xrightarrow{f^{i,j}} Y^{i,j}$ gegeben ist. Da $f^{i,j}$ stets mit d und mit δ kommutiert, ist $\mathrm{t}X \xrightarrow{\mathrm{t}f} \mathrm{t}Y$ in der Tat ein Morphismus von Komplexen. Auch folgt die Verträglichkeit von t mit Identität und Komposition.

Dual, schreibt man $X_{i,j} := X^{-i,-j}$ für ein $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{CC}(\mathcal{B})$, und bezeichnet $\mathrm{CC}^{\urcorner}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{CC}(\mathcal{B})$ die volle additive Teilkategorie von $\mathrm{CC}(\mathcal{B})$ bestehend aus den Doppelkomplexen X mit $X_{i,j} \simeq 0$ für $i < 0$ oder $j < 0$, so erhält man einen Funktor *Totalkomplex* $\mathrm{CC}^{\urcorner}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\mathrm{t}} \mathrm{C}(\mathcal{B})$.

1.6.2.3 Abgeleitete Funktoren eines biadditiven Funktors

Seien nun R, R' und S Ringe, sei $\mathcal{A} = R$-Mod, $\mathcal{A}' = R'$-Mod und $\mathcal{B} = S$-Mod. Sei $R\text{-Mod} \times R'\text{-Mod} \xrightarrow{F} S\text{-Mod}$ ein biadditiver Funktor.

Sei $\mathrm{C}^+(R\text{-Mod})$ die volle Teilkategorie von $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$, welche aus Komplexen X mit $X^i \simeq 0$ für $i < 0$ besteht. Genauso, sei $\mathrm{K}^+(R\text{-Mod})$ die volle Teilkategorie der Homotopiekategorie $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$, welche aus Komplexen X mit $X^i \simeq 0$ für $i < 0$ besteht.

> Hier weichen wir etwas von der üblichen Konvention ab, in welcher so die nach links beschränkten Komplexe bezeichnet werden – was hier die Darstellung aber erschweren würde.

Dual, sei $\mathrm{C}^-(R\text{-Mod})$ die volle Teilkategorie von $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$, welche aus Komplexen X mit $X_i \simeq 0$ für $i < 0$ besteht. Genauso, sei $\mathrm{K}^-(R\text{-Mod})$ die volle Teilkategorie der Homotopiekategorie $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$, welche aus Komplexen X mit $X_i \simeq 0$ für $i < 0$ besteht.

In Aufgabe 31 wird gezeigt, daß für einen nullhomotopen Morphismus $U \xrightarrow{f} V$ in $\mathrm{C}^+(\mathcal{A})$ und für beliebiges $U' \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}^+(\mathcal{A}')$ gilt, daß $\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(f, U')$ nullhomotop ist. Dasselbe gilt mit vertauschten Rollen von U und U'. Unter Beachtung von $F^{\mathrm{CC}}(f, f') = F^{\mathrm{CC}}(f, U')F^{\mathrm{CC}}(V, f')$ für $U \xrightarrow{f} V$ in $\mathrm{C}^+(\mathcal{A})$ und $U' \xrightarrow{f'} V'$ in $\mathrm{C}^+(\mathcal{A}')$ induziert $\mathrm{t} \circ F^{\mathrm{CC}}$ folgenden Funktor auf dem Niveau der Homotopiekategorien.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}^+(R\text{-Mod}) \times \mathrm{C}^+(R'\text{-Mod}) \arrow[r, "\mathrm{t} \circ F^{\mathrm{CC}}"] \arrow[d, "Q \times Q"'] & \mathrm{C}(S\text{-Mod}) \arrow[d, "Q"] \\
\mathrm{K}^+(R\text{-Mod}) \times \mathrm{K}^+(R'\text{-Mod}) \arrow[r, "F^{\mathrm{K}}"] & \mathrm{K}(S\text{-Mod})\,.
\end{tikzcd}$$

Es ist dann F^{K} biadditiv.

Wir setzen für $i \geqslant 0$

$$\begin{array}{l}
\Big(R\text{-Mod} \times R'\text{-Mod} \xrightarrow{\mathrm{R}^i F} S\text{-Mod}\Big) \;:= \\
\Big(R\text{-Mod} \times R'\text{-Mod} \xrightarrow{\mathrm{IRes} \times \mathrm{IRes}} \mathrm{K}^+(R\text{-Mod}) \times \mathrm{K}^+(R\text{-Mod}) \xrightarrow{F^{\mathrm{K}}} \mathrm{K}(S\text{-Mod}) \xrightarrow{\mathrm{H}^i} S\text{-Mod}\Big)
\end{array}$$

und, dual,

$$\begin{array}{l}
\Big(R\text{-Mod} \times R'\text{-Mod} \xrightarrow{\mathrm{L}_i F} S\text{-Mod}) \;:= \\
\Big(R\text{-Mod} \times R'\text{-Mod} \xrightarrow{\mathrm{PRes} \times \mathrm{PRes}} \mathrm{K}^-(R\text{-Mod}) \times \mathrm{K}^-(R\text{-Mod}) \xrightarrow{F^{\mathrm{K}}} \mathrm{K}(S\text{-Mod}) \xrightarrow{\mathrm{H}_i} S\text{-Mod}\Big)\,.
\end{array}$$

Definition. Sei weiterhin R ein Ring. Wir definieren biadditive Funktoren durch

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Ext}^i_R(-,=) & := & \mathrm{R}^i\big({}_R(-,=)\big) \\
\mathrm{Tor}^R_i(-,=) & := & \mathrm{L}_i\big(-\otimes_R =\big)\,.
\end{array}$$

wobei $S = \mathbf{Z}$. Hierbei machen wir für Ext^i von der Bemerkung aus §1.5.6 bezüglich Dualisierens dahingehend Gebrauch, daß wir $(R\text{-Mod})^\circ$ wie eine Kategorie von Moduln verwenden, mit der Begründung, daß die dualen Argumente angewandt werden können. Für Tor^R_i ist R° in der Rolle von R, und R in der Rolle von R'.

Es heiße $\mathrm{Ext}^i_R(X, X')$ die *i-te Erweiterungsgruppe* von $X,\ X' \in \mathrm{Ob}\,R\text{-Mod}$.

Es heiße $\mathrm{Tor}^R_i(X, X')$ die *i-te Torsionsgruppe* von $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Mod}\text{-}R$ und $X' \in \mathrm{Ob}\,R\text{-Mod}$.

1.6.2.4 Drei Berechnungsmethoden für die abgeleiteten Funktoren eines biadditiven Funktors

Wir behalten die Bezeichnungen $R\text{-Mod} \times R'\text{-Mod} \xrightarrow{F} S\text{-Mod}$ des vorigen Abschnittes bei.

Eine Sequenz $X' \longrightarrow X \longrightarrow X''$ von Doppelkomplexen heiße *kurz exakt*, wenn $X'^{i,j} \longrightarrow X^{i,j} \longrightarrow X''^{i,j}$ kurz exakt ist für alle i und j in $\mathbf{Z}$. Da direkte Summen kurz exakter Sequenzen kurz exakt sind, bildet der Totalkomplexfunktor t kurz exakte Sequenzen von Doppelkomplexen auf kurz exakte Sequenzen von Komplexen ab.

Ein Morphismus $U \xrightarrow{f} V$ in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$ oder in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$ heiße *Quasiisomorphismus,* falls $\mathrm{H}^i f$ für alle $i \in \mathbf{Z}$ ein Isomorphismus ist.

Beispiel. Sei $X \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod}$. Sei weiterhin $\mathrm{Konz}\, X \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{C}(R\text{-Mod})$ der Komplex, der nur an Position 0 den Eintrag X hat, und ansonsten Nullen; dito auf Morphismen. Sei $I \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{K}^{0,+}(R\text{-Inj})$ eine injektive Auflösung von X. Oben hatten wir bereits einen Morphismus von Komplexen von $\mathrm{Konz}\, X$ nach $\mathrm{IRes} X$ betrachtet, der an der Position 0 durch $X \rightarrowtail I^0$ und ansonsten durch 0 gegeben ist.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Konz}\, X \arrow[d, "\tilde{\rho} X"'] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, tail] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\mathrm{IRes} X & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "d"] & I^1 \arrow[r, "d"] & I^2 \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Dies ist ein Quasiisomorphismus. Das Tupel $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho} X)_{X \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod}}$ bildet eine punktweise quasiisomorphe Transformation von Konz nach IRes.

Ist $X \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{CC}(S\text{-Mod})$ ein Doppelkomplex, und sind $i,\ j \in \mathbf{Z}$, so seien

$$
\begin{array}{lcll}
X^{*,j} & := & (\cdots \xrightarrow{\delta} X^{k,j} \xrightarrow{\delta} X^{k+1,j} \xrightarrow{\delta} X^{k+2,j} \xrightarrow{\delta} \cdots) & \in \ \mathrm{Ob}\, \mathrm{C}(S\text{-Mod}) \\
X^{i,*} & := & (\cdots \xrightarrow{d} X^{i,k} \xrightarrow{d} X^{i,k+1} \xrightarrow{d} X^{i,k+2} \xrightarrow{d} \cdots) & \in \ \mathrm{Ob}\, \mathrm{C}(S\text{-Mod})\ ,
\end{array}
$$

und dito für Morphismen von Doppelkomplexen.

Lemma. *Sei* $X \xrightarrow{f} Y$ *ein Morphismus in* $\mathrm{CC}^{\llcorner}(S\text{-Mod})$.

Ist $X^{i,*} \xrightarrow{f^{i,*}} Y^{i,*}$ *ein Quasiisomorphismus für alle* $i \geqslant 0$*, so ist auch* $\mathrm{t}X \xrightarrow{\mathrm{t}f} \mathrm{t}Y$ *ein Quasiisomorphismus. Kurz, ist* f *zeilenweise quasiisomorph, so auch total.*

Symmetrisch hierzu, ist $X^{*,j} \xrightarrow{f^{*,j}} Y^{*,j}$ *ein Quasiisomorphismus für alle* $j \geqslant 0$*, so ist auch* $\mathrm{t}X \xrightarrow{\mathrm{t}f} \mathrm{t}Y$ *ein Quasiisomorphismus. Kurz, ist* f *spaltenweise quasiisomorph, so auch total.*

Beweis. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein zeilenweiser Quasiisomorphismus $\mathrm{CC}^{\llcorner}(S\text{-Mod})$ im eben genannten Sinne. Für $I \subseteq \mathbf{Z}$ schreiben wir $X^{I,*} \in \mathrm{CC}^{\llcorner}(S\text{-Mod})$ für den Doppelkomplex, der aus X durch Ersetzen von $X^{k,j}$ durch 0 für $k \in \mathbf{Z} \smallsetminus I$ und $j \in \mathbf{Z}$ hervorgeht. Dito für Morphismen.

Für $i \geqslant -1$ haben wir einen Morphismus kurz exakter Sequenzen von Doppelkomplexen (in $\llbracket \Delta_2, \mathrm{CC}^{\llcorner}(S\text{-Mod}) \rrbracket$)

$$
\begin{tikzcd}
X^{\{i+1\},*} \arrow[r] \arrow[d, "f^{\{i+1\},*}"] & X^{[0,i+1],*} \arrow[r] \arrow[d, "f^{[0,i+1],*}"] & X^{[0,i],*} \arrow[d, "f^{[0,i],*}"] \\
Y^{\{i+1\},*} \arrow[r] & Y^{[0,i+1]*} \arrow[r] & Y^{[0,i],*}
\end{tikzcd}
$$

und entsprechend einen Morphismus kurz exakter Sequenzen von Komplexen

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{t}X^{\{i+1\},*} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{t}f^{\{i+1\},*}"] & \mathrm{t}X^{[0,i+1],*} \arrow[r] \arrow[d, "f^{[0,i+1]},*"] & \mathrm{t}X^{[0,i],*} \arrow[d, "\mathrm{t}f^{[0,i],*}"] \\
\mathrm{t}Y^{\{i+1\},*} \arrow[r] & \mathrm{t}Y^{[0,i+1]*} \arrow[r] & \mathrm{t}Y^{[0,i],*}
\end{tikzcd}
$$

Wir *behaupten,* daß $\mathrm{t}f^{[0,i],*}$ ein Quasiisomorphismus ist für alle $i \geqslant -1$. Führen wir eine Induktion nach i. Für $i = -1$ ist nichts zu zeigen.

Sei nun $i \geqslant -1$ und $\mathrm{t}f^{[0,i],*}$ als Quasiisomorphismus bekannt. Da nach Voraussetzung $\mathrm{t}f^{\{i+1\},*}$ ein Quasiisomorphismus ist, ist mit der lang exakten Homologiesequenz aus Aufgabe 20.(1) und mit Aufgabe 20.(2) auch $\mathrm{t}f^{[0,i+1],*}$ ein Quasiisomorphismus. Dies zeigt die *Behauptung.*

Nun ist aber nach Definition des Totalkomplexes

$$\mathrm{H}^j(\mathrm{t}X \xrightarrow{\mathrm{t}f} \mathrm{t}Y) \;=\; \mathrm{H}^j(\mathrm{t}X^{[0,j+1],*} \xrightarrow{\mathrm{t}f^{[0,j+1],*}} \mathrm{t}Y^{[0,j+1],*})$$

für $j \geqslant 0$, da das Abschneiden der Zeilen an Position $> j+1$ den jeweiligen Totalkomplex und auch den Morphismus an den Positionen 0 bis $j+1$ unverändert läßt, und da für die Berechnung der Homologie nur die Positionen $j-1$, j und $j+1$ eine Rolle spielen. Da nun aber rechts ein Isomorphismus steht, steht auch links ein Isomorphismus. $\square$

Beachte, daß $(\mathrm{R}^i F(-,X'))(X) = \mathrm{H}^i F(\mathrm{IRes} X, X')$ für $i \geqslant 0$ ein Funktor in $(X,X') \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod} \times R'\text{-Mod}$ ist; etc.

Satz. *Wir erinnern daran, daß R, R' und S Ringe sind, und daß* $R\text{-Mod} \times R'\text{-Mod} \xrightarrow{F} S\text{-Mod}$ *ein biadditiver Funktor ist.*

(1) *Ist $F(-,I')$ exakt für alle injektiven R'-Moduln I', und ist $F(I,-)$ exakt für alle injektiven R-Moduln I, so ist für $i \geqslant 0$*

$$\mathrm{R}^i F(X,X') \;\simeq\; (\mathrm{R}^i F(X,=))(X')\;,$$

natürlich in $(X,X') \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod} \times R'\text{-Mod}$*; und es ist*

$$\mathrm{R}^i F(X,X') \;\simeq\; (\mathrm{R}^i F(-,X'))(X)\;,$$

natürlich in $(X,X') \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod} \times R'\text{-Mod}$.

(2) *Dual dazu, ist $F(-,P')$ exakt für alle projektiven R'-Moduln P', und ist $F(P,-)$ exakt für alle projektiven R-Moduln P, so ist für $i \geqslant 0$*

$$\mathrm{L}_i F(X,X') \;\simeq\; (\mathrm{L}_i F(X,=))(X')\;,$$

natürlich in $(X,X') \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod} \times R'\text{-Mod}$*; und es ist*

$$\mathrm{L}_i F(X,X') \;\simeq\; (\mathrm{L}_i F(-,X'))(X)\;,$$

natürlich in $(X,X') \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod} \times R'\text{-Mod}$.

Beweis. Für gegebenes $X' \in \mathrm{Ob}\, R'\text{-Mod}$ konstruieren wir eine Isotransformation $(\mathrm{R}^i F(-,X'))(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^i F(X,X')$, natürlich in $(X,X') \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod} \times R'\text{-Mod}$. Wir verwenden hierzu die oben beschriebene punktweise quasiisomorphe Transformation

Konz $\xrightarrow{\tilde\rho}$ IRes zwischen Funktoren von R'-Mod nach $\mathrm{K}^+(R'\text{-Mod})$. Wir erhalten einen Morphismus

$$F^{\mathrm{K}}(\mathrm{IRes}X, \mathrm{Konz}\,X') \quad \xrightarrow{F^{\mathrm{K}}(\mathrm{IRes}X,\tilde\rho X')} \quad F^{\mathrm{K}}(\mathrm{IRes}X, \mathrm{IRes}X')\ ,$$

natürlich in $(X,X') \in \mathrm{Ob}\,R\text{-Mod}\times R'\text{-Mod}$. Wir behaupten, daß es sich um einen Quasiisomorphismus handelt. Mit vorigem Lemma genügt es zu zeigen, daß

$$F(I^i, \mathrm{Konz}\,X') \quad \xrightarrow{F(I^i,\tilde\rho X')} \quad F(I^i, \mathrm{IRes}X')$$

für alle $i \geqslant 0$ einen Quasiisomorphismus darstellt, wobei $\mathrm{IRes}X = (I^0 \xrightarrow{d} I^1 \xrightarrow{d} \cdots)$ geschrieben werde. Da $F(I^i,-)$ nach Voraussetzung exakt ist, genügt es zu zeigen, daß für einen exakten additiven Funktor $R'\text{-Mod} \xrightarrow{G} S\text{-Mod}$ der punktweise definierte Funktor $\mathrm{K}(R'\text{-Mod}) \xrightarrow{\mathrm{K}(G)} \mathrm{K}(S\text{-Mod})$ Quasiisomorphismen auf Quasiisomorphismen abbildet. Dies folgt, da diesenfalls $G \circ \mathrm{H}^i \simeq \mathrm{H}^i \circ \mathrm{K}(G)$ für $i \in \mathbf{Z}$. Damit ist die Behauptung bezüglich Quasiisomorphie gezeigt.

Anwenden von H^i für $i \geqslant 0$ gibt nun den Isomorphismus

$$\begin{array}{l} (\mathrm{R}^i F(-,X'))(X) \;=\; \mathrm{H}^i F(\mathrm{IRes}X, X') \;\simeq\; \mathrm{H}^i F^{\mathrm{K}}(\mathrm{IRes}X, \mathrm{Konz}\,X') \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \xrightarrow[\sim]{\mathrm{H}^i F^{\mathrm{K}}(\mathrm{IRes}X,\tilde\rho X')} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{H}^i F^{\mathrm{K}}(\mathrm{IRes}X, \mathrm{IRes}X') \;=\; \mathrm{R}^i F(X,X')\ , \end{array}$$

natürlich in $(X,X') \in \mathrm{Ob}\,R\text{-Mod}\times R'\text{-Mod}$. ▫

Wir stellen alle Interpretationen der Erweiterungs- und Torsionsgruppen zusammen.

Korollar. *Sei weiterhin R ein Ring. Sei $i \geqslant 0$.*

Es ist

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Ext}^i_R(X,Y) & \overset{1.}{=} & (\mathrm{R}^i\,{}_R(-,=))(X,Y) & = \;\mathrm{H}^i\mathrm{t}\,{}_R(\mathrm{PRes}X, \mathrm{IRes}Y) \\ & \overset{2.}{\simeq} & (\mathrm{R}^i\,{}_R(X,=))(Y) & = \;\mathrm{H}^i\,{}_R(X, \mathrm{IRes}Y) \\ & \overset{3.}{\simeq} & (\mathrm{R}^i\,{}_R(-,Y))(X) & = \;\mathrm{H}^i\,{}_R(\mathrm{PRes}X, Y)\ , \end{array}$$

jeweils natürlich in der entsprechenden Variablen $Y \in \mathrm{Ob}\,R\text{-Mod}$ *resp.* $X \in \mathrm{Ob}(R\text{-Mod})^\circ$. *Insbesondere ist* $\mathrm{Ext}^0_R(X,Y) \simeq {}_R(X,Y)$.

Es ist

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Tor}_i^R(X,Y) & \overset{1.}{=} & (\mathrm{L}_i(-\otimes_R =))(X,Y) & = \;\mathrm{H}_i\mathrm{t}(\mathrm{PRes}X \otimes_R \mathrm{PRes}Y) \\ & \overset{2.}{\simeq} & (\mathrm{L}_i(X\otimes_R =))(Y) & = \;\mathrm{H}_i(X \otimes_R \mathrm{PRes}Y) \\ & \overset{3.}{\simeq} & (\mathrm{L}_i(-\otimes_R Y))(X) & = \;\mathrm{H}_i(\mathrm{PRes}X \otimes_R Y)\ , \end{array}$$

jeweils natürlich in der entsprechenden Variablen $Y \in \mathrm{Ob}\,R\text{-Mod}$ *resp.* $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Mod}\text{-}R$. *Insbesondere ist* $\mathrm{Tor}_0^R(X,Y) \simeq X \otimes_R Y$.

Insbesondere haben die Erweiterungs- und Torsionsgruppen in beiden Variablen *lang exakte Sequenzen induziert von kurz exakten Sequenzen von Moduln.*

Bis auf Isomorphie ändert sich jeweils nichts, wenn statt PRes$X$ *resp.* IRes$X$ *eine beliebige projektive resp. injektive Auflösung von* X *verwandt wird; dito für* Y.

Beweis. Es ist ${}_R(P, =)$ exakt für P projektiv in R-Mod, i.e. für P injektiv in $(R\text{-Mod})^\circ$, und es ist ${}_R(-, I)$ exakt für I injektiv in R-Mod, vgl. Aufgabe 18.(4). Ferner ist $P \otimes_R =$ exakt für P projektiv in Mod-R, und analog ist $- \otimes_R P$ exakt für P projektiv in R-Mod; vgl. Aufgabe 24. $\square$

Beispiel.

(1) Im Beispiel (1) in §1.6.1 wurden die Funktoren $\mathrm{Tor}_i^{\mathbf{Z}/8}(\mathbf{Z}/4, -)$ für $i \geqslant 0$ auf die kurz exakte Sequenz $\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ angewandt und die entsprechende lang exakte Sequenz gebildet – wobei dort die Funktoren nach $(\mathbf{Z}/4)$-Mod statt nach $\mathbf{Z}$-Mod abbilden, was aber für das Ergebnis keinen Unterschied bewirkt. In Beispiel (2) in §1.6.1 wurden stattdessen die Funktoren $\mathrm{Tor}_i^{\mathbf{Z}/8}(\mathbf{Z}/2, -)$ angewandt.

(2) In Aufgabe 25.(2) wurden die Funktoren $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{Z}/16}(\mathbf{Z}/4, -)$ für $i \geqslant 0$ auf die kurz exakte Sequenz $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ angewandt und die entsprechende lang exakte Sequenz gebildet – wobei dort die Funktoren nach $(\mathbf{Z}/8)$-Mod statt nach $\mathbf{Z}$-Mod abbilden, was aber für das Ergebnis keinen Unterschied bewirkt. In Aufgabe 25.(3) wurden stattdessen die Funktoren $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{Z}/8}(-, \mathbf{Z}/4)$ angewandt.

Unter anderem erhielten wir sowohl in Aufgabe 25.(2) als auch in Aufgabe 25.(3) das Resultat $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{Z}/16}(\mathbf{Z}/4, \mathbf{Z}/4) \simeq \mathbf{Z}/4$ für alle $i \geqslant 0$, in Übereinstimmung mit vorstehendem Korollar.

Kapitel 2

(Co)homologie von Gruppen

2.1 Definition und erste Eigenschaften

2.1.1 Gruppenringe

Sei R ein kommutativer Ring.

Eine *R-Algebra* (A, φ) ist ein Ring A, zusammen mit einem Ringmorphismus

$$R \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Z}(A) \subseteq A\,.$$

Hierbei bezeichnet $\mathrm{Z}(A) := \{z \in A \;:\; za = az \text{ für alle } a \in A\}$ das *Zentrum* von A.

Meist schreibt man $(r\varphi)a =: r \cdot_\varphi a =: r \cdot a$, sowie $A = (A, \varphi)$.

Ein *Morphismus von R-Algebren* (A, φ) und (B, ψ) ist ein Ringmorphismus $A \xrightarrow{f} B$ so, daß $\varphi f = \psi$.

> Jeder Ring ist auf eindeutige Weise eine $\mathbf{Z}$-Algebra, und jeder Ringmorphismus ist ein $\mathbf{Z}$-Algebrenmorphismus. Der Begriff einer R-Algebra ist dazu geschaffen, die Rolle des Grundrings von $\mathbf{Z}$ auf R zu übertragen.

Sei G eine Gruppe. Die *Gruppenalgebra* (oder der *Gruppenring*) RG ist ein freier R-Modul auf der Menge G. Mit der Multiplikation

$$\left(\sum_{g \in G} r_g g\right)\left(\sum_{h \in G} s_h h\right) := \sum_{k \in G}\left(\sum_{gh=k} r_g s_h\right) k$$

wird RG ein Ring, wobei r_g, $s_h \in R$ stets, und wobei zu beachten ist, daß alle bis auf endlich viele Koeffizienten r_g resp. s_h verschwinden. Mit dem Morphismus $R \xrightarrow{\varphi} RG$, $r \longmapsto r \cdot 1$ wird RG zu einer R-Algebra.

Der *triviale* RG-Modul ist als R-Modul schlicht R, mit der Operation $g \cdot r := r$ für alle $g \in G$ und alle $r \in R$.

Es ist RG kommutativ genau dann, wenn G abelsch ist. Es müssen also auch nichtkommutative Ringe betrachtet werden.

Je näher R an $\mathbf{Z}$ ist, desto interessanter ist RG.

In Aufgabe 32 wird verifiziert, daß der Gruppenring RG folgende universelle Eigenschaft hat.

Es ist $G \xrightarrow{\varepsilon G} RG$, $g \longrightarrow 1 \cdot g$, ein Morphismus von Monoiden – eine Gruppe ist ein spezielles Monoid, und der Ring RG bildet zusammen mit seiner Multiplikation ein Monoid.

Ist umgekehrt für eine R-Algebra A ein Morphismus von Monoiden $G \xrightarrow{f} A$ gegeben, so gibt es genau einen R-Algebrenmorphismus $RG \xrightarrow{\hat{f}} A$ mit

$$(G \xrightarrow{\varepsilon G} RG \xrightarrow{\hat{f}} A) \;=\; (G \xrightarrow{f} A)\,.$$

Ist z.B. M ein R-Modul, und ist $G \xrightarrow{\varphi} (\operatorname{End}_R M)^\circ$ ein Monoidmorphismus, so erhalten wir auf diese Weise einen R-Algebrenmorphismus $RG \longrightarrow (\operatorname{End}_R M)^\circ$, welcher eine RG-Modulstruktur auf M definiert. Elementweise gesprochen, um eine RG-Modulstruktur auf M zu definieren, müssen wir $g \cdot m$ für alle $g \in G$ und alle $m \in M$ definieren, und zwar so, daß $g \cdot (-)$ R-linear ist, und so, daß $1 \cdot m = m$ und $(gh) \cdot m = g \cdot (h \cdot m)$ stets gelten.

2.1.2 (Co)homologie

Sei weiterhin R ein kommutativer Ring. Sei G eine Gruppe.

In Aufgabe 29 wird verifiziert, daß für eine R-Algebra A die Erweiterungs- und Torsionsgruppen zwischen A-Moduln eine R-Modulstruktur tragen.

Sei $i \geqslant 0$. Wir definieren einen additiven Funktor

$$\begin{array}{rcl} RG\text{-Mod} & \longrightarrow & R\text{-Mod} \\ M & \longmapsto & \mathrm{H}^i(G, M; R) \;:=\; \operatorname{Ext}^i_{RG}(R, M)\,. \end{array}$$

Es ist $\mathrm{H}^i(G, M; R)$ die *i-te Cohomologiegruppe von G mit Koeffizienten in M über R.*

Beachte, daß wegen ${}_{RG}(R, M) \simeq M^G$, natürlich in M, der Funktor $\mathrm{H}^i(G, -; R)$ auch der i-te Rechtsabgeleitete des Funktors $M \longmapsto M^G$ ist, der einem RG-Modul den R-Modul seiner Fixpunkte unter G zuordnet.

Wir setzen im Falle des trivialen Moduls $M = R$ noch $\mathrm{H}^i(G; R) := \mathrm{H}^i(G, R; R) = \operatorname{Ext}^i_{RG}(R, R)$.

Sei $i \geqslant 0$. Wir definieren einen additiven Funktor

$$\begin{array}{rcl} RG\text{-Mod} & \longrightarrow & R\text{-Mod} \\ M & \longmapsto & \mathrm{H}_i(G, M; R) \;:=\; \operatorname{Tor}^{RG}_i(R, M)\,. \end{array}$$

Es ist $\mathrm{H}_i(G,M;R)$ die *i-te Homologiegruppe von G mit Koeffizienten in M über R.*

Wir setzen im Falle des trivialen Moduls $M = R$ noch $\mathrm{H}_i(G;R) := \mathrm{H}_i(G,R;R) = \mathrm{Tor}_i^{RG}(R,R)$.

Man schreibt auch

$$\begin{array}{rcrclcl} M_G & := \mathrm{H}_0(G,M;R) = & R & \otimes_{RG} & M & \simeq & M/R\langle gm - m \,:\, m\in M,\ g\in G\rangle \\ & & r & \otimes & m & \longmapsto & rm \\ & & 1 & \otimes & m & \longleftarrow\!\!| & m \end{array}$$

Kurz, M_G ist der größte Quotient von M als RG-Modul, auf welchem jedes Element von G identisch operiert. Der Funktor $\mathrm{H}^i(G,-;R)$ ist auch der i-te Linksabgeleitete des Funktors $M \longmapsto M_G$.

Im Falle $R = \mathbf{Z}$ dürfen wir schließlich noch den Grundring unterschlagen und

$$\begin{array}{lcllcl} \mathrm{H}^i(G,M) & := & \mathrm{H}^i(G,M;\mathbf{Z}) & = & \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z},M) \\ \mathrm{H}^i(G) & := & \mathrm{H}^i(G;\mathbf{Z}) & = & \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}) \\ \mathrm{H}_i(G,M) & := & \mathrm{H}_i(G,M;\mathbf{Z}) & = & \mathrm{Tor}_i^{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z},M) \\ \mathrm{H}_i(G) & := & \mathrm{H}_i(G;\mathbf{Z}) & = & \mathrm{Tor}_i^{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}) \end{array}$$

schreiben.

Sei $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ eine kurz exakte Sequenz von RG-Moduln. Der lang exakten Ext-Sequenz in der zweiten Variablen entnehmen wir die lang exakte Sequenz

$$\begin{array}{rlclcl} 0 \longrightarrow & \mathrm{H}^0(G,M';R) & \xrightarrow{\mathrm{H}^0(G,i;R)} & \mathrm{H}^0(G,M;R) & \xrightarrow{\mathrm{H}^0(G,p;R)} & \mathrm{H}^0(G,M'';R) \\ \xrightarrow{\partial^0} & \mathrm{H}^1(G,M';R) & \xrightarrow{\mathrm{H}^1(G,i;R)} & \mathrm{H}^1(G,M;R) & \xrightarrow{\mathrm{H}^1(G,p;R)} & \mathrm{H}^1(G,M'';R) \\ \xrightarrow{\partial^1} & \mathrm{H}^2(G,M';R) & \xrightarrow{\mathrm{H}^2(G,i;R)} & \cdots & & \end{array}$$

Die Gestalt der Verbindungsmorphismen betrachten wir näher, sobald wir homologieklassenrepräsentierende Elemente zur Verfügung haben.

Der lang exakten Tor-Sequenz in der zweiten Variablen entnehmen wir die lang exakte Sequenz

$$\begin{array}{lclclcl} & & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{H}_2(G,p;R)} & \mathrm{H}_2(G,M'';R) & \xrightarrow{\partial_2} & \\ \mathrm{H}_1(G,M';R) & \xrightarrow{\mathrm{H}_1(G,i;R)} & \mathrm{H}_1(G,M;R) & \xrightarrow{\mathrm{H}_1(G,p;R)} & \mathrm{H}_1(G,M'';R) & \xrightarrow{\partial_1} & \\ \mathrm{H}_0(G,M';R) & \xrightarrow{\mathrm{H}_0(G,i;R)} & \mathrm{H}_0(G,M;R) & \xrightarrow{\mathrm{H}_0(G,p;R)} & \mathrm{H}_0(G,M'';R) & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

Bemerkung. *Sei M ein RG-Modul. Sei $i \geqslant 0$. Wir haben Isomorphismen abelscher Gruppen*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^i(G,M;R)|_{\mathbf{Z}} & \simeq & \mathrm{H}^i(G,M|_{\mathbf{Z}G}) \\ \mathrm{H}_i(G,M;R)|_{\mathbf{Z}} & \simeq & \mathrm{H}_i(G,M|_{\mathbf{Z}G})\,. \end{array}$$

Hierbei bedeutet $\mathrm{H}^i(G,M;R)|_{\mathbf{Z}}$ die unterliegende abelsche Gruppe von $\mathrm{H}^i(G,M;R)$ und $M|_{\mathbf{Z}G}$ der sich vermöge des Ringmorphismus $\mathbf{Z}G \longrightarrow RG$ aus M ergebende $\mathbf{Z}G$-Modul.

Beweis. Sei P eine projektive Auflösung von $\mathbf{Z}$ über $\mathbf{Z}G$, sei $\tilde{P}$ der um das Objekt $\mathbf{Z}$ an Position -1 ergänzte azyklische Komplex. Da $\mathbf{Z}|_{\mathbf{Z}}$ projektiv über $\mathbf{Z}$ ist, ist $\tilde{P}|_{\mathbf{Z}}$ split azyklisch über $\mathbf{Z}$. Da $(RG \otimes_{\mathbf{Z}G} \tilde{P})|_R \simeq R \otimes_{\mathbf{Z}} (\tilde{P}|_{\mathbf{Z}})$ als Komplexe von R-Moduln und da letzterer Komplex split azyklisch über R ist, ist $RG \otimes_{\mathbf{Z}G} \tilde{P}$ azyklisch über RG. Da ferner mit Aufgabe 22.(1) das Tensorieren die Projektivität erhält, ist mithin $RG \otimes_{\mathbf{Z}G} P$ eine projektive Auflösung von $RG \otimes_{\mathbf{Z}G} \mathbf{Z} \simeq R$. Folglich ist

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{H}^i(G,M;R)|_{\mathbf{Z}} & = & \mathrm{Ext}^i_{RG}(R,M)|_{\mathbf{Z}} \\
& \simeq & \mathrm{H}^i\big({}_{RG}(RG \otimes_{\mathbf{Z}G} P, M)\big)|_{\mathbf{Z}} \\
& \overset{\text{Adj., Aufg. 13 (4)}}{\simeq} & \mathrm{H}^i\big({}_{\mathbf{Z}G}(P, M|_{\mathbf{Z}G})\big) \\
& \simeq & \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}, M|_{\mathbf{Z}G}) \\
& = & \mathrm{H}^i(G, M|_{\mathbf{Z}G})\ .
\end{array}$$

Ferner ist, fassen wir P als projektive Auflösung von $\mathbf{Z}$ als $\mathbf{Z}G$-Rechtsmodul auf, vermöge der Operation von $g \in G$ von rechts via der Operation von g^- von links,

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{H}_i(G,M;R)|_{\mathbf{Z}} & = & \mathrm{Tor}_i^{RG}(R,M)|_{\mathbf{Z}} \\
& \simeq & \mathrm{H}_i\big((P \otimes_{\mathbf{Z}G} RG) \otimes_{RG} M)\big) \\
& \simeq & \mathrm{H}_i\big(P \otimes_{\mathbf{Z}G} (M|_{\mathbf{Z}G})\big) \\
& \simeq & \mathrm{Tor}_i^{\mathbf{Z}G}(R, M|_{\mathbf{Z}G}) \\
& = & \mathrm{H}_i(G, M|_{\mathbf{Z}G})\ .
\end{array}$$

□

2.2 Interne Tensorprodukte und internes Hom

2.2.1 Definition und Eigenschaften

Tensoriert man zwei RG-Moduln über R, so erhält man nach geeigneter Definition wieder einen RG-Modul; man sagt, dies definiert eine in RG-Mod interne Operation. Ähnliches gilt, wendet man den Homfunktor über R an.

Sei R ein kommutativer Ring. Sei G eine Gruppe. Seien $L,\ M,\ N\ \in\ \mathrm{Ob}\, RG$-Mod.

Es ist $M \otimes_R N$ ein R-Modul (wie in Aufgabe 29 für $A = R$, Tor und $i = 0$). Setzt man nun

$$g \cdot (m \otimes n) \ := \ gm \otimes gn$$

für $g \in G$, $m \in M$, und $n \in N$, so definiert dies die Struktur eines RG-Moduls auf $M \otimes_R N$.

Es ist ${}_R(M,N)$ ein R-Modul (wie in Aufgabe 29 für $A = R$, Ext und $i = 0$). Setzt man nun

$$m(gf) \;:=\; g((g^{-1}m)f)$$

für $f \in {}_R(M,N)$, $g \in G$ und $m \in M$, so definiert dies zunächst ein Element $gf \in {}_R(M,N)$. Diese Zuweisung definiert dann eine RG-Modulstruktur auf ${}_R(M,N)$. In der Tat wird für $g,\, h \in G$ und $m \in M$

$$m(g(hf)) \;=\; g((g^{-1}m)(hf)) \;=\; g(h((h^{-1}(g^{-1}m))f)) \;=\; (gh)(((gh)^{-1}m)f) \;=\; m((gh)f))\;.$$

Ist keine Verwechslung möglich, so schreibt man auch $M \otimes N := M \otimes_R N$. Ferner bezeichnen wir $M^{\otimes n} := \underbrace{M \otimes M \otimes \cdots \otimes M}_{n \text{ Tensorfaktoren}}$ für $n \geqslant 1$, und $M^{\otimes 0} := R$.

Bemerkung.

(1) Es sind ${}_R(R,M) \simeq M$ und $R \otimes_R M \simeq M$ als RG-Moduln.

(2) Es ist $L \otimes (M \otimes N) \simeq (L \otimes M) \otimes N$ als RG-Moduln.

(3) Es ist $M \otimes N \simeq N \otimes M$ als RG-Moduln, vermöge $m \otimes n \longmapsto n \otimes m$.

(4) Der Modul ${}_R(M,R) =: M^*$ heißt der zu M *duale Modul*. Für $f \in M^*$ und $g \in G$ ist $m(gf) = (g^{-1}m)f$ für $m \in M$.

(5) Es ist ${}_R(M,N)^G = {}_{RG}(M,N)$ (Fixpunkte unter G).

(6) Es gibt Morphismen von RG-Moduln

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mathrm{ev}M} & M^{**} \\ m & \longmapsto & (f \longmapsto mf) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{cccccc} M^* & \otimes_R & N & \xrightarrow{d(M,N)} & {}_R(M,N) \\ f & \otimes & n & \longmapsto & (m \longmapsto (mf)\cdot n)\;. \end{array}$$

In Aufgabe 37 wird jeweils eine hinreichende Bedingung dafür gefunden, daß ein Isomorphismus vorliegt.

Lemma. *Sei M ein RG-Modul, welcher als R-Modul frei auf einer Basis $(m_j \;:\; j \in J)$ ist, wobei J eine Indexmenge bezeichne. Dann ist $RG \otimes_R M$ als RG-Modul frei auf der Basis $(1 \otimes m_j : j \in J)$, und als R-Modul frei auf der Basis $(g \otimes gm_j \;:\; g \in G,\; j \in J)$.*

Beweis. Wir behaupten, daß

$$\begin{array}{ccccc} \coprod_J RG & \xrightarrow{\varphi} & RG & \otimes_R & M \\ e_j & \longmapsto & 1 & \otimes & m_j \end{array}$$

ein Isomorphismus ist, wobei e_j das Element von $\coprod_J RG$ bezeichne, welches bei j eine 1, und sonst 0 stehen hat. Dafür genügt es, die RG-lineare Abbildung φ als R-lineare Abbildung aufzufassen.

Nach Voraussetzung haben wir einen R-linearen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \coprod_J R & \xrightarrow[\sim]{\psi} & M \\ e'_j & \longmapsto & m_j \, , \end{array}$$

wobei e'_j das Element von $\coprod_J R$ bezeichne, welches bei j eine 1, und sonst 0 stehen hat.

Es faktorisiert nun wie in der Lösung zu Aufgabe 24

$$\Big(\coprod_J RG \xrightarrow{\varphi} RG \otimes_R M\Big) \;=\; \Big(\coprod_J RG \xrightarrow{\sim} \coprod_J (RG \otimes_R R) \xrightarrow{\sim} RG \otimes_R \big(\coprod_J R\big) \xrightarrow[\sim]{RG \otimes_R \psi} RG \otimes_R M\Big) \, .$$

Die angegebene R-lineare Basis von $RG \otimes_R M$ ergibt sich nun als Bild der R-linearen Basis $(ge_j \, : \, g \in G, \; j \in J)$ von $\coprod_J RG$ unter dem Isomorphismus $\coprod_J RG \xrightarrow{\sim} RG \otimes_R M$, da $ge_j \longmapsto g(1 \otimes m_j) = g \otimes gm_j$. ▫

Korollar. *Ist P ein projektiver RG-Modul, und ist M ein RG-Modul, welcher über R projektiv ist, so ist $P \otimes_R M$ projektiv über RG.*

Beweis. Nach Aufgabe 22.(1) dürfen wir wegen $- \otimes_R M$ additiv annehmen, daß $P = \coprod_I RG$ frei ist, wobei I eine Indexmenge bezeichne. Ferner dürfen wir wegen $P \otimes_R -$ additiv annehmen, daß M frei über R ist (ergänze um einen R-linearen Summanden, der mit überall identischer G-Operation ausgestattet werde). Wie in der Lösung zu Aufgabe 24 sehen wir, daß $(\coprod_I RG) \otimes_R M \simeq \coprod_I (RG \otimes_R M) \simeq RG \otimes_R (\coprod_I M)$, und gemäß unseres Lemmas ist dieser Modul frei, und somit auch projektiv über RG. ▫

Korollar. *Sei $k \geqslant 0$. Es ist $RG^{\otimes (k+1)}$ ein freier RG-Modul mit der RG-linearen Basis*

$$\big(1 \otimes g_1 \otimes g_1 g_2 \otimes g_1 g_2 g_3 \otimes \cdots \otimes (g_1 g_2 \cdots g_k) \; : \; g_i \in G \text{ für } i \in [1,k]\big) \, .$$

Beweis. Dies folgt mit Induktion aus dem vorstehenden Lemma, angewandt auf $RG \otimes_R RG^{\otimes k}$. ▫

Wir kürzen noch ab und schreiben

$$[g_1, g_2, \ldots, g_k] \; := \; 1 \otimes g_1 \otimes g_1 g_2 \otimes g_1 g_2 g_3 \otimes \cdots \otimes (g_1 g_2 \cdots g_k) \; \in \; RG^{\otimes (k+1)}$$

für ein solches in dieser Basis auftretendes Element.

2.2.2 Ext und Tor via (Co)homologie

Sei R ein kommutativer Ring. Sei G eine Gruppe. Seien L, M und N drei RG-Linksmoduln.

Der RG-Linksmodul M werde zu einem RG-Rechtsmodul vermöge $mg := g^{-1}m$ für $m \in M$ und $g \in G$. Der triviale Linksmodul wird hierbei zum trivialen Rechtsmodul. Projektive Linksmoduln entsprechen genau den projektiven Rechtsmoduln. Es wird

$$\begin{array}{ccccccc} M & \otimes_{RG} & N & \xrightarrow{\sim} & N & \otimes_{RG} & M \\ m & \otimes & n & \longmapsto & n & \otimes & m \end{array}$$

als R-Moduln.

Bemerkung. *Ist $k \geqslant 0$, so ist als R-Moduln*

$$\mathrm{Tor}_k^{RG}(M,N) \;\simeq\; \mathrm{Tor}_k^{RG}(N,M)\;.$$

Beweis. Mit einer projektiven Auflösung P von M in RG-Mod erhalten wir als R-Moduln

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Tor}_k^{RG}(M,N) & \simeq & \mathrm{H}_k(P \otimes_{RG} N) \\ & \simeq & \mathrm{H}_k(N \otimes_{RG} P) \\ & \simeq & \mathrm{Tor}_k^{RG}(N,M)\;. \end{array}$$

□

Bemerkung. *Der Adjunktionsisomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} {}_R(L \otimes M, N) & \longrightarrow & {}_R(L, {}_R(M,N)) \\ f & \longmapsto & (l \longmapsto (m \longrightarrow (l \otimes m)f)) \end{array}$$

ist RG-linear.

Beweis. Sei $g \in G$. Es wird gf abgebildet auf

$$l \;\longmapsto\; \big(m \;\longrightarrow\; (l \otimes m)(gf) \;=\; g((g^{-1}l \otimes g^{-1}m)f)\big)\;.$$

Auf der anderen Seite ergibt das Produkt von g mit dem Bild von f die Abbildung

$$l \;\longmapsto\; g\big(m \;\longrightarrow\; (g^{-1}l \otimes m)f\big) \;=\; \big(m \;\longrightarrow\; g(g^{-1}l \otimes g^{-1}m)f\big)\;.$$

□

Bemerkung. *Als R-Moduln ist*

$$\begin{array}{ccccccc} M & \otimes_{RG} & N & \xrightarrow{\sim} & (M & \otimes_R & N)_G \\ m & \otimes & n & \longmapsto & m & \otimes & n\;. \end{array}$$

Beweis. Die Wohldefiniertheit von $m \otimes n \longmapsto m \otimes n$ folgt aus

$$mg \otimes n - m \otimes gn \;=\; g^{-1}m \otimes n - m \otimes gn \;=\; (1-g)(g^{-1}m \otimes n)\;.$$

Die Wohldefiniertheit von $m \otimes n \longleftarrow\!\!\mid m \otimes n$ folgt aus derselben Gleichung, rückwärts gelesen. □

Lemma. *Sei M projektiv über R. Sei $k \geqslant 0$. Wir haben*

$$\begin{array}{rcccl} & & \mathrm{Ext}^k_{RG}(M,N) & \simeq & \mathrm{H}^k(G,\, {}_R(M,N); R) \\ \mathrm{Tor}^{RG}_k(M,N) & \simeq & \mathrm{Tor}^{RG}_k(N,M) & \simeq & \mathrm{H}_k(G, M \otimes_R N; R)\ . \end{array}$$

Beweis. Sei P eine projektive Auflösung von R in RG-Mod. Da M projektiv über R ist, sind $P \otimes_R M$ und $M \otimes_R P$ projektive Auflösungen von M in RG-Mod.

Im nächsten Abschnitt wird eine solche Auflösung P des trivialen Moduls R konstruiert werden. Um ihre Existenz wissen wir aber schon.

Es wird, unter Anwendung der zweiten Bemerkung oben,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^k(G,\, {}_R(M,N); R) & \simeq & \mathrm{H}^k\big(\, {}_{RG}(P,\, {}_R(M,N))\big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^k\big((\, {}_R(P,\, {}_R(M,N)))^G\big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^k\big((\, {}_R(M \otimes_R P, N))^G\big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^k\big(\, {}_{RG}(M \otimes_R P, N)\big) \\ & \simeq & \mathrm{Ext}^k_{RG}(M,N)\ . \end{array}$$

Es wird, unter zweimaliger Anwendung der dritten Bemerkung oben,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}_k(G, M \otimes_R N; R) & \simeq & \mathrm{H}_k(P \otimes_{RG} (M \otimes_R N)) \\ & \simeq & \mathrm{H}_k((P \otimes_R M \otimes_R N)_G) \\ & \simeq & \mathrm{H}_k((P \otimes_R M) \otimes_{RG} N) \\ & \simeq & \mathrm{Tor}^{RG}_k(M,N)\ . \end{array}$$

Nach der ersten Bemerkung oben dürfen wir M und N nun auch noch vertauschen. □

2.3 Standardauflösung

2.3.1 Konstruktion der Standardauflösung

Wir konstruieren eine projektive Auflösung des trivialen Moduls R über RG.

Sei R ein kommutativer Ring. Sei G eine Gruppe. Die mit g_j bezeichneten Elemente seien aus G, wobei $j \geqslant 0$.

Schreibe

$$(g_0 \otimes \cdots \otimes g_k) \wedge i \;:=\; g_0 \otimes \cdots \otimes g_{i-1} \otimes g_{i+1} \otimes \cdots \otimes g_k$$

für $k \geqslant 0$ und $i \in [0,k]$. So ist z.B. $(g_0 \otimes g_1 \otimes g_2) \wedge 1 = g_0 \otimes g_2$, oder auch $g_0 \wedge 0 = 1$.

Setze für $k \geqslant 0$

$$\begin{array}{rcl} RG^{\otimes(k+1)} & \xrightarrow{d} & RG^{\otimes k} \\ g_0 \otimes \cdots \otimes g_k & \longmapsto & \sum_{i \in [0,k]} (-1)^i (g_0 \otimes \cdots \otimes g_k) \wedge i\ . \end{array}$$

Das so als R-lineare Abbildung definierte d ist auch RG-linear.

Beispiel.

(1) Es schickt $RG^{\otimes 1} \xrightarrow{d} RG^{\otimes 0}$ das Element g_0 auf 1.

(2) Es schickt $RG^{\otimes 2} \xrightarrow{d} RG^{\otimes 1}$ das Element $g_0 \otimes g_1$ auf $g_1 - g_0$.

(3) Es schickt $RG^{\otimes 3} \xrightarrow{d} RG^{\otimes 2}$ das Element $g_0 \otimes g_1 \otimes g_2$ auf $g_1 \otimes g_2 - g_0 \otimes g_2 + g_0 \otimes g_1$.

Satz. *Es ist*

$$\mathrm{Bar}_{G;R} := \Big(\cdots \xrightarrow{d} RG^{\otimes(3+1)} \xrightarrow{d} RG^{\otimes(2+1)} \xrightarrow{d} RG^{\otimes(1+1)} \xrightarrow{d} RG^{\otimes(0+1)}\Big)$$

eine projektive Auflösung des trivialen Moduls R; auch Barauflösung *genannt (was von den senkrechten Strichen in der ursprünglichen Schreibweise herrührt).*

Beweis. Es ist $RG^{\otimes(k+1)}$ projektiv über RG für $k \geqslant 0$ vermöge des ersten oder zweiten Korollars aus §2.2.1. Es bleibt uns wegen $RG^{\otimes 0} \simeq R$, dem trivialen Modul, zu zeigen, daß

$$\widetilde{\mathrm{Bar}}_{G;R} := (\cdots \xrightarrow{d} RG^{\otimes(3+1)} \xrightarrow{d} RG^{\otimes(2+1)} \xrightarrow{d} RG^{\otimes(1+1)} \xrightarrow{d} RG^{\otimes(0+1)} \xrightarrow{d} \underbrace{RG^{\otimes(-1+1)}}_{\text{Position } -1})$$

ein azyklischer Komplex ist.

Zeigen wir $dd = 0$. Es wird für $k \geqslant 1$

$$\begin{array}{rcl}
(g_0 \otimes \cdots \otimes g_k)dd & = & \Big(\sum_{i\in[0,k]}(-1)^i (g_0 \otimes \cdots \otimes g_k) \wedge i\Big)\, d \\[1ex]
& = & \sum_{i\in[0,k]} \sum_{j\in[0,k-1]} (-1)^{i+j} (g_0 \otimes \cdots \otimes g_k) \wedge i \wedge j \\[1ex]
& = & \sum_{i\in[0,k]} \sum_{j\in[0,i-1]} (-1)^{i+j} (g_0 \otimes \cdots \otimes g_k) \wedge i \wedge j \\
& + & \sum_{i\in[0,k]} \sum_{j\in[i,k-1]} (-1)^{i+j} (g_0 \otimes \cdots \otimes g_k) \wedge i \wedge j \\[1ex]
& = & \sum_{i\in[0,k]} \sum_{j\in[0,i-1]} (-1)^{i+j} (g_0 \otimes \cdots \otimes g_k) \wedge j \wedge (i-1) \\
& + & \sum_{i\in[0,k]} \sum_{j\in[i,k-1]} (-1)^{i+j} (g_0 \otimes \cdots \otimes g_k) \wedge i \wedge j \\[1ex]
& = & \sum_{j\in[0,k]} \sum_{i\in[j+1,k]} (-1)^{i+j} (g_0 \otimes \cdots \otimes g_k) \wedge j \wedge (i-1) \\
& + & \sum_{i\in[0,k]} \sum_{j\in[i,k-1]} (-1)^{i+j} (g_0 \otimes \cdots \otimes g_k) \wedge i \wedge j \\[1ex]
& = & \sum_{i\in[0,k]} \sum_{j\in[i+1,k]} (-1)^{j+i} (g_0 \otimes \cdots \otimes g_k) \wedge i \wedge (j-1) \\
& + & \sum_{i\in[0,k]} \sum_{j\in[i,k-1]} (-1)^{i+j} (g_0 \otimes \cdots \otimes g_k) \wedge i \wedge j \\[1ex]
& = & \sum_{i\in[0,k]} \sum_{j\in[i,k-1]} (-1)^{j+1+i} (g_0 \otimes \cdots \otimes g_k) \wedge i \wedge j \\
& + & \sum_{i\in[0,k]} \sum_{j\in[i,k-1]} (-1)^{i+j} (g_0 \otimes \cdots \otimes g_k) \wedge i \wedge j \\[1ex]
& = & 0\,.
\end{array}$$

Um die Azyklizität zu zeigen, machen wir von dem Umstand Gebrauch, daß es genügt, diese über R statt über RG nachzuweisen. Im folgenden betrachten wir $\widetilde{\mathrm{Bar}}_{G;R}$ also als Objekt in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$.

Wir wollen zeigen, daß die Identität auf $\widetilde{\mathrm{Bar}}_{G;R}$ nullhomotop ist. Denn dann ist $1_{\mathrm{H}_k\widetilde{\mathrm{Bar}}_{G;R}} = \mathrm{H}_k(1_{\widetilde{\mathrm{Bar}}_{G;R}}) = \mathrm{H}_k(0_{\widetilde{\mathrm{Bar}}_{G;R}}) = 0$ für alle $k \in \mathbf{Z}$, und folglich $\mathrm{H}_k\widetilde{\mathrm{Bar}}_{G;R} = 0$ für $k \in \mathbf{Z}$. Wie bereits erwähnt, suchen wir eine R-lineare Homotopie.

> Es gibt im allgemeinen auch keine RG-lineare Homotopie, denn das hieße, die Identität von $\widetilde{\mathrm{Bar}}_{G;R}$ faktorisierte über einen split Azyklischen mit RG-projektiven Einträgen. Nach Aufgabe 91.(2) hat dies zur Folge, daß $\widetilde{\mathrm{Bar}}_{G;R}$ split azyklisch wäre. Insbesondere wäre R ein Summand von RG. Dies ist aber im allgemeinen nicht der Fall.

Wir können also für $k \geqslant -1$

$$\begin{array}{rcl} RG^{\otimes(k+1)} & \xrightarrow{h_k} & RG^{\otimes(k+2)} \\ g_0 \otimes \cdots \otimes g_k & \longmapsto & 1 \otimes g_0 \otimes \cdots \otimes g_k \end{array}$$

setzen. Zunächst beobachten wir, daß $h_{-1}d = 1$. Sodann wird für $k \geqslant 0$

$$\begin{array}{rcl} (g_0 \otimes \cdots \otimes g_k)(h_k d + d h_{k-1}) & = & \Big(g_0 \otimes \cdots \otimes g_k + \sum_{i\in[1,k+1]}(-1)^i(1 \otimes g_0 \otimes \cdots \otimes g_k) \wedge i\Big) \\ & & \quad + \quad \Big(\sum_{i\in[0,k]}(-1)^i\, 1 \otimes ((g_0 \otimes \cdots \otimes g_k) \wedge i)\Big) \\ & = & \Big(g_0 \otimes \cdots \otimes g_k + \sum_{i\in[0,k]}(-1)^{i+1}(1 \otimes g_0 \otimes \cdots \otimes g_k) \wedge (i+1)\Big) \\ & & \quad + \quad \Big(\sum_{i\in[0,k]}(-1)^i(1 \otimes g_0 \otimes \cdots \otimes g_k) \wedge (i+1)\Big) \\ & = & g_0 \otimes \cdots \otimes g_k\ , \end{array}$$

i.e. $h_k d + d h_{k-1} = 1$. □

2.3.2 Standardinterpretation der Cohomologiegruppen

Sei M ein RG-Modul. Wir wollen nun den R-Modul $\mathrm{H}^k(G, M; R)$ mithilfe Linearer Algebra über R interpretieren. Dazu erinnern wir uns an

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^k(G, M; R) & = & \mathrm{Ext}^k_{RG}(R, M) \\ & \simeq & \mathrm{H}^k\big({}_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)\big) \\ & \simeq & \mathrm{Z}^k\big({}_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)\big)/\mathrm{B}^k\big({}_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)\big) \end{array}$$

für $k \geqslant 0$.

Ein Element von ${}_{RG}(RG^{\otimes(k+1)}, M)$ ist eine Funktion auf der RG-linearen Basis

$$([g_1, g_2, \ldots, g_k] \;=\; 1 \otimes g_1 \otimes g_1g_2 \otimes g_1g_2g_3 \otimes \cdots \otimes (g_1g_2\cdots g_k)\ :\ g_i \in G)$$

von $RG^{\otimes(k+1)}$ mit Werten in M, i.e. eine (völlig beliebige) Abbildung

$$\begin{array}{rcl} G^{\times k} := \underbrace{G \times \cdots \times G}_{k \text{ cartesische Faktoren}} & \xrightarrow{f} & M \\ [g_1, g_2, \ldots, g_k] & \longmapsto & [g_1, g_2, \ldots, g_k]f \end{array}$$

mit Werten in M. Eine solche Funktion liegt in $\mathrm{Z}^k\big({}_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)\big)$ genau dann, wenn die von ihr dargestellte RG-lineare Abbildung von $RG^{\otimes(k+1)}$ nach M komponiert von links mit $RG^{\otimes((k+1)+1)} \xrightarrow{d} RG^{\otimes(k+1)}$ Null ergibt. Dieses Verschwinden wiederum genügt es, auf der angegebenen Basis von $RG^{\otimes((k+1)+1)}$ zu kennen. Ein Element $[g_1, \ldots, g_{k+1}]$ kommt zunächst unter d auf

$$\begin{array}{cl} & [g_1, g_2, \ldots, g_{k+1}]d \\ = & \sum_{i\in[0,k+1]}(-1)^i(1 \otimes g_1 \otimes g_1g_2 \otimes g_1g_2g_3 \otimes \cdots \otimes (g_1g_2\cdots g_{k+1})) \wedge i \\ = & g_1[g_2, \ldots, g_{k+1}] + \Big(\sum_{i\in[1,k]}(-1)^i[g_1, \ldots, g_{i-1}, g_ig_{i+1}, g_{i+2}, \ldots, g_{k+1}]\Big) + (-1)^{k+1}[g_1, \ldots, g_k]\,. \end{array}$$

Es ist also für $k \geqslant 0$

$$\mathrm{Z}^k\big({}_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)\big) \;=\; \left\{ G^{\times k} \xrightarrow{f} M \;:\; \begin{array}{l} g_1[g_2, \ldots, g_{k+1}]f \\ +\sum_{i\in[1,k]}(-1)^i[g_1, \ldots, g_{i-1}, g_ig_{i+1}, g_{i+2}, \ldots, g_{k+1}]f \\ +(-1)^{k+1}[g_1, \ldots, g_k]f \;=\; 0 \text{ stets} \end{array} \right\}.$$

Umgekehrt erhalten wir für $k \geqslant 1$ eine Funktion in $\mathrm{B}^k\big({}_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)\big)$ durch Verkettung von d mit einer (völlig beliebigen) Funktion $G^{\times(k-1)} \xrightarrow{v} M$. In anderen Worten, es ist $\mathrm{B}^0(\mathrm{Bar}_{G;R}, M) = 0$, und für $k \geqslant 1$

$$\mathrm{B}^k\big({}_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)\big) \;=$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} G^{\times k} & \longrightarrow & M \\ [g_1, \ldots, g_k] & \longmapsto & g_1[g_2, \ldots, g_k]v \\ & & +\sum_{i\in[1,k-1]}(-1)^i[g_1, \ldots, g_{i-1}, g_ig_{i+1}, g_{i+2}, \ldots, g_k]v \\ & & +(-1)^k[g_1, \ldots, g_{k-1}]v \end{array} \;:\; G^{\times(k-1)} \xrightarrow{v} M \right\}.$$

Elemente im R-Modul $\mathrm{Z}^k\big({}_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)\big)$ heißen auch k-*Cozyklen*, Elemente im R-Modul $\mathrm{B}^k\big({}_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)\big)$ heißen auch k-*Coränder* von G mit Werten in M.

Beispiel.

(1) Zur Interpretation von $\mathrm{H}^0(G, M; R) \simeq \mathrm{Z}^0(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)/\mathrm{B}^0(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)$ identifizieren wir die Menge der Abbildungen von $G^{\times 0}$ nach M mit M selbst, und erhalten

$$\mathrm{Z}^0(\mathrm{Bar}_{G;R}, M) \;=\; \{m \in M \;:\; g_1m - m = 0 \text{ stets}\}$$

und $\mathrm{B}^0(\mathrm{Bar}_{G;R}, M) = 0$. Es ist also $\mathrm{H}^0(G, M; R) \simeq M^G$. Das folgte auch schon aus der alternativen Definition von $\mathrm{H}^k(G, -; R)$ als Rechtsabgeleiteten des linksexakten Funktors $(-)^G$.

(2) Als Interpretation von $\mathrm{H}^1(G, M; R) \simeq \mathrm{Z}^1(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)/\mathrm{B}^1(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)$ finden wir

$$\mathrm{Z}^1(\mathrm{Bar}_{G;R}, M) \;=\; \left\{ G \xrightarrow{f} M \;:\; g_1[g_2]f - [g_1g_2]f + [g_1]f = 0 \text{ stets} \right\} \;.$$

Ein 1-Cozykel $f \in \mathrm{Z}^1(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)$ heißt auch *Derivation.* Weiter ergibt sich, wieder nach Identifikation ${}_{RG}(RG^{\otimes(0+1)}, M)$ mit M, die Menge der 1-Coränder oder *innerer Derivationen* zu

$$\mathrm{B}^1(\mathrm{Bar}_{G;R}, M) \;=\; \{G \longrightarrow M,\; g_1 \longmapsto g_1 m - m \;:\; m \in M\} \;.$$

(3) Als Interpretation von $\mathrm{H}^2(G, M; R) \simeq \mathrm{Z}^2(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)/\mathrm{B}^2(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)$ ergibt sich die Menge der 2-Cozykeln zu

$$\mathrm{Z}^2(\mathrm{Bar}_{G;R}, M) \;=\; \left\{ G \times G \xrightarrow{f} M \;:\; g_1[g_2, g_3]f - [g_1g_2, g_3]f + [g_1, g_2g_3]f - [g_1, g_2]f = 0 \text{ stets} \right\} \;.$$

Ein 2-Cozykel $f \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)$ heißt auch *Faktorensystem.* Weiter ergibt sich die Menge der 2-Coränder zu

$$\mathrm{B}^2(\mathrm{Bar}_{G;R}, M) \;=\; \left\{ G \times G \xrightarrow{f} M,\; [g_1, g_2] \longmapsto g_1[g_2]v - [g_1g_2]v + [g_1]v \;:\; G \xrightarrow{v} M \right\} \;.$$

Ein 2-Corand ergibt sich also aus einer “mißglückten Derivation”. Allgemeiner ergibt sich ein k-Corand aus einem “mißglückten $(k-1)$-Cozykel”. Dies nur als Merkhilfe.

2.3.3 Standardinterpretation der Homologiegruppen

Weniger gebräuchlich als die Standardinterpretation der Cohomologiegruppen ist die der Homologiegruppen, aufgrund der dabei in den Zykelbedingungen auftretenden Summen über G. Wir wollen sie dennoch einmal angeben.

Wir erinnern daran, daß ein RG-Linksmodul M zu einem RG-Rechtsmodul wird vermöge $mg := g^{-1}m$ für $m \in M$ und $g \in G$, und daß hierbei projektive RG-Linksmoduln projektiven RG-Rechtsmoduln entsprechen.

Sei M ein RG-Modul. Wir wollen nun den R-Modul $\mathrm{H}_k(G, M; R)$ mithilfe Linearer Algebra über R interpretieren. Dazu verwenden wir

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}_k(G, M; R) & = & \mathrm{Tor}_k^{RG}(R, M) \\ & \simeq & \mathrm{H}_k\big(\mathrm{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} M\big) \\ & \simeq & \mathrm{Z}_k\big(\mathrm{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} M\big)/\mathrm{B}_k\big(\mathrm{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} M\big) \end{array}$$

für $k \geqslant 0$.

Ein Element von $RG^{\otimes(k+1)} \otimes_{RG} M$ ist eine Koeffizientenfunktion f auf der Basis $([g_1, \ldots, g_k] \; : \; g_i \in G)$ mit Werten in M, welche für alle bis auf endlich viele Basiselemente den Wert 0 annimmt, ansonsten aber beliebig ist, und welche so das Element

$$\sum_{[g_1,..,g_k]\in G^{\times k}} [g_1, g_2, .., g_k]\otimes[g_1, g_2, .., g_k]f \;\in\; RG^{\otimes(k+1)}\otimes_{RG}M \;=\; \bigoplus_{[g_1,..,g_k]\in G^{\times k}} [g_1, .., g_k]\otimes_{RG}M$$

darstellt.

In anderen Worten, ein Element von $RG^{\otimes(k+1)} \otimes_{RG} M$ ist eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} G^{\times k} & \xrightarrow{f} & M \\ [g_1, g_2, \ldots, g_k] & \longmapsto & [g_1, g_2, \ldots, g_k]f \end{array}$$

mit endlichem *Träger* $\{[g_1, \ldots, g_k] \in G^{\times k} \; : \; [g_1, \ldots, g_k]f \neq 0\}$. Ist G endlich, so ist diese Endlichkeitsbedingung für jede Abbildung von $G^{\times k}$ nach M erfüllt.

Eine solche Funktion f ist in $\mathrm{Z}_k\big(\mathrm{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} M\big)$ genau dann, wenn $k = 0$, oder wenn $k \geqslant 1$ und

$$\begin{array}{rl} & 0 \\ = & \sum_{[g_1,..,g_k]\in G^{\times k}} [g_1, g_2, .., g_k]d \otimes [g_1, .., g_k]f \\ = & \displaystyle\sum_{[g_1,..,g_k]\in G^{\times k}} \left(\begin{array}{l} g_1[g_2, .., g_k] \\ +\sum_{i\in[1,k-1]}(-1)^i[g_1, .., g_i g_{i+1}, .., g_k] \\ +(-1)^k[g_1, .., g_{k-1}] \end{array}\right) \otimes [g_1, .., g_k]f \\ = & \sum_{[g_1,..,g_k]\in G^{\times k}} [g_2, .., g_k] \otimes g_1^{-1}[g_1, .., g_k]f \\ + & \sum_{i\in[1,k-1]}(-1)^i \sum_{[g_1,..,g_k]\in G^{\times k}} [g_1, .., g_i g_{i+1}, .., g_k] \otimes [g_1, .., g_k]f \\ + & (-1)^k \sum_{[g_1,..,g_k]\in G^{\times k}} [g_1, .., g_{k-1}] \otimes [g_1, .., g_k]f \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} = & \sum_{[h_1,..,h_{k-1}]\in G^{\times(k-1)}} [h_1, .., h_{k-1}] \otimes \Big(\sum_{g\in G} g[g^{-1}, h_1, .., h_{k-1}]f\Big) \\ + & \sum_{i\in[1,k-1]}(-1)^i \sum_{[h_1,..,h_{k-1}]\in G^{\times(k-1)}} [h_1, .., h_{k-1}] \otimes \Big(\sum_{g\in G}[h_1, .., h_{i-1}, g, g^{-1}h_i, h_{i+1}, .., h_{k-1}]f\Big) \\ + & (-1)^k \sum_{[h_1,..,h_{k-1}]\in G^{\times(k-1)}} [h_1, .., h_{k-1}] \otimes \Big(\sum_{g\in G}[h_1, .., h_{k-1}, g]f\Big) \\ = & \displaystyle\sum_{[h_1,..,h_{k-1}]\in G^{\times(k-1)}} [h_1, .., h_{k-1}] \;\otimes\; \sum_{g\in G} \left(\begin{array}{l} g[g^{-1}, h_1, .., h_{k-1}]f \\ +\sum_{i\in[1,k-1]}(-1)^i[h_1, .., h_{i-1}, g, g^{-1}h_i, h_{i+1}, .., h_{k-1}]f \\ +(-1)^k g[h_1, .., h_{k-1}, g]f \end{array}\right), \end{array}$$

i.e.

$$\sum_{g\in G} \left(\begin{array}{l} g[g^{-1}, h_1, .., h_{k-1}]f \\ +\sum_{i\in[1,k-1]}(-1)^i[h_1, .., h_{i-1}, g, g^{-1}h_i, h_{i+1}, .., h_{k-1}]f \\ +(-1)^k[h_1, .., h_{k-1}, g]f \end{array}\right) \;=\; 0$$

für alle $h_i \in G$, wobei $i \in [1, k-1]$.

Umgekehrt ist für $k \geqslant 0$ eine Funktion f_v in $\mathrm{B}_k\big(\,\mathrm{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} M\big)$ ausgehend von einer beliebigen Funktion $G^{\times(k+1)} \xrightarrow{v} M$ gegeben durch

$$[h_1, .., h_k]f_v \ :=$$

$$\sum_{g\in G} \Big(g[g^{-1}, h_1, .., h_k]v + \Big(\textstyle\sum_{i\in[1,k]} (-1)^i [h_1, .., h_{i-1}, g, g^{-1}h_i, h_{i+1}, .., h_k]v\Big) + (-1)^{k+1}[h_1, .., h_k, g]v\Big)$$

für $h_i \in G$, wobei $i \in [1, k]$.

Elemente im R-Modul $\mathrm{Z}_k\big(\,{}_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)\big)$ heißen auch *k-Zyklen*, Elemente im R-Modul $\mathrm{B}_k\big(\,{}_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)\big)$ heißen auch *k-Ränder* von G mit Werten in M.

Beispiel.

(1) Ist $k = 0$, so ist $\mathrm{Z}_0\big(\,\mathrm{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} M\big) = M$ und

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{B}_0\big(\,\mathrm{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} M\big) & = & \Big\{\sum_{g\in G} g[g^{-1}]v - [g]v \ : \ G \xrightarrow{v} M \text{ mit endlichem Träger}\Big\} \\ & = & \Big\{\sum_{g\in G} (g-1)[g^{-1}]v \ : \ G \xrightarrow{v} M \text{ mit endlichem Träger}\Big\} \\ & = & R\langle gm - m \ : \ m \in M,\ g \in G\rangle\ , \end{array}$$

wie bereits bei der Einführung von $\mathrm{H}_0(G, M; R) \simeq M_G$ in §2.1.2 gesehen.

(2) Ist $k = 1$, so sind

$$\mathrm{Z}_1\big(\,\mathrm{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} M\big) \ = \ \left\{ G \xrightarrow{f} M \ : \ f \text{ hat endlichen Träger, } \sum_{g\in G} (g-1)[g^{-1}]f = 0 \right\}$$

und darin

$$\mathrm{B}_1\big(\,\mathrm{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} M\big) \ =$$

$$\Big\{ [h] \longmapsto \textstyle\sum_{g\in G} \left(g^{-1}[g,h]v - [g, g^{-1}h]v + [h,g]v\right) \ : \ G \times G \xrightarrow{v} M \text{ mit endlichem Träger}\Big\}\ .$$

Sei G eine endliche Gruppe. Sei R ein kommutativer Ring, für den Teilmoduln endlich erzeugter freier R-Moduln wieder endlich erzeugt frei sind, und für den man Kerne und Cokerne von Matrizen mit Einträgen in R algorithmisch bestimmen kann.

Seien B und Z Matrizen mit Einträgen in R, für die $x \longmapsto xB$ und $x \longmapsto xZ$ injektiv sind, und für die es eine Matrix H mit $BH = Z$ gibt. Falls man für R zudem über einen Algorithmus verfügt, dieses H zu bestimmen, so kann man mit der eingeführten Standardbeschreibung der (Co)homologie auch $\mathrm{H}^k(G; R)$ und $\mathrm{H}_k(G; R)$ für $k \geqslant 0$ berechnen.

Ist M ein RG-Modul, welcher über R frei ist, und kennt man die Operation aller Elemente von G auf M in Matrixform, so sind unter diesen Voraussetzungen auch $\mathrm{H}^k(G, M; R)$ und $\mathrm{H}_k(G, M; R)$ algorithmisch bestimmbar.

Ist z.B. $R = \mathbf{F}_p$ für ein p prim, oder ist $R = \mathbf{Z}$, so kann man für gegebenes k die (Co)homologiegruppe rechnerisch bestimmen; für $R = \mathbf{Z}$ geschieht dies unter Verwendung des Elementarteilersatzes.

Die Größe der Objekteinträge der Standardauflösung wächst allerdings exponentiell mit k. Vgl. auch Aufgaben 38 und 40.

2.3.4 Standardinterpretation der lang exakten (Co)homologiesequenz

2.3.4.1 Ein Nachtrag zur Homologischen Algebra

Ein kleiner Nachtrag zur Homologischen Algebra, der zu seiner Anwendung gestellt wurde.

Seien R, R' und S Ringe. Sei $F : R\text{-Mod} \times R'\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-Mod}$ ein biadditiver Funktor. Sei noch vorausgesetzt, daß $F(X, =)$ exakt ist, falls X ein injektiver R-Modul ist, und daß $F(-, X')$ exakt ist, falls X' ein injektiver R'-Modul ist.

Sei X ein beliebiger R-Modul. Sei $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ eine kurz exakte Sequenz von R'-Moduln. Wir erhalten eine lang exakte Sequenz

$$(*)\qquad \begin{array}{l} 0 \longrightarrow \mathrm{R}^0F(X, M') \xrightarrow{\mathrm{R}^0Fi} \mathrm{R}^0F(X, M) \xrightarrow{\mathrm{R}^0Fp} \mathrm{R}^0F(X, M'') \\ \xrightarrow{\partial^0} \mathrm{R}^1F(X, M') \xrightarrow{\mathrm{R}^1Fi} \mathrm{R}^1F(X, M) \xrightarrow{\mathrm{R}^1Fp} \mathrm{R}^1F(X, M'') \\ \xrightarrow{\partial^1} \cdots \end{array}$$

aus folgender kurz exakter Sequenz von Komplexen in S-Mod. Sei I' resp. I resp. I'' eine injektive Auflösung von M' resp. M resp. M'' derart, daß sich eine punktweise split kurz exakte Sequenz

$$I' \longrightarrow I \longrightarrow I''$$

ergibt, deren H^0 die Sequenz $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ zurückgibt. Dies ist nach dem Hufeisenlemma möglich. Die lang exakte Sequenz $(*)$ ist die lang exakte Homologiesequenz auf der kurz exakten Sequenz von Komplexen

$$(*')\qquad F(X, I') \longrightarrow F(X, I) \longrightarrow F(X, I'')\ .$$

Für abgeleitete Funktoren von Funktoren in einer Variablen hat man keine andere Möglichkeit als diese lang exakte Sequenz mittels Hufeisenlemma zu konstruieren. Für einen biadditiven Funktor in zwei Variablen unter obigen Exaktheitsvoraussetzungen gibt es nun noch eine zweite Variante.

Sei J eine injektive Auflösung von X über R. Nach Voraussetzung ist

$$(**')\qquad F(J, M') \longrightarrow F(J, M) \longrightarrow F(J, M'')$$

eine kurz exakte Sequenz von Komplexen mit Einträgen in S-Mod. Bezeichnen wir mit $(**)$ ihre lang exakte Homologiesequenz.

Lemma. *Die lang exakten Sequenzen $(*)$ und $(**)$ sind isomorph.*

Beweis. Wir haben zwei Morphismen von kurz exakten Sequenzen von Komplexen.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(\mathrm{Konz}\,X, I') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(\mathrm{Konz}\,X, I) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(\mathrm{Konz}\,X, I'') \arrow[d] \\
\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(J, I') \arrow[r] & \mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(J, I) \arrow[r] & \mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(J, I'') \\
\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(J, \mathrm{Konz}\,M') \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(J, \mathrm{Konz}\,M) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(J, \mathrm{Konz}\,M'') \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Alle 6 vertikalen Morphismen, induziert von den Quasiisomorphismen $\mathrm{Konz}\,X \longrightarrow J$, $\mathrm{Konz}\,M' \longrightarrow I'$, $\mathrm{Konz}\,M \longrightarrow I$ und $\mathrm{Konz}\,M'' \longrightarrow I''$ sind Quasiisomorphismen, wie man wie im Beweis des Satzes in §1.6.2.4 erkennt. Hier benötigt man die beiden eingangs verlangten Exaktheitseigenschaften von F.

Allgemein induziert ein Morphismus von kurz exakten Sequenzen von Komplexen einen Morphismus von lang exakten Homologiesequenzen. Nachzurechnen ist hierfür nur die Kommutativität der Vierecke, die zwei Verbindungsmorphismen involvieren.

Ein aus drei Quasiisomorphismen bestehender solcher Morphismus induziert mithin einen Isomorphismus von lang exakten Homologiesequenzen.

In der oberen Zeile unseres Diagramms steht bis auf Isomorphie gerade die kurz exakte Sequenz $(*')$, in der unteren Zeile die kurz exakte Sequenz $(**')$. Deren lang exakte Homologiesequenzen $(*)$ und $(**)$ sind mithin isomorph. ▫

2.3.4.2 Verbindungsmorphismen und (Co)zykeln

Sei R ein kommutativer Ring. Sei G eine Gruppe. Sei $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ eine kurz exakte Sequenz von RG-Moduln.

2.3.4.2.1 Die Cohomologiesequenz

Wir können mit dem vorangegangenen Lemma nun die schon erwähnte lang exakte Cohomologiesequenz

$$\begin{array}{lllllll}
0 \longrightarrow & \mathrm{H}^0(G, M'; R) & \xrightarrow{\mathrm{H}^0(G,i;R)} & \mathrm{H}^0(G, M; R) & \xrightarrow{\mathrm{H}^0(G,p;R)} & \mathrm{H}^0(G, M''; R) \\
\xrightarrow{\partial^0} & \mathrm{H}^1(G, M'; R) & \xrightarrow{\mathrm{H}^1(G,i;R)} & \mathrm{H}^1(G, M; R) & \xrightarrow{\mathrm{H}^1(G,p;R)} & \mathrm{H}^1(G, M''; R) \\
\xrightarrow{\partial^1} & \mathrm{H}^2(G, M'; R) & \xrightarrow{\mathrm{H}^2(G,i;R)} & \cdots & &
\end{array}$$

als zur kurz exakten Sequenz von Komplexen

$$_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R}, M') \xrightarrow{(-)i} {}_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R}, M) \xrightarrow{(-)p} {}_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R}, M'')$$

gehörig berechnen, ohne das Hufeisenlemma verwenden zu müssen; vgl. §1.5.6.

Für alle in dieser lang exakten Sequenz auftretenden Morphismen, die keine Verbindungsmorphismen sind, bildet man wie folgt ab. Ist $U \xrightarrow{w} V$ ein Morphismus von RG-Moduln, und ist, für $k \geqslant 0$, f ein k-Cozykel mit Werten in U, so bildet $\mathrm{H}^k(G, w; R)$ repräsentantenweise die Abbildung $G^{\times k} \xrightarrow{f} U$ auf die Abbildung $G^{\times k} \xrightarrow{fw} V$ ab, welche wiederum ein k-Cozykel ist.

Wir wollen für $k \geqslant 0$ den Verbindungsmorphismus $\mathrm{H}^k(G, M''; R) \xrightarrow{\partial^k} \mathrm{H}^{k+1}(G, M'; R)$ berechnen. Sei $G^{\times k} \xrightarrow{f''} M''$ ein k-Cozykel. Nach Aufgabe 20.(1) wählen wir zunächst $G^{\times k} \xrightarrow{f} M$ mit $fp = f''$ durch elementweise Wahl eines Urbildes. Dann wissen wir, daß

$$\begin{array}{ccl} G^{\times(k+1)} & \xrightarrow{df} & M \\ [g_1, \ldots, g_{k+1}] & \longmapsto & g_1[g_2, \ldots, g_k]f + \left(\sum_{i \in [1,k]} (-1)^i [g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{k+1}]f\right) + (-1)^{k+1}[g_1, \ldots, g_k]f \end{array}$$

Werte in $M'i$ annimmt. Dies folgt auch direkt aus $dfp = df'' = 0$, da f'' ein Cozykel ist. Wir finden also ein $G^{\times(k+1)} \xrightarrow{f'} M'$ mit $f'i = df$. Dieses f' repräsentiert nun das Bild der Klasse von f'' unter ∂^k.

Beispiel. Betrachten wir den Fall $k = 0$. Sei $m'' \in M''^G = \mathrm{H}^0(G, M''; R)$. Wählen wir ein $m \in M$ mit $mp = m''$. Beachte, daß m nun nicht mehr notwendig fix unter G ist. Immerhin gilt stets noch $(gm - m)p = 0$, i.e. $gm - m \in M'i$. Dies definiert eine Funktion $G \longrightarrow M'$, und das ist unser gesuchter Repräsentant des Bildelementes der von m'' in $\mathrm{H}^1(G, M'; R)$.

2.3.4.2.2 Die Homologiesequenz

Wir können mit der dualen Aussage des vorangegangenen Lemmas nun die schon erwähnte lang exakte Homologiesequenz

$$\begin{array}{ccccccc} & & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{H}_2(G,p;R)} & \mathrm{H}_2(G, M''; R) & \xrightarrow{\partial_2} & \\ \mathrm{H}_1(G, M'; R) & \xrightarrow{\mathrm{H}_1(G,i;R)} & \mathrm{H}_1(G, M; R) & \xrightarrow{\mathrm{H}_1(G,p;R)} & \mathrm{H}_1(G, M''; R) & \xrightarrow{\partial_1} & \\ \mathrm{H}_0(G, M'; R) & \xrightarrow{\mathrm{H}_0(G,i;R)} & \mathrm{H}_0(G, M; R) & \xrightarrow{\mathrm{H}_0(G,p;R)} & \mathrm{H}_0(G, M''; R) & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

als zur kurz exakten Sequenz von Komplexen

$$\mathrm{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} M' \xrightarrow{1 \otimes i} \mathrm{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} M \xrightarrow{1 \otimes p} \mathrm{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} M''$$

gehörig berechnen (vgl. Aufgabe 24).

Für alle in dieser lang exakten Sequenz auftretenden Morphismen, die keine Verbindungsmorphismen sind, bildet man wie folgt ab. Ist $U \xrightarrow{w} V$ ein Morphismus von RG-Moduln, und ist, für $k \geqslant 0$, f ein k-Zykel mit Werten in U, so bildet $\mathrm{H}_k(G, w; R)$ repräsentantenweise die Abbildung $G^{\times k} \xrightarrow{f} U$ auf die Abbildung $G^{\times k} \xrightarrow{fw} V$ ab, welche wiederum ein k-Zykel ist.

Wir wollen für $k \geqslant 1$ den Verbindungsmorphismus $\mathrm{H}_k(G, M''; R) \xrightarrow{\partial_k} \mathrm{H}_{k-1}(G, M'; R)$ berechnen. Sei $G^{\times k} \xrightarrow{f''} M''$ ein k-Zykel. Nach Aufgabe 20.(1) wählen wir zunächst $G^{\times k} \xrightarrow{f} M$ mit $fp = f''$ durch elementweise Wahl eines Urbildes. Dann wissen wir, daß

$$\begin{array}{rcl} G^{\times(k-1)} & \xrightarrow{f(d\otimes 1)} & M \\ [h_1, \ldots, h_{k-1}] & \longmapsto & \sum\limits_{g \in G} \left(\begin{array}{cl} & g[g^{-1}, h_1, .., h_{k-1}]f \\ + & \left(\sum_{i\in[1,k-1]} (-1)^i [h_1, .., h_{i-1}, g, g^{-1}h_i, h_{i+1}, .., h_{k-1}]f\right) \\ + & (-1)^k [h_1, .., h_{k-1}, g]f \end{array} \right) \end{array}$$

Werte in $M'i$ annimmt. Wir finden also ein $G^{\times(k-1)} \xrightarrow{f'} M'$ mit $f'i = f(d \otimes 1)$. Dieses f' repräsentiert nun das Bild der Klasse von f'' unter ∂_k.

2.4 Cupprodukt

Wir wollen auf $\mathrm{H}^*(G; R) := \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathrm{H}^k(G; R)$ eine R-Algebrenstruktur ausmachen, welche graduiert kommutativ ist, i.e. in welcher für Elemente aus den Summanden das Kommutativgesetz bis auf ein gewisses Vorzeichen gilt.

Sei R ein kommutativer Ring. Sei G eine Gruppe. Bezeichnen g_j und h_j Elemente aus G für $j \geqslant 0$. Schreibe $g_{[a,b]} := g_a \otimes g_{a+1} \otimes \cdots \otimes g_b$ für $a \leqslant b$ etc.

Seien $k, l, m \geqslant 0$. Seien $RG^{\otimes(k+1)} \xrightarrow{u} R$, $RG^{\otimes(l+1)} \xrightarrow{v} R$ und $RG^{\otimes(m+1)} \xrightarrow{w} R$ drei RG-lineare Abbildungen. Wir setzen

$$\begin{array}{rcl} RG^{\otimes((k+l)+1)} & \xrightarrow{u\cup v} & R \\ g_{[0,k+l]} & \longmapsto & (g_{[0,k+l]})(u \cup v) \;:=\; g_{[0,k]}u \cdot g_{[k,k+l]}v \;. \end{array}$$

Vorsicht. Das Element g_k wird sowohl von u als auch von v angesprochen.

Es ist $(u \cup v) \cup w = u \cup (v \cup w)$. Es sind $u \cup -$ und $- \cup v$ R-lineare Abbildungen.

In der Interpretation $G^{\times k} \xrightarrow{u} R$ und $G^{\times l} \xrightarrow{v} R$ läuft das hinaus auf

$$\begin{array}{rcl} [g_1, \ldots, g_{k+l}](u \cup v) & = & (1 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes (g_1 \cdots g_k))u \cdot ((g_1 \cdots g_k) \otimes \cdots \otimes (g_1 \cdots g_{k+l}))v \\ & = & [g_1, \ldots, g_k]u \cdot (g_1 \cdots g_k)[g_{k+1}, \ldots, g_{k+l}]v \\ & = & [g_1, \ldots, g_k]u \cdot [g_{k+1}, \ldots, g_{k+l}]v \;, \end{array}$$

letzteres, da R der triviale RG-Modul ist.

Lemma (Leibnizregel). *Seien $RG^{\otimes(k+1)} \xrightarrow{u} R$ und $RG^{\otimes(l+1)} \xrightarrow{v} R$ RG-lineare Abbildungen. Es ist*

$$d(u \cup v) \;=\; du \cup v + (-1)^k u \cup dv \;.$$

Beweis. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
g_{[0,k+l+1]}d(u\cup v) &= \textstyle\sum_{i\in[0,k+l+1]}(-1)^i(g_{[0,k+l+1]}\wedge i)(u\cup v)\\
&= \textstyle\sum_{i\in[0,k]}(-1)^i(g_{[0,k+l+1]}\wedge i)(u\cup v)\\
&+ \textstyle\sum_{i\in[1,l+1]}(-1)^{i-k}(g_{[0,k+l+1]}\wedge (i+k))(u\cup v)\\
&= \left(\textstyle\sum_{i\in[0,k]}(-1)^i(g_{[0,k+1]}\wedge i)u\right)\cdot g_{[k+1,l+1]}v\\
&+ g_{[0,k]}u\cdot\left(\textstyle\sum_{i\in[1,l+1]}(-1)^{i+k}(g_{[k,k+l+1]}\wedge i)v\right)\\
&= \left(\textstyle\sum_{i\in[0,k+1]}(-1)^i(g_{[0,k+1]}\wedge i)u\right)\cdot g_{[k+1,l+1]}v\\
&+ g_{[0,k]}u\cdot\left(\textstyle\sum_{i\in[0,l+1]}(-1)^{i+k}(g_{[k,k+l+1]}\wedge i)v\right)\\
&= g_{[0,k+1]}du\cdot g_{[k+1,l+1]}v+(-1)^k g_{[0,k]}u\cdot g_{[k,k+l+1]}dv\\
&= g_{[0,k+l+1]}(du\cup v+(-1)^k u\cup dv)\ .
\end{aligned}$$

□

Eine *graduierte R-Algebra* ist eine R-Algebra A zusammen mit einer direkten Summenzerlegung $A=\bigoplus_{k\geqslant 0}A_k$ in R-Teilmoduln A_k derart, daß der algebrendefinierende Ringmorphismus $R\longrightarrow A$ nach A_0 abbildet, und derart, daß für $a\in A_i$ und $b\in A_j$ gilt, daß $ab\in A_{i+j}$ für $i,\ j\geqslant 0$. Elemente in einem solchen Summanden A_i heißen auch *homogene* Elemente von A.

Korollar. *Die repräsentantenweise definierte Abbildung*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}^k(G;R) & \times & \mathrm{H}^l(G;R) & \longrightarrow & \mathrm{H}^{k+l}(G;R)\\
(u & , & v) & \longmapsto & u\cup v
\end{array}$$

ist wohldefiniert. Mit der distributiven Fortsetzung dieser Operation wird

$$\left(\mathrm{H}^*(G;R):=\bigoplus_{k\geqslant 0}\mathrm{H}^k(G;R),\ \ +\ ,\ \ \cup\right)$$

mit ebendieser direkten Summenzerlegung zu einer graduierten R-Algebra. Die Multiplikation $\cup$ heißt auch Cupprodukt.

> Die Bezeichnung *Cupprodukt* rührt von der Form des Symbols $\cup$. Ursprünglich hatte man auf der Homologie eines topologischen Raumes ein Schnittprodukt $\cap$ definiert, welches sich in der Tat von einer Schnittmengenbildung ableitete. Die dazu duale Operation auf der Cohomologie bekam das Symbol $\cup$, ohne daß diese zu einer wie auch immer gearteten Vereinigungsmengenbildung in Beziehung stand.

Beweis. Für die Wohldefiniertheit von $u\cup v$ auf den Cozykeln müssen wir zeigen, daß aus $u\in\mathrm{Z}^k(G;R)$ und $v\in\mathrm{Z}^l(G;R)$ folgt, daß $u\cup v\in\mathrm{Z}^{k+l}(G;R)$. Und in der Tat ist dann $d(u\cup v)=du\cup v+(-1)^k u\cup dv=0\cup v+(-1)^k u\cup 0=0$.

Für die Wohldefiniertheit von $u \cup v$ auf den Cohomologiegruppen müssen wir nun noch zeigen, daß für zwei Cozykel u und v wie eben aus $u \in \mathrm{B}^k(G;R)$ folgt, daß $u \cup v \in \mathrm{B}^{k+l}(G;R)$, und, bis auf Vorzeichen symmetrisch hierzu, daß aus $v \in \mathrm{B}^l(G;R)$ folgt, daß $u \cup v \in \mathrm{B}^{k+l}(G;R)$. In der Tat, ist $u \in \mathrm{B}^k(G;R)$, so ist $u = du'$ für ein $RG^{\otimes(k+2)} \xrightarrow{u'} R$, und folglich $u \cup v = du' \cup v = d(u' \cup v) - (-1)^{k+1} u' \cup dv = d(u' \cup v)$.

Die distributiv auf ganz $\mathrm{H}^*(G;R)$ fortgesetzte Multiplikation ist ferner assoziativ und distributiv. Somit ist $\mathrm{H}^*(G;R)$ ein Ring.

Es ist $R \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(G;R)$ auch als Ringe. Ferner ist $\mathrm{H}^0(G;R)$ im Zentrum von $\mathrm{H}^*(G;R)$ enthalten. Somit ist $\mathrm{H}^*(G;R)$, zusammen mit diesem Isomorphismus, eine R-Algebra. ▫

Eine graduierte R-Algebra $A = \bigoplus_{k \geqslant 0} A_k$ heißt *graduiert kommutativ*, falls für $k,\, l \geqslant 0$ und $a \in A_k$ und $b \in A_l$ stets

$$ab \;=\; (-1)^{kl} ba$$

gilt. Entgegen dem, was der Begriff der graduierten Kommutativität suggerieren könnte, ist eine graduiert kommutative Algebra im allgemeinen nicht kommutativ.

Satz. *Es ist* $\mathrm{H}^*(G;R)$ *eine graduiert kommutative R-Algebra.*

Beweis. Seien $k,\, l \geqslant 1$. Seien $u \in \mathrm{Z}^k(G;R)$ und $v \in \mathrm{Z}^l(G;R)$. In Abhängigkeit davon setzen wir

$$\begin{array}{rcl} RG^{\otimes((k+l-1)+1)} & \xrightarrow{c} & R \\ h_{[0,k+l-1]} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{m \in [0,l-1]} (-1)^{(m+1)(k+l-1)} (h_{[m,m+k]})u \cdot (h_{[m+k,k+l-1]} \otimes h_{[0,m]})v \;. \end{array}$$

Wir rechnen

$$\begin{array}{rl} & g_{[0,k+l]} dc \\ = & \sum_{i \in [0,k+l]} (-1)^i (g_{[0,k+l]} \wedge i) c \\ = & \displaystyle\sum_{m \in [0,l-1]} (-1)^{(m+1)(k+l-1)} \left(\begin{array}{rl} & \sum_{i \in [0,m]} (-1)^i (g_{[m+1,m+k+1]})u \cdot (g_{[m+k+1,k+l]} \otimes (g_{[0,m+1]} \wedge i))v \\ + & \sum_{i \in [m+1,m+k]} (-1)^i (g_{[m,m+k+1]} \wedge (i-m))u \cdot (g_{[m+k+1,k+l]} \otimes g_{[0,m]})v \\ + & \sum_{i \in [m+k+1,k+l]} (-1)^i (g_{[m,m+k]})u \cdot ((g_{[m+k,k+l]} \wedge (i-m-k)) \otimes g_{[0,m]})v \end{array} \right) \\ = & \displaystyle\sum_{m \in [0,l-1]} (-1)^{(m+1)(k+l-1)} \left(\begin{array}{rl} & \sum_{i \in [0,m]} (-1)^i (g_{[m+1,m+k+1]})u \cdot (g_{[m+k+1,k+l]} \otimes (g_{[0,m+1]} \wedge i))v \\ + & \sum_{i \in [1,k]} (-1)^{i+m} (g_{[m,m+k+1]} \wedge i)u \cdot (g_{[m+k+1,k+l]} \otimes g_{[0,m]})v \\ + & \sum_{i \in [1,l-m]} (-1)^{i+m+k} (g_{[m,m+k]})u \cdot ((g_{[m+k,k+l]} \wedge i) \otimes g_{[0,m]})v \end{array} \right) \\ = & \displaystyle\sum_{m \in [0,l-1]} (-1)^{(m+1)(k+l-1)} \left(\begin{array}{rl} & \sum_{i \in [0,m+1]} (-1)^i (g_{[m+1,m+k+1]})u \cdot (g_{[m+k+1,k+l]} \otimes (g_{[0,m+1]} \wedge i))v \\ + & \sum_{i \in [0,k+1]} (-1)^{i+m} (g_{[m,m+k+1]} \wedge i)u \cdot (g_{[m+k+1,k+l]} \otimes g_{[0,m]})v \\ + & \sum_{i \in [0,l-m]} (-1)^{i+m+k} (g_{[m,m+k]})u \cdot ((g_{[m+k,k+l]} \wedge i) \otimes g_{[0,m]})v \end{array} \right) \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{u\,\in\,\mathrm{Z}^k}{=} \sum_{m\in[0,l-1]} (-1)^{(m+1)(k+l-1)} \left(\begin{array}{ll} & \sum_{i\in[0,m+1]}(-1)^i (g_{[m+1,m+k+1]})u \cdot (g_{[m+k+1,k+l]} \otimes (g_{[0,m+1]} \wedge i))v \\ + & \sum_{i\in[0,l-m]}(-1)^{i+m+k} (g_{[m,m+k]})u \cdot ((g_{[m+k,k+l]} \wedge i) \otimes g_{[0,m]})v \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{ll} & \sum_{m\in[1,l]}(-1)^{m(k+l-1)} \sum_{i\in[0,m]}(-1)^i (g_{[m,m+k]})u \cdot (g_{[m+k,k+l]} \otimes (g_{[0,m]} \wedge i))v \\ + & \sum_{m\in[0,l-1]}(-1)^{(m+1)(k+l-1)} \sum_{i\in[0,l-m]}(-1)^{i+m+k} (g_{[m,m+k]})u \cdot ((g_{[m+k,k+l]} \wedge i) \otimes g_{[0,m]})v \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{ll} - & (g_{[0,k]})u \cdot (g_{[k,k+l]})v \\ + & \sum_{m\in[0,l]}(-1)^{m(k+l-1)} \sum_{i\in[0,m]}(-1)^i (g_{[m,m+k]})u \cdot (g_{[m+k,k+l]} \otimes (g_{[0,m]} \wedge i))v \\ + & \sum_{m\in[0,l]}(-1)^{(m+1)(k+l-1)} \sum_{i\in[0,l-m]}(-1)^{i+m+k} (g_{[m,m+k]})u \cdot ((g_{[m+k,k+l]} \wedge i) \otimes g_{[0,m]})v \\ - & (-1)^{(l+1)(k+l-1)}(-1)^{l+k}(g_{[l,l+k]})u \cdot (g_{[0,l]})v \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{ll} - & (g_{[0,k]})u \cdot (g_{[k,k+l]})v \\ + & \sum_{m\in[0,l]}(-1)^{m(k+l-1)} \sum_{i\in[l-m+1,l+1]}(-1)^{i-l+m-1} (g_{[m,m+k]})u \cdot ((g_{[m+k,k+l]} \otimes g_{[0,m]}) \wedge i)v \\ + & \sum_{m\in[0,l]}(-1)^{(m+1)(k+l-1)} \sum_{i\in[0,l-m]}(-1)^{i+m+k} (g_{[m,m+k]})u \cdot ((g_{[m+k,k+l]} \otimes g_{[0,m]}) \wedge i)v \\ + & (-1)^{lk}(g_{[0,l]})v \cdot (g_{[l,l+k]})u \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{ll} - & (g_{[0,k]})u \cdot (g_{[k,k+l]})v \\ + & \sum_{m\in[0,l]}(-1)^{mk+ml+l+1} (g_{[m,m+k]})u \cdot \sum_{i\in[0,l+1]}(-1)^i ((g_{[m+k,k+l]} \otimes g_{[0,m]}) \wedge i)v \\ + & (-1)^{lk}(g_{[0,l]})v \cdot (g_{[l,l+k]})u \end{array} \right) \\
&\overset{v\,\in\,\mathrm{Z}^k}{=} \left(\begin{array}{ll} - & (g_{[0,k]})u \cdot (g_{[k,k+l]})v \\ + & (-1)^{lk}(g_{[0,l]})v \cdot (g_{[l,l+k]})u \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{ll} - & (g_{[0,k+l]})(u \cup v) \\ + & (-1)^{lk}(g_{[0,k+l]})(v \cup u) \end{array} \right) .
\end{aligned}
$$

Folglich ist $-u \cup v + (-1)^{lk}(v \cup u)$ ein Corand, und mithin repräsentieren $u \cup v$ und $(-1)^{lk}(v \cup u)$ dasselbe Element in der Cohomologie. $\square$

2.5 Mehrere Gruppen

2.5.1 Restriktion, erste und zweite Induktion

Sei R ein kommutativer Ring. Sei G eine Gruppe. Sei $H \leqslant G$ eine Untergruppe.

Wir haben einen *Restriktionsfunktor*

$$
\begin{array}{rcl} RG\text{-Mod} & \xrightarrow{(-)\downarrow_H} & RH\text{-Mod} \\ X & \longmapsto & X\downarrow_H \, , \end{array}
$$

wobei $X{\downarrow_H} = X$ als R-Modul, und wobei sich die Moduloperation auf $X{\downarrow_H}$ durch Einschränken von RG nach RH ergibt. Formal, wir schalten vor den moduldefinierenden Ringmorphismus $RG \longrightarrow \mathrm{End}_R X$ den Ringmorphismus $RH \hookrightarrow RG$, und erhalten so einen moduldefinierenden Morphismus $RH \longrightarrow \mathrm{End}_R X$. Entsprechend auf Morphismen – RG-lineare Abbildungen sind insbesondere RH-linear.

Wir haben einen *(ersten) Induktionsfunktor*

$$\begin{array}{rcl} RH\text{-Mod} & \xrightarrow{(-)\upharpoonleft^G} & RG\text{-Mod} \\ Y & \longmapsto & Y{\upharpoonleft^G} \;:=\; RG \otimes_{RH} Y \;, \end{array}$$

wozu RG als RG-RH-Bimodul verwandt wird. Entsprechend werden auch die Morphismen tensoriert.

Wir haben einen *zweiten Induktionsfunktor*

$$\begin{array}{rcl} RH\text{-Mod} & \xrightarrow{(-)\Uparrow^G} & RG\text{-Mod} \\ Y & \longmapsto & Y{\Uparrow^G} \;:=\; {}_{RH}(RG, Y) \;, \end{array}$$

wozu RG als RH-RG-Bimodul verwandt wird. Entsprechend operieren die Bilder der Morphismen durch ihr Nachschalten.

Manchmal schreibt man in dieser Situation auch $X{\downarrow_H^G} := X{\downarrow_H}$, sowie $Y{\upharpoonleft_H^G} := Y{\upharpoonleft^G}$ und $Y{\Uparrow_H^G} := Y{\Uparrow^G}$, und entsprechend für Morphismen. Diese Schreibweise bietet sich an, wenn außer H noch weitere Untergruppen von G auftreten.

Bezeichnen im folgenden g, g' und g'' Elemente aus G, und h ein Element aus H.

Lemma. *Wir haben eine Transformation $\theta = (\theta Y)_{Y \in \mathrm{Ob}\, RH\text{-Mod}} : (-){\upharpoonleft^G} \longrightarrow (-){\Uparrow^G}$, gegeben durch*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} Y{\upharpoonleft^G} & \xrightarrow{\theta Y} & Y{\Uparrow^G} \\ g \otimes y & \longmapsto & \left(g' \;\longmapsto\; \partial_{Hg',\, Hg^{-1}}(g'g)y \;=\; \begin{cases} (g'g)y & \text{falls } g'g \in H \\ 0 & \text{falls } g'g \notin H \end{cases} \right) \end{array}} \;,$$

unter Verwendung eines Kroneckerdeltas.

Ist H in G von endlichem Index, i.e. ist $[G : H] < \infty$, so ist θ eine Isotransformation, mit der Inversen

$$\boxed{\begin{array}{rcl} Y{\upharpoonleft^G} & \xleftarrow{(\theta Y)^{-1}} & Y{\Uparrow^G} \\ \sum_{g \in H\backslash G} g^{-1} \otimes gf & \longleftarrow\!\shortmid & (RG \xrightarrow{f} Y) \end{array}}$$

bei Y.

Ist Y aus dem Kontext bekannt, schreiben wir oft auch nur θ statt θY, und, bei Existenz, θ^- für das Inverse $(\theta Y)^{-1}$.

Beweis. Zunächst beweisen wir die implizite Behauptung, daß θ wohldefiniert ist.

Als Abbildung nach ${}_R(RG,Y)$ ist θY wohldefiniert, da $g'g$ genau dann in H liegt, wenn $g'gh$ dies tut, und dann auch $(g'(gh))y = (g'g)(hy)$ ist.

Sodann folgt die RH-Linearität von $(g\otimes y)(\theta Y)$ daraus, daß $g'g$ genau dann in H liegt, wenn $(hg')g$ dies tut, und dann auch $((hg')g)y = (h(g'g))y$ ist.

Zeigen wir die RG-Linearität von θ. Es bildet

$$(g''g\otimes y)(\theta Y)\ :\ g' \longmapsto \begin{cases} (g'(g''g))y & \text{falls } g'(g''g)\in H \\ 0 & \text{falls } g'(g''g)\notin H \end{cases}$$

ab, wie auch

$$g''((g\otimes y)(\theta Y))\ :\ g' \longmapsto \begin{cases} ((g'g'')g)y & \text{falls } (g'g'')g\in H \\ 0 & \text{falls } (g'g'')g\notin H\ . \end{cases}$$

Ferner ist θ eine Transformation, da für eine RH-lineare Abbildung $Y \xrightarrow{u} Y'$ das Element $g\otimes yu$ unter $\theta Y'$ auf die Abbildung $g' \longmapsto \partial_{Hg',Hg^{-1}}(g'g)(yu)$ geschickt wird, welche sich auch durch Nachschalten von u aus dem Bild von $g\otimes y$ unter θ ergibt.

$$\begin{tikzcd} Y{\upharpoonright}^G \arrow[r, "\theta Y"] \arrow[d, "u{\upharpoonright}^G"'] & Y{\Uparrow}^G \arrow[d, "u{\Uparrow}^G"] \\ Y'{\upharpoonright}^G \arrow[r, "\theta Y'"] & Y'{\Uparrow}^G \end{tikzcd}$$

Sei nun $[G:H]<\infty$. Bezeichne $\sum_{g\in H\backslash G}$ eine Summe über ein Repräsentantensystem von H-Rechtsnebenklassen in G.

Wir behaupten nun, daß das Inverse von θ bei $Y\in \operatorname{Ob} RH\text{-Mod}$ gegeben ist durch

$$\begin{array}{ccc} Y{\upharpoonright}^G & \xleftarrow{(\theta Y)^{-1}} & Y{\Uparrow}^G \\ \sum_{g\in H\backslash G} g^{-1}\otimes gf & \longleftarrow\!\shortmid & (RG \xrightarrow{f} Y)\ . \end{array}$$

Da $(hg)^{-1}\otimes(hg)f = g^{-1}h^{-1}\otimes h(gf) = g^{-1}\otimes gf$ für $g\in G$ und $h\in H$, ist die dabei auftretende Summe repräsentantensystemunabhängig.

Zeigen wir $(\theta Y)^{-1}(\theta Y)=1$. Für eine RH-lineare Abbildung $RG \xrightarrow{f} Y$ wird

$$\begin{array}{rcl} g'(f(\theta Y)^{-1}(\theta Y)) & = & g'\left(\left(\sum_{g\in H\backslash G} g^{-1}\otimes gf\right)\theta Y\right) \\ & = & \sum_{g\in H\backslash G} g'((g^{-1}\otimes gf)\theta Y) \\ & = & \sum_{g\in H\backslash G} \partial_{Hg',\,Hg}(g'g^{-1})(gf) \\ & = & \sum_{g\in H\backslash G} \partial_{Hg',\,Hg}((g'g^{-1})g)f \\ & = & \left(\sum_{g\in H\backslash G} \partial_{Hg',\,Hg}\right) g'f \\ & = & g'f\ . \end{array}$$

Zeigen wir $(\theta Y)(\theta Y)^{-1} = 1$. Es wird

$$\begin{array}{rcl}(g\otimes y)(\theta Y)(\theta Y)^{-1} & = & \sum_{g'\in H\backslash G} g'^{-1}\otimes g'((g\otimes y)(\theta Y)) \\ & = & \sum_{g'\in H\backslash G} g'^{-1}\otimes (g'g)y\partial_{Hg',\,Hg^{-1}} \\ & = & \sum_{g'\in H\backslash G} g'^{-1}(g'g)\otimes y\partial_{Hg',\,Hg^{-1}} \\ & = & g\otimes y\left(\sum_{g'\in H\backslash G}\partial_{Hg',\,Hg^{-1}}\right) \\ & = & g\otimes y\ .\end{array}$$

Die RG-Linearität von $(\theta Y)^{-1}$ folgt nun aus der von θY.

Im folgenden werde hauptsächlich der erste Induktionsfunktor angewandt. Das Wechseln von zweitem auf ersten bedingt allerdings das Einschalten von θ. Wir werden sehen, daß wann immer dieses θ so ins Spiel kommt, etwas Interessantes passieren wird.

Beispiel. Seien $G = \langle c\rangle$ (keine Relation), $R = \mathbf{Q}$, $H = 1$ und $Y = \mathbf{Q}$. Dann kann man $\theta Y{\downarrow_H}$ als kanonische Inklusion $\coprod_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q} \hookrightarrow \prod_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ ansehen, was kein Isomorphismus ist. Die Endlichkeitsbedingung an den Index $[G:H]$ für die Invertibilität von θ kann also nicht entfallen, zumindest nicht ersatzlos.

Korollar (Frobeniusreziprozitäten). *Folgende Aussagen gelten.*

(1) *Wir verfügen über die Adjunktion*

$$(-){\uparrow^G}\ \dashv\ (-){\downarrow_H}\ .$$

(2) *Wir verfügen über die Adjunktion*

$$(-){\downarrow_H}\ \dashv\ (-){\Uparrow^G}\ .$$

Ist $[G:H]<\infty$, so ist auch

$$(-){\downarrow_H}\ \dashv\ (-){\uparrow^G}\ .$$

Wir bezeichnen noch Coeinheit und Einheit der Adjunktion $(-){\uparrow^G}\dashv(-){\downarrow_H}$ mit

$$\begin{array}{rcl} X{\downarrow_H}{\uparrow^G} & \xrightarrow{\eta X} & X \\ g\otimes x & \longmapsto & gx \\ Y & \xrightarrow{\varepsilon Y} & Y{\uparrow^G}{\downarrow_H} \\ y & \longmapsto & 1\otimes y\ , \end{array}$$

und Coeinheit und Einheit der Adjunktion $(-){\downarrow_H}\dashv(-){\Uparrow^G}$ mit

$$\begin{array}{rcl} Y{\Uparrow^G}{\downarrow_H} & \xrightarrow{\eta' Y} & Y \\ (RG\xrightarrow{f}Y) & \longmapsto & 1f \\ X & \xrightarrow{\varepsilon' X} & X{\downarrow_H}{\Uparrow^G} \\ x & \longmapsto & (g\longmapsto gx)\ , \end{array}$$

vgl. Aufgabe 10. Ist das jeweilige Objekt aus dem Kontext bekannt, so schreiben wir auch η für ηY etc.

Beweis. Ad (1). Mit Aufgabe 13.(4) genügt es zu zeigen, daß

$$\begin{array}{rcl} X{\downarrow}_H & \xrightarrow{\sim} & {}_{RG}(RG, X) \\ x & \longmapsto & (1 \longmapsto x) \\ 1f & \longmapsfrom & f \end{array}$$

ein in X natürlicher Isomorphismus von RH-Moduln ist, wobei RG als RG-RH-Bimodul aufzufassen ist. Die Natürlichkeit in X folgt leicht, und ebenso, daß sich die angegebenen Abbildungen wechselseitig invertieren. Bleibt zu zeigen, daß $x \longmapsto (1 \longmapsto x)$ eine RH-lineare Abbildung ist. Sei $h \in H$. In der Tat ist $(1 \longmapsto hx) = h(1 \longmapsto x)$, da allgemein für $f \in {}_{RG}(RG, X)$ und $\xi \in RG$ gilt, daß $\xi(hf) =: (\xi h)f$, unter Verwendung der RH-Rechtsmodulstruktur auf RG.

Ad (2). Mit vorstehendem Lemma genügt es zu zeigen, daß $(-){\downarrow}_H \dashv (-){\Uparrow}^G$. Mit Aufgabe 13.(4) genügt es anzumerken, daß

$$\begin{array}{rcccc} X{\downarrow}_H & \xrightarrow{\sim} & RG & \otimes_{RG} & X \\ x & \longmapsto & 1 & \otimes & x \\ \xi x & \longmapsfrom & \xi & \otimes & x \end{array}$$

ein in X natürlicher Isomorphismus von RH-Moduln ist, wobei RG als RH-RG-Bimodul aufzufassen ist. ▫

Sei nun im folgenden stets $\boxed{[G:H] < \infty}$ vorausgesetzt.

Korollar. *Es sind $(-){\uparrow}^G$ und $(-){\downarrow}_H$ exakte Funktoren.*

Beweis. Dies folgt aus dem vorangegangenen Korollar zusammen mit Aufgabe 17.

Dies hätte man auch direkt sehen können. In der Tat haben wir die folgende

Bemerkung. *Es ist RG ein endlich erzeugt freier RH-Modul. Ein Repräsentantensystem von $H\backslash G$ ist eine RH-lineare Basis von RG, i.e. $RG = \bigoplus_{g \in H\backslash G} RHg$. Insbesondere ist $Q{\uparrow}^G$ projektiv über RG, sofern Q projektiv über RH ist, und $P{\downarrow}_H$ projektiv über RH, sofern P projektiv über RG ist.*

Beweis. Die direkte Summenzerlegung folgt aus einer eindeutigen Summendarstellung eines Elementes in RG in den direkten Summanden. Ist Q endlich erzeugt projektiv über RH, so ist Q direkter Summand eines endlich erzeugt freien Moduls über RH; vgl. Aufgabe 22.(1). Somit können wir wegen der Additivität von $(-){\uparrow}^G$ annehmen, daß $Q = RH$, und die Aussage folgt – ohne Verwendung der Freiheit von RG über RH. Ist dagegen P endlich erzeugt projektiv über RG, so können wir wie eben $P = RG$ annehmen, und die Aussage folgt aus der Freiheit von RG über RH; vgl. Aufgabe 22.(1). ▫

Bemerkung. *Für $X \in \text{Ob-Mod}\, RG$ ist*

$$\begin{array}{rcl} X & \xrightarrow{\varepsilon'\theta^-\eta} & X \\ x & \longmapsto & [G:H]\cdot x\,. \end{array}$$

Beweis. Es wird

$$\begin{array}{rcl} x\varepsilon'\theta^-\eta & = & (g' \longmapsto g'x)\theta^-\eta \\ & = & \Big(\sum_{g\in H\backslash G} g^{-1}\otimes g(g'\longmapsto g'x)\Big)\,\eta \\ & = & \sum_{g\in H\backslash G}(g^{-1}\otimes gx)\eta \\ & = & \sum_{g\in H\backslash G} g^{-1}gx \\ & = & [G:H]\cdot x\,. \end{array}$$

□

2.5.2 Eckmann-Shapiro – "Adjunktion auf Ext- und Tor-Level"

Diese Merkhilfe in Anführungszeichen ist nicht wörtlich zu verstehen.

Sei R ein kommutativer Ring. Sei G eine Gruppe. Sei $H \leqslant G$ eine Untergruppe von endlichem Index, i.e. $[G:H] < \infty$.

Wir erinnern daran, daß ein RG-Linksmodul M zu einem RG-Rechtsmodul wird vermöge $mg := g^{-1}m$ für $m \in M$ und $g \in G$, und daß Projektivität bei diesem Seitenwechsel bewahrt bleibt. Genauso für RH.

Lemma (Eckmann-Shapiro). *Ist X ein RG-Modul und Y ein RH-Modul, und ist $k \geqslant 0$, so werden*

$$\begin{array}{rrcl} & \mathrm{Ext}^k_{RG}(Y\!\upharpoonleft^G, X) & \simeq & \mathrm{Ext}^k_{RH}(Y, X\!\downharpoonleft_H) \\ & \mathrm{Ext}^k_{RG}(X, Y\!\upharpoonleft^G) & \simeq & \mathrm{Ext}^k_{RH}(X\!\downharpoonleft_H, Y) \\ & \mathrm{Tor}_k^{RG}(Y\!\upharpoonleft^G, X) & \simeq & \mathrm{Tor}_k^{RH}(Y, X\!\downharpoonleft_H) \\ \simeq & \mathrm{Tor}_k^{RG}(X, Y\!\upharpoonleft^G) & \simeq & \mathrm{Tor}_k^{RH}(X\!\downharpoonleft_H, Y) \end{array}$$

als R-Moduln. Insbesondere sind

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^k(G, Y\!\upharpoonleft^G; R) & \simeq & \mathrm{H}^k(H, Y; R) \\ \mathrm{H}_k(G, Y\!\upharpoonleft^G; R) & \simeq & \mathrm{H}_k(H, Y; R) \end{array}$$

als R-Moduln.

Beweis. Sei P eine projektive Auflösung von X in RG-Mod. Sei Q eine projektive Auflösung von Y in RH-Mod.

Da $(-)\!\upharpoonleft^G$ exakt ist, ist $Q\!\upharpoonleft^G$ eine projektive Auflösung von $Y\!\upharpoonleft^G$ in RG-Mod. Da RG frei über RH ist, und da $(-)\!\downharpoonleft_H$ exakt ist, ist $P\!\downharpoonleft_H$ eine projektive Auflösung von $X\!\downharpoonleft_H$ in RH-Mod. Vgl. die erste Bemerkung aus §2.5.1.

Wir können also rechnen

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^k_{RG}(Y{\uparrow}^G, X) &\simeq \mathrm{H}^k({}_{RG}(Q{\uparrow}^G, X)) \\
&\simeq \mathrm{H}^k({}_{RH}(Q, X{\downarrow}_H)) \\
&\simeq \mathrm{Ext}^k_{RH}(Y, X{\downarrow}_H) \\
\mathrm{Ext}^k_{RG}(X, Y{\uparrow}^G) &\simeq \mathrm{H}^k({}_{RG}(P, Y{\uparrow}^G)) \\
&\simeq \mathrm{H}^k({}_{RG}(P, Y{\Uparrow}^G)) \\
&\simeq \mathrm{H}^k({}_{RH}(P{\downarrow}_H, Y)) \\
&\simeq \mathrm{Ext}^k_{RH}(X{\downarrow}_H, Y) \\
\mathrm{Tor}^{RG}_k(X, Y{\uparrow}^G) &\simeq \mathrm{H}_k(P \otimes_{RG} Y{\uparrow}^G) \\
&= \mathrm{H}_k(P \otimes_{RG} RG \otimes_{RH} Y) \\
&\simeq \mathrm{H}_k(P{\downarrow}_H \otimes_{RH} Y) \\
&\simeq \mathrm{Tor}^{RH}_k(X{\downarrow}_H, Y)\ .
\end{aligned}
$$

Sodann erinnern wir uns daran, daß wir gemäß der ersten Bemerkung aus §2.2.2 in Tor die Variablen vertauschen dürfen. ▫

2.5.3 Vergleich der Standardauflösungen über H und über G

Sei R ein kommutativer Ring. Sei G eine Gruppe. Sei $H \leqslant G$ eine Untergruppe von endlichem Index $[G : H] < \infty$.

Wir haben bezüglich eines fest gewählten Repräsentantensystems von $H\backslash G$, welches 1 enthalte, eine RH-lineare Abbildung, die jedes Element dieser RH-linearen Basis von RG nach $1 \in RH$ schickt, die also

$$
\begin{array}{rcl}
RG & \xrightarrow{\alpha} & RH \\
\sum_{g\in H\backslash G}\sum_{h\in H} r_{h,g} hg & \longmapsto & \sum_{g\in H\backslash G}\sum_{h\in H} r_{h,g} h
\end{array}
$$

abbildet, wobei $r_{h,g} \in R$.

Dies gibt einen Isomorphismus

$$
\begin{array}{rcl}
(\mathrm{Bar}_{G;R}){\downarrow}_H & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Bar}_{H;R} \\
g_0 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_k & \longmapsto & g_0\alpha \otimes g_1\alpha \otimes \cdots \otimes g_k\alpha
\end{array}
$$

in $\mathrm{K}(RH\text{-Mod})$, da beides projektive Auflösungen von R sind, und da H_0 diesen Morphismus von Komplexen auf die Identität auf R abbildet.

Beispiel.

(1) Für $k = 1$ ist $[g_1]\alpha = 1\alpha \otimes g_1\alpha = [g_1\alpha]$.

(2) Ist G endlich und $H = 1$, so ist $g\alpha = 1$ für alle $g \in G$, und also $[g_1, \ldots, g_k]\alpha = 1 \otimes \cdots \otimes 1$.

(3) Sei $G = \mathcal{S}_3$, sei $H = \langle(1,2,3)\rangle$. Seien die Rechtsnebenklassen durch $G = H\cdot 1 \sqcup H\cdot(1,2)$ repräsentiert. Sei α bezüglich dieses Repräsentantensystems definiert. Es kommen

$$\begin{array}{rcrcl} & & RG & \xrightarrow{\alpha} & RH \\ & & 1 & \longmapsto & 1 \\ & & (1,2,3) & \longmapsto & (1,2,3) \\ & & (1,3,2) & \longmapsto & (1,3,2) \\ & & (1,2) & \longmapsto & 1 \\ (2,3) & = & (1,2,3)(1,2) & \longmapsto & (1,2,3) \\ (1,3) & = & (1,3,2)(1,2) & \longmapsto & (1,3,2)\,. \end{array}$$

Um ein recht beliebiges Beispiel zu geben, es wird etwa

$$\begin{array}{rl} & [(1,2),(1,3),(2,3)] \;=\; 1\otimes(1,2)\otimes(1,2,3)\otimes(1,3) \\ \stackrel{\alpha}{\longmapsto} & 1\otimes 1\otimes(1,2,3)\otimes(1,3,2) \;=\; [1,(1,2,3),(1,2,3)] \;\neq\; [(1,2)\alpha,(1,3)\alpha,(2,3)\alpha]\,. \end{array}$$

Mir ist keine Beschreibung der Operation von α auf den Elementen der Form $[g_1,\ldots,g_k]$ bekannt, die kürzer wäre als die Definition selbst.

2.5.4 Transfer für Ext

Sei R ein kommutativer Ring. Sei G eine Gruppe. Sei $H \leqslant G$ eine Untergruppe von endlichem Index $[G:H] < \infty$. Seien $X,\, X' \in \operatorname{Ob} RG\text{-Mod}$.

Wir haben eine R-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} {}_{RG}(X,X') & \xrightarrow{\operatorname{Res}\downarrow_H^G} & {}_{RH}(X\downarrow_H, X'\downarrow_H) \\ f & \longmapsto & f\operatorname{Res}\downarrow_H^G := f\downarrow_H\,. \end{array}$$

Auch in Gegenrichtung haben wir eine R-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} {}_{RH}(X\downarrow_H, X'\downarrow_H) & \xrightarrow{\operatorname{Tr}\uparrow_H^G} & {}_{RG}(X,X') \\ f & \longmapsto & (f)\operatorname{Tr}\uparrow_H^G \;:=\; \varepsilon'(f\Uparrow^G)\theta^-\eta \;=\; \varepsilon'\theta^-(f\uparrow^G)\eta\,, \end{array}$$

den *Transfer*. Es ist für $x \in X$

$$\begin{array}{rcl} (x)((f)\operatorname{Tr}\uparrow_H^G) & = & x\varepsilon'\theta^-(f\uparrow^G)\eta \\ & = & (g\longmapsto gx)\theta^-(f\uparrow^G)\eta \\ & = & \left(\sum_{g\in H\backslash G} g^{-1}\otimes gx\right)(f\uparrow^G)\eta \\ & = & \left(\sum_{g\in H\backslash G} g^{-1}\otimes (gx)f\right)\eta \\ & = & \sum_{g\in H\backslash G} g^{-1}((gx)f)\,, \end{array}$$

und daher wird explizit ausgeschrieben

$$\begin{array}{rcl} X & \xrightarrow{(f)\operatorname{Tr}\uparrow_H^G} & X' \\ x & \longmapsto & \sum_{g\in H\backslash G} g^{-1}((gx)f)\,, \end{array}$$

was uns aus der Lösung zu Aufgabe 36.(1) bekannt vorkommt.

Bemerkung. *Wir haben* $(f)\operatorname{Res}\downharpoonright_H^G \operatorname{Tr}\upharpoonleft_H^G = [G:H]\cdot f$ *für* $f \in {}_{RG}(X, X')$.

Beweis. Mit der letzten Bemerkung aus §2.5.1 wird

$$\begin{array}{rcl} f\operatorname{Res}\downharpoonright_H^G \operatorname{Tr}\upharpoonleft_H^G & = & \varepsilon'(f\downharpoonright_H \Uparrow^G)\theta^- \eta \\ & = & f\varepsilon'\theta^-\eta \\ & = & [G:H]\cdot f\ . \end{array}$$

□

Dies ist mit der expliziten Form auch leicht direkt nachzurechnen. Wir haben die zitierte Bemerkung bemüht, um zu zeigen, daß die Gleichung $\varepsilon'\theta^-\eta = [G:H]$ dahintersteht.

Beachte, daß für RG-lineare Abbildungen $X_0 \xleftarrow{u} X_1$ und $X'_0 \xrightarrow{u'} X'_1$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} {}_{RH}(X_0\downharpoonright_H, X'_0\downharpoonright_H) \arrow[r, "u\downharpoonright_H(-)u'\downharpoonright_H"] \arrow[d, "\operatorname{Tr}\upharpoonleft_H^G"] & {}_{RH}(X_1\downharpoonright_H, X'_1\downharpoonright_H) \arrow[d, "\operatorname{Tr}\upharpoonleft_H^G"] \\ {}_{RG}(X_0, X'_0) \arrow[r, "u(-)u'"] & {}_{RG}(X_1, X'_1) \end{tikzcd}$$

kommutiert, da für eine RH-lineare Abbildung $X_0\downharpoonright_H \xrightarrow{f} X'\downharpoonright_H$

$$\begin{array}{rcl} u\cdot(f)\operatorname{Tr}\upharpoonleft_H^G\cdot u' & = & u\varepsilon'(f\Uparrow^G)\theta^-\eta u' \\ & = & \varepsilon'(u\downharpoonright_H\Uparrow^G)(f\Uparrow^G)\theta^-(u'\downharpoonright_H\upharpoonleft^G)\eta \\ & = & \varepsilon'(u\downharpoonright_H\Uparrow^G)(f\Uparrow^G)(u'\downharpoonright_H\Uparrow^G)\theta^-\eta \\ & = & \varepsilon'((u\downharpoonright_H\cdot f\cdot u'\downharpoonright_H)\Uparrow^G)\theta^-\eta \\ & = & (u\downharpoonright_H\cdot f\cdot u'\downharpoonright_H)\operatorname{Tr}\upharpoonleft_H^G \end{array}$$

ist. I.e. es liegt eine Transformation von ${}_{RH}((-)\downharpoonright_H, (=)\downharpoonright_H)$ nach ${}_{RG}(-,=)$ vor.

Sei P ein Komplex von RG-Moduln. Mit der eben gezeigten Kommutativität erhalten wir einen Morphismus von Komplexen

$${}_{RH}(P\downharpoonright_H, X'\downharpoonright_H) \xrightarrow{\operatorname{Tr}\upharpoonleft_H^G} {}_{RG}(P, X')\ .$$

Ist $Q \xleftarrow{v} P$ ein Morphismus von Komplexen von RG-Moduln, so kommutiert das Viereck von Komplexen von R-Moduln

$$\begin{tikzcd} {}_{RH}(Q\downharpoonright_H, X'\downharpoonright_H) \arrow[r, "v\downharpoonright_H(-)"] \arrow[d, "\operatorname{Tr}\upharpoonleft_H^G"] & {}_{RH}(P\downharpoonright_H, X'\downharpoonright_H) \arrow[d, "\operatorname{Tr}\upharpoonleft_H^G"] \\ {}_{RG}(Q, X') \arrow[r, "v(-)"] & {}_{RG}(P, X') \end{tikzcd}$$

wie man punktweise unter Verwendung desselben Arguments verifiziert. Seien nun P und Q zwei projektive Auflösungen von X. Definieren wir für $k \geqslant 0$ den *Transfer* auf Ext als die R-lineare Abbildung

$$\begin{aligned}
&\Big(\mathrm{Ext}^k_{RH}(X{\downarrow_H}, X'{\downarrow_H}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}\uparrow_H^G} \mathrm{Ext}^k_{RG}(X, X')\Big) \\
:= \;&\Big(\mathrm{Ext}^k_{RH}(X{\downarrow_H}, X'{\downarrow_H}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^k({}_{RH}(P{\downarrow_H}, X'{\downarrow_H})) \xrightarrow{\mathrm{H}^k(\mathrm{Tr}\uparrow_H^G)} \mathrm{H}^k({}_{RG}(P, X')) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^k_{RG}(X, X')\Big)\,,
\end{aligned}$$

so zeigt das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^k_{RH}(X{\downarrow_H}, X'{\downarrow_H}) \arrow[d, "\wr"'] \arrow[dr, "\sim"] & \\
\mathrm{H}^k({}_{RH}(Q{\downarrow_H}, X'{\downarrow_H})) \arrow[r, "\mathrm{H}^k(v{\downarrow_H}(-))", "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{H}^k(\mathrm{Tr}\uparrow_H^G)"] & \mathrm{H}^k({}_{RH}(P{\downarrow_H}, X'{\downarrow_H})) \arrow[d, "\mathrm{H}^k(\mathrm{Tr}\uparrow_H^G)"] \\
\mathrm{H}^k({}_{RG}(Q, X')) \arrow[r, "\mathrm{H}^k(v(-))", "\sim"'] \arrow[dr, "\sim"] & \mathrm{H}^k({}_{RG}(P, X')) \arrow[d, "\wr"'] \\
& \mathrm{Ext}^k_{RG}(X, X')
\end{tikzcd}$$

(in welchem das obere Dreieck dem kommutativen Dreieck $(\mathrm{PRes}X, Q, P)$ in $\mathrm{K}(RG\text{-Mod})$ entstammt, welches seinerseits kommutiert, da H_0 es auf ein Dreieck aus Identitäten abbildet; analog das untere Dreieck), daß diese Definition unabhängig von der Wahl einer projektiven Auflösung ist.

In die umgekehrte Richtung induziert $\mathrm{Res}\downarrow_H^G$ für $k \geqslant 0$ eine R-lineare Abbildung

$$\begin{aligned}
&\Big(\mathrm{Ext}^k_{RG}(X, X') \xrightarrow{\mathrm{Res}\downarrow_H^G} \mathrm{Ext}^k_{RH}(X{\downarrow_H}, X'{\downarrow_H})\Big) \\
:= \;&\Big(\mathrm{Ext}^k_{RG}(X, X') \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^k({}_{RG}(P, X')) \xrightarrow{\mathrm{H}^k(\mathrm{Res}\downarrow_H^G)} \mathrm{H}^k({}_{RH}(P{\downarrow_H}, X'{\downarrow_H})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^k_{RH}(X{\downarrow_H}, X'{\downarrow_H})\Big)
\end{aligned}$$

namens *Restriktion,* welche ebenfalls von der Wahl einer projektiven Auflösung unabhängig ist.

Satz. *Sei $k \geqslant 0$. Wir haben*

$$\Big(\mathrm{Ext}^k_{RG}(X, X') \xrightarrow{\mathrm{Res}\downarrow_H^G} \mathrm{Ext}^k_{RH}(X{\downarrow_H}, X'{\downarrow_H}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}\uparrow_H^G} \mathrm{Ext}^k_{RG}(X, X')\Big) \;=\; [G:H]\cdot 1_{\mathrm{Ext}^k_{RG}(X,X')}\,.$$

Beweis. Sei P eine projektive Auflösung von X in RG-Mod. Mit obiger Bemerkung ist die Komposition

$${}_{RG}(P, X') \xrightarrow{\mathrm{Res}\downarrow_H^G} {}_{RH}(P{\downarrow_H}, X'{\downarrow_H}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}\uparrow_H^G} {}_{RG}(P, X')$$

gleich dem $[G:H]$fachen der Identität. Dies bleibt erhalten nach Anwenden von H^k und isomorphem Ersetzen durch $\mathrm{Ext}^k_{RG}(X, X')$. ▫

Korollar. *Ist* $[G:H]$ *eine Einheit in* R*, so ist für* $k \geqslant 0$ *die Restriktion*

$$\mathrm{Ext}^k_{RG}(X,X') \xrightarrow{\mathrm{Res}\downharpoonright^G_H} \mathrm{Ext}^k_{RH}(X\downharpoonright_H, X'\downharpoonright_H)$$

eine Coretraktion. Folglich ist diesenfalls $\mathrm{Ext}^k_{RG}(X,X')$ *ein* R*-linearer direkter Summand von* $\mathrm{Ext}^k_{RH}(X\downharpoonright_H, X'\downharpoonright_H)$*.*

Vorsicht. In diesem Zusammenhang "hat die kleinere Gruppe das größere Ext". Vgl. hierzu die Situation für $k=0$.

Folgende Aussage verallgemeinert Aufgabe 36.(2) ein wenig.

Korollar. *Gegeben* $k \geqslant 0$*. Ist* G *endlich, und ist* $\mathrm{Ext}^k_R(X,X') = 0$*, so ist*

$$|G| \cdot \mathrm{Ext}^k_{RG}(X,X') \;=\; 0\;.$$

Beweis. Die Multiplikation mit $|G|$ auf $\mathrm{Ext}^k_{RG}(X,X')$ faktorisiert nach obigem Satz, angewandt für $H=1$, über $\mathrm{Ext}^k_R(X,X')$, i.e. über 0. ▫

Beispiel. Ist $R = \mathbf{Z}$, ist $k \geqslant 2$, und ist X endlich erzeugt über $\mathbf{Z}$, so hat X über $\mathbf{Z}$ eine projektive Auflösung mit Nulleinträgen an allen Positionen $\geqslant 2$, und insbesondere ist $\mathrm{Ext}^k_{\mathbf{Z}}(X,X') = 0$. Mit dem Korollar folgt nun $|G| \cdot \mathrm{Ext}^k_{\mathbf{Z}G}(X,X') = 0$. Dies folgt aus Aufgabe 36.(2) nur, falls X projektiv über $\mathbf{Z}$ ist.

Lemma. *Sei* $k \geqslant 0$*. Der Transfer bildet*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^k(H, X\downharpoonright_H; R) & \xrightarrow{\mathrm{Tr}\upharpoonright^G_H} & \mathrm{H}^k(G,X;R) \\ f & \longmapsto & \Big([g_1,\ldots,g_k] \longmapsto \sum_{g\in H\backslash G} g^{-1}((g[g_1,\ldots,g_k])\alpha f)\Big) \end{array}$$

ab, wenn f *einen repräsentierenden* k*-Cozykel bezeichnet. Umgekehrt bildet*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^k(G,X;R) & \xrightarrow{\mathrm{Res}\downharpoonright^G_H} & \mathrm{H}^k(H, X\downharpoonright_H; R) \\ v & \longmapsto & v|_{H^{\times k}} \end{array}$$

ab, wenn v *einen repräsentierenden* k*-Cozykel bezeichnet.*

Beweis. Sei $H^{\times k} \xrightarrow{f} X\downharpoonright_H$ ein k-Cozykel. Dieser ist als RH-lineare Abbildung $RH^{\otimes(k+1)} \xrightarrow{f} X\downharpoonright_H$ aufzufassen, und zunächst via des Isomorphismus $(\mathrm{Bar}_{G;R})\downharpoonright_H \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Bar}_{H;R}$ in $\mathrm{K}(RH\text{-Mod})$ nach αf abzubilden. Wenden wir dann $\mathrm{Tr}\upharpoonright^G_H$ darauf an und lassen das Resultat auf $[g_1,\ldots,g_k] \in G^{\times k}$ los. Die explizite Formel ergibt in der Tat

$$[g_1,\ldots,g_k]((\alpha f)\,\mathrm{Tr}\upharpoonright^G_H) \;=\; \sum_{g\in H\backslash G} g^{-1}((g[g_1,\ldots,g_k])\alpha f)\;.$$

Die Abbildungsvorschrift für $\mathrm{Res}\downharpoonright^G_H$ ergibt sich unter Berücksichtigung des Wechsels der projektiven Auflösungen von $\mathrm{Bar}_{H;R}$ nach $(\mathrm{Bar}_{G;R})\downharpoonright_H$ vermöge $RH^{\otimes(k+1)} \longrightarrow (RG^{\otimes(k+1)})\downharpoonright_H$, $[h_1,\ldots,h_k] \longmapsto [h_1,\ldots,h_k]$. ▫

2.5.5 Transfer für Tor

2.5.5.1 Allgemeines

Sei R ein kommutativer Ring. Sei G eine Gruppe. Sei $H \leqslant G$ eine Untergruppe von endlichem Index $[G : H] < \infty$. Seien X, $X' \in \operatorname{Ob} RG$-Mod. Wir erinnern nochmals daran, daß ein RG-Linksmodul M zu einem RG-Rechtsmodul wird vermöge $mg := g^{-1}m$ für $m \in M$ und $g \in G$.

Wir haben eine R-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccccc} X\!\downarrow_H & \otimes_{RH} & X'\!\downarrow_H & \xrightarrow{\operatorname{Can}\uparrow_H^G} & X & \otimes_{RG} & X' \\ x & \otimes & x' & \longmapsto & x & \otimes & x' \,, \end{array}$$

genannt *kanonische Abbildung* (engl. canonical map).

Da $X \otimes_{RG}\ {}_{RG}RG_{RH} \xrightarrow{\sim} X\!\downarrow_H$, $x \otimes g \longmapsto g^{-1}x$, haben wir einen R-linearen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccccccc} X & \otimes_{RG} & (X'\!\downarrow_H\uparrow^G) & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & X\!\downarrow_H & \otimes_{RH} & X'\!\downarrow_H \\ x & \otimes & (g \otimes x') & \longmapsto & g^{-1}x & \otimes & x' \,. \end{array}$$

Wir haben $(x \otimes (g \otimes x'))\varphi \operatorname{Can}\uparrow_H^G = g^{-1}x \otimes x' = x \otimes gx'$, und also $\varphi \operatorname{Can}\uparrow_H^G = X \otimes \eta$.

Damit erhalten wir auch in Gegenrichtung eine R-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} X \ \otimes_{RG} \ X' & \xrightarrow{\operatorname{Tr}\downarrow_H^G} & X\!\downarrow_H \otimes_{RH} X'\!\downarrow_H & & \\ x \ \otimes \ x' & \longmapsto & (x \otimes x')\operatorname{Tr}\downarrow_H^G & := & (x \otimes x')(X \otimes \varepsilon'\theta^-)\varphi \,, \end{array}$$

den *Transfer.* Explizit bedeutet dies, es wird

$$\begin{array}{rcl} (x \otimes x')\operatorname{Tr}\downarrow_H^G & = & (x \otimes x'\varepsilon'\theta^-)\varphi \\ & = & \sum_{g \in H\backslash G}(x \otimes g^{-1} \otimes gx')\varphi \\ & = & \sum_{g \in H\backslash G} gx \otimes gx' \,. \end{array}$$

Insbesondere lieferte eine alternative Definition unter Verwendung des ersten Tensorfaktors dieselbe Transferabbildung.

Bemerkung. *Wir haben* $(x \otimes x')\operatorname{Tr}\downarrow_H^G \operatorname{Can}\uparrow_H^G = [G : H]\cdot(x \otimes x')$ *für* $x \otimes x' \in X \otimes_{RG} X'$.

Beweis. Mit der letzten Bemerkung aus §2.5.1 wird

$$\begin{array}{rcl} (x \otimes x')\operatorname{Tr}\downarrow_H^G \operatorname{Can}\uparrow_H^G & = & (x \otimes x')(X \otimes \varepsilon'\theta^-)\varphi \operatorname{Can}\uparrow_H^G \\ & = & (x \otimes x')(X \otimes \varepsilon'\theta^-\eta) \\ & = & (x \otimes x')(X \otimes [G : H]) \\ & = & [G : H](x \otimes x') \,. \end{array}$$

□

Um so nochmals darauf hingewiesen zu haben, daß der omnipräsente Faktor $[G : H]$ aus der einzigen Quelle $\varepsilon'\theta^-\eta = [G : H]$ stammt. Natürlich kann man die Bemerkung auch mit der expliziten Formel sehen.

Beachte, daß für RG-lineare Abbildungen $X_1 \xrightarrow{u} X_0$ und $X_1' \xrightarrow{u'} X_0'$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_1 \otimes_{RG} X_1' \arrow[r, "u\otimes u'"] \arrow[d, "\mathrm{Tr}\downarrow_H^G"] & X_0 \otimes_{RG} X_0' \arrow[d, "\mathrm{Tr}\downarrow_H^G"] \\ X_1\downarrow_H \otimes_{RH} X_1'\downarrow_H \arrow[r, "u\downarrow_H \otimes u'\downarrow_H"] & X_0\downarrow_H \otimes_{RH} X_0'\downarrow_H \end{tikzcd}$$

kommutiert, da für $x_1 \otimes x_1' \in X_1 \otimes_{RG} X_1'$

$$\begin{array}{rcl} (x_1 \otimes x_1')(u \otimes u') \,\mathrm{Tr}\downarrow_H^G & = & \sum_{g\in H\backslash G} g(x_1 u) \otimes g(x_1' u') \\ & = & \sum_{g\in H\backslash G} (gx_1)u \otimes (gx_1')u' \\ & = & \left(\sum_{g\in H\backslash G} gx_1 \otimes gx_1'\right)(u\downarrow_H \otimes u'\downarrow_H) \\ & = & (x_1 \otimes x_1')\,\mathrm{Tr}\downarrow_H^G (u\downarrow_H \otimes u'\downarrow_H) \end{array}$$

ist. I.e. es liegt eine Transformation von $-\otimes_{RG} =$ nach $(-)\downarrow_H \otimes_{RH} (=)\downarrow_H$ vor.

Sei P eine projektive Auflösung von X in RG-Mod. Mit der eben gesehenen Kommutativität erhalten wir einen Morphismus von Komplexen

$$P \otimes_{RG} X' \xrightarrow{\mathrm{Tr}\downarrow_H^G} P\downarrow_H \otimes_{RH} X'\downarrow_H \;,$$

und so für $k \geqslant 0$ eine R-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rl} & \left(\mathrm{Tor}_k^{RG}(X,X') \xrightarrow{\mathrm{Tr}\downarrow_H^G} \mathrm{Tor}_k^{RH}(X\downarrow_H, X'\downarrow_H)\right) \\ := & \left(\mathrm{Tor}_k^{RG}(X,X') \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_k(P\otimes_{RG} X') \xrightarrow{\mathrm{H}_k(\mathrm{Tr}\downarrow_H^G)} \mathrm{H}_k(P\downarrow_H \otimes_{RH} X'\downarrow_H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_k^{RH}(X\downarrow_H, X'\downarrow_H)\right)\;, \end{array}$$

ebenfalls *Transfer* genannt, und von der Wahl der projektiven Auflösung unabhängig.

Genauso erhalten wir in der umgekehrten Richtung den Morphismus

$$\begin{array}{rl} & \left(\mathrm{Tor}_k^{RH}(X\downarrow_H, X'\downarrow_H) \xrightarrow{\mathrm{Can}\uparrow_H^G} \mathrm{Tor}_k^{RG}(X,X')\right) \\ := & \left(\mathrm{Tor}_k^{RH}(X\downarrow_H, X'\downarrow_H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_k(P\downarrow_H \otimes_{RH} X'\downarrow_H) \xrightarrow{\mathrm{H}_k(\mathrm{Can}\uparrow_H^G)} \mathrm{H}_k(P\otimes_{RG} X') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_k^{RG}(X,X')\right)\;, \end{array}$$

genannt *kanonische Abbildung,* welche ebenfalls von der Wahl einer projektiven Auflösung unabhängig ist.

Satz. *Sei $k \geqslant 0$. Wir haben*

$$\left(\mathrm{Tor}_k^{RG}(X,X') \xrightarrow{\mathrm{Tr}\downarrow_H^G} \mathrm{Tor}_k^{RH}(X\downarrow_H, X'\downarrow_H) \xrightarrow{\mathrm{Can}\uparrow_H^G} \mathrm{Tor}_k^{RG}(X,X')\right) \;=\; [G:H]\cdot 1_{\mathrm{Tor}_k^{RG}(X,X')}\;.$$

Beweis. Dies ist eine Anwendung der vorstehenden Bemerkung. ▫

Korollar. *Ist $[G:H]$ eine Einheit in R, so ist für $k \geqslant 0$ die kanonische Abbildung*

$$\mathrm{Tor}_k^{RH}(X\downarrow_H, X'\downarrow_H) \xrightarrow{\mathrm{Can}\uparrow_H^G} \mathrm{Tor}_k^{RG}(X,X')$$

eine Retraktion, und folglich $\mathrm{Tor}_k^{RG}(X,X')$ *ein* R*-linearer direkter Summand von* $\mathrm{Tor}_k^{RH}(X{\downarrow_H}, X'{\downarrow_H})$.

Folgende Aussage verallgemeinert Aufgabe 36.(3) ein wenig.

Korollar. *Sei* $k \geqslant 0$. *Ist* G *endlich, und ist* $\mathrm{Tor}_k^R(X,X') = 0$, *so ist*

$$|G| \cdot \mathrm{Tor}_k^{RG}(X,X') \;=\; 0\,.$$

Lemma. *Sei* $k \geqslant 0$. *Der Transfer bildet*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}_k(G,X;R) & \xrightarrow{\mathrm{Tr}{\downarrow_H^G}} & \mathrm{H}_k(H,X{\downarrow_H};R) \\ f & \longmapsto & \left([h_1,\dots,h_k] \longmapsto \sum_{g\in H\backslash G} \sum\limits_{\substack{[g_1,\dots,g_k]\,\in\, G^{\times k}\,,\\ (g[g_1,\dots,g_k])\alpha \,=\, [h_1,\dots,h_k]}} g([g_1,\dots,g_k]f) \right) \end{array}$$

ab, wenn f *einen repräsentierenden* k*-Zykel bezeichnet. Umgekehrt bildet*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}_k(H,X{\downarrow_H};R) & \xrightarrow{\mathrm{Can}{\uparrow_H^G}} & \mathrm{H}_k(G,X;R) \\ v & \longmapsto & \left([g_1,\dots,g_k] \longmapsto \begin{cases} [g_1,\dots,g_k]v & \text{falls } g_i \in H \text{ stets} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right) \end{array}$$

ab, wenn v *einen repräsentierenden* k*-Zykel bezeichnet.*

Beweis. Wir bilden das f repräsentierende Element in $RG^{\otimes(k+1)} \otimes_{RG} X$ ab, unter Berücksichtigung dessen, daß wir von der projektiven Auflösung $(\mathrm{Bar}_{G;R}){\downarrow_H}$ via α zur projektiven Auflösung $\mathrm{Bar}_{H;R}$ wechseln.

$$\begin{array}{rl} & \sum\limits_{[g_1,\dots,g_k]\,\in\, G^{\times k}} [g_1,\dots,g_k] \otimes [g_1,\dots,g_k]f \\ \overset{\mathrm{Tr}{\downarrow_H^G}}{\longmapsto} & \sum_{g\in H\backslash G} \sum\limits_{[g_1,\dots,g_k]\,\in\, G^{\times k}} g[g_1,\dots,g_k] \otimes g([g_1,\dots,g_k]f) \\ \overset{\alpha\otimes 1}{\longmapsto} & \sum_{g\in H\backslash G} \sum\limits_{[g_1,\dots,g_k]\,\in\, G^{\times k}} (g[g_1,\dots,g_k])\alpha \otimes g([g_1,\dots,g_k]f) \\ = & \sum\limits_{[h_1,\dots,h_k]\,\in\, H^{\times k}} [h_1,\dots,h_k] \otimes \left(\sum_{g\in H\backslash G} \sum\limits_{\substack{[g_1,\dots,g_k]\,\in\, G^{\times k}\,,\\ (g[g_1,\dots,g_k])\alpha \,=\, [h_1,\dots,h_k]}} g([g_1,\dots,g_k]f) \right)\,. \end{array}$$

Die Abbildungsvorschrift für $\mathrm{Can}{\uparrow_H^G}$ ergibt sich unter Berücksichtigung des Wechsels der projektiven Auflösungen von $\mathrm{Bar}_{H;R}$ nach $(\mathrm{Bar}_{G;R}){\downarrow_H}$ vermöge $RH^{\otimes(k+1)} \longrightarrow (RG^{\otimes(k+1)}){\downarrow_H}$, $[h_1,\dots,h_k] \longmapsto [h_1,\dots,h_k]$. ▫

2.5.5.2 Ein Transfermorphismus auf den maximalen abelschen Quotienten

§2.5.5.2 und §2.5.5.3 sollen der Illustration des allgemeinen Apparates aus §2.5.5.1 dienen.

Sei R ein kommutativer Ring, sei G eine Gruppe, sei $H \leqslant G$ eine Untergruppe von endlichem Index $[G:H] < \infty$.

2.5.5.2.1 Transfer auf den ersten Homologiegruppen

Wir haben eine kurz exakte Sequenz

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{Aug}_{G;R} & \hookrightarrow & RG & \longrightarrow & R \\ & & g & \longmapsto & 1 \end{array}$$

von RG-Moduln, wobei

$$\mathrm{Aug}_{G;R} \;:=\; R\langle g-1 \;:\; g \in G \smallsetminus \{1\}\rangle \;=\; \{\textstyle\sum_{g\in G} r_g g \in RG \;:\; \sum_{g\in G} r_g = 0\}$$

das *Augmentationsideal* von RG bezeichne, welches in der Tat als Kern eines Ringmorphismus ein Ideal ist.

Die lang exakte Homologiesequenz auf dieser kurz exakten Sequenz liefert wegen $\mathrm{H}_1(G, RG; R) = 0$ und wegen $\mathrm{H}_0(G, RG; R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_0(G, R; R)$ die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}_1(G;R) \xrightarrow{\partial_1} \mathrm{H}_0(G, \mathrm{Aug}_{G;R}; R) \longrightarrow 0\ ,$$

i.e. es ist hier ∂_1 ein Isomorphismus. Um ∂_1 auszuwerten, müssen wir ein Urbild unter $RG \longrightarrow R$ wählen, bevor wir das Differential anwenden, und dafür verwenden wir die Komposition mit der (nicht RG-linearen) Inklusion $R \overset{i}{\hookrightarrow} RG$; vgl. §2.3.4.2.2.

Nun ist $\mathrm{H}_0(G, \mathrm{Aug}_{G;R}; R) \simeq (\mathrm{Aug}_{G;R})_G \simeq \mathrm{Aug}_{G;R}/\mathrm{Aug}^2_{G;R}$. Insgesamt erhalten wir einen Isomorphismus von R-Moduln, der auf 1-Zykeln wie folgt gegeben ist.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}_1(G;R) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}_0(G, \mathrm{Aug}_{G;R}; R) \\ \sum_{g_1\in G}[g_1]\otimes[g_1]f & \longmapsto & \sum_{g\in G}(g[g^{-1}]fi - [g]fi) \;=\; \sum_{g\in G}(g[g^{-1}]fi - [g^{-1}]fi) \\ & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Aug}_{G;R}/\mathrm{Aug}^2_{G;R} \\ & \longmapsto & \sum_{g\in G}(g-1)([g^{-1}]fi) \end{array}$$

Halten wir dies fest.

Lemma. *Es ist* $\mathrm{H}_1(G;R) \simeq \mathrm{Aug}_{G;R}/\mathrm{Aug}^2_{G;R}$.

2.5.5.2.2 Transfer auf den ersten Homologiegruppen für $R = \mathbf{Z}$

Spezialisieren wir nun zum Fall $R = \mathbf{Z}$. Wir schreiben $\mathrm{Aug}_G := \mathrm{Aug}_{G;\mathbf{Z}}$. Es ist $\mathrm{H}_1(G) \simeq \mathrm{Aug}_G/\mathrm{Aug}^2_G$.

Wir haben einen Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Aug}_G/\mathrm{Aug}_G^2 & \xrightarrow{\sim} & G^{\mathrm{ab}} \\ g-1 & \longmapsto & g \\ g-1 & \longleftarrow\!\shortmid & g\,, \end{array}$$

wobei die linke Seite additiv und die rechte Seite multiplikativ geschrieben werde.

In der Tat ist $\longmapsto$ wohldefiniert, da $(g-1\ :\ g \in G \smallsetminus \{1\})$ eine $\mathbf{Z}$-lineare Basis von Aug_G ist, und da $(g-1)(g'-1) = (gg'-1)-(g-1)-(g'-1)$ auf $gg'g^{-1}g'^{-1} = 1$ abgebildet wird für $g,\, g' \in G$, und somit das Bild von Aug_G^2 verschwindet. Umgekehrt ist $\longleftarrow\!\shortmid$ wohldefiniert, da die genannte Vorschrift wegen $gg'-1 \equiv_{\mathrm{Aug}_G^2} (g-1)+(g'-1)$ einen Gruppenmorphismus von G in eine abelsche Gruppe definiert, welcher somit über G^{ab} faktorisiert.

Insgesamt haben wir also, nach einer weiteren Inversion auf G^{ab}, einen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}_1(G) & \xrightarrow{\sim} & G^{\mathrm{ab}} \\ \sum_{g\in G}[g]\otimes[g]f & \longmapsto & \prod_{g\in G} g^{[g]f} \\ [g]\otimes 1 & \longleftarrow\!\shortmid & g\,, \end{array}$$

wobei man die Rückrichtung wohldefiniert ist, da zum einen $\mathrm{Z}_1(\mathrm{Bar}_{G,\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}G} \mathbf{Z})$ aus allen Funktionen auf G mit Werten in $\mathbf{Z}$ und mit endlichem Träger besteht, und da zum anderen von einem Element der Form $-[g,g']\otimes 1$ der 1-Rand $-g[g']\otimes 1 + [gg']\otimes 1 - [g]\otimes 1 = [gg']\otimes 1 - ([g]\otimes 1 + [g']\otimes 1)$ stammt, der sicherstellt, daß zunächst ein Gruppenmorphismus $G \longrightarrow \mathrm{H}_1(G)$ vorliegt, der dann über G^{ab} faktorisiert; cf. §2.3.3.

Halten wir dies fest.

Lemma. *Es ist* $\mathrm{H}_1 G \simeq G^{\mathrm{ab}}$.

Isomorphe Substitution führt den Transfermorphismus $\mathrm{H}_1(G) \xrightarrow{\mathrm{Tr}\downarrow_H^G} \mathrm{H}_1(H)$ in den Morphismus

$$\boxed{\begin{array}{rcl} G^{\mathrm{ab}} & \xrightarrow{\mathrm{Tr}\downarrow_H^G} & H^{\mathrm{ab}} \\ g' & \longmapsto & \prod_{g\in H\backslash G}(gg')\alpha \end{array}}$$

gleichen Namens über. In der Tat wird

$$g' \overset{\sim}{\longmapsto} [g']\otimes 1 \overset{\mathrm{Tr}\downarrow_H^G}{\longmapsto} \sum_{g\in H\backslash G} \underbrace{(\ \underbrace{g[g']}_{=\,g\otimes gg'}\ )\alpha}_{=\,1\otimes(gg')\alpha\,=\,[(gg')\alpha]} \otimes \underbrace{g\cdot 1}_{=\,1} \overset{\sim}{\longmapsto} \prod_{g\in H\backslash G}(gg')\alpha\,.$$

Wir erinnern daran, daß $RG \xrightarrow{\alpha} RH$ die RH-lineare Abbildung war, die die gewählten Repräsentanten der Rechtsnebenklassen von H in G auf 1 abbildet; cf. §2.5.3.

Die Maschinerie hat uns also einen Morphismus geliefert, dessen Abbildungsvorschrift man unter normalen Umständen nicht findet, deren Unabhängigkeit vom Repräsentantensystem $H\backslash G$ man auch nicht auf den ersten Blick erkennt.

Isomorphe Substitution führt ferner die kanonische Abbildung $\mathrm{H}_1(H) \xrightarrow{\mathrm{Can}\upharpoonleft_H^G} \mathrm{H}_1(G)$, die $\sum_{h\in H}[h] \otimes [h]v$ nach $\sum_{h\in H}[h] \otimes [h]v$ schickt, in die Abbildung $H^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\mathrm{Can}\upharpoonleft_H^G} G^{\mathrm{ab}}$, $h \longmapsto h$ über.

Der Satz des vorigen Abschnitts hat nun das

Korollar. *Es bildet die Komposition* $\left(G^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\mathrm{Tr}\downharpoonleft_H^G} H^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\mathrm{Can}\upharpoonleft_H^G} G^{\mathrm{ab}}\right)$ *ein Element* $g \in G$ *nach* $g^{[G:H]}$ *ab. Insbesondere, ist* G *abelsch, so ist* $H^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\mathrm{Can}\upharpoonleft_H^G} G^{\mathrm{ab}}$ *injektiv, und also* $g\,\mathrm{Tr}\downharpoonleft_H^G = g^{[G:H]}$ *für* $g \in G$.

2.5.5.2.3 Sparsame Berechnung des Transfers

Zur effizienten Berechnung des Transfers machen wir Gebrauch von der Wahlfreiheit des Repräsentantensystems $H\backslash G$, wobei natürlich α bezüglich dieses Repräsentantensystems zu bilden ist.

Sei $g \in G$. Sei $X \subseteq G$ so, daß $1 \in X$, und so, daß $G = \bigsqcup_{x\in X} \bigsqcup_{i\in[0,c_x-1]} Hxg^i$, wobei $c_x := \min\{i \geqslant 1 \ : \ Hxg^i = Hx\}$. Wähle entsprechend das Repräsentantensystem $\{xg^i \ : \ x \in X,\ i \in [0, c_x - 1]\}$ für $H\backslash G$. Beachte, daß $\sum_{x\in X} c_x = [G : H]$.

Lemma. *Es wird*

$$g\,\mathrm{Tr}\downharpoonleft_H^G \ = \ \prod_{x\in X} xg^{c_x}x^{-1} \ .$$

Hierbei ist $xg^{c_x}x^{-1} \in H$ *für* $x \in X$.

Beweis. Mit der zum gewählten Repräsentantensystem von $H\backslash G$ gehörigen Abbildung α ist $(xg^i \cdot g)\alpha$ gleich 1, falls $i \in [0, c_x - 2]$, und gleich $xg^{c_x}x^{-1}$, falls $i = c_x - 1$. Begründen wir letzteres. Es ist $xg^{c_x}x^{-1}$ in H, da $Hxg^{c_x} = Hx$ nach Definition von c_x. Also ist $xg^{c_x-1} \cdot g = (xg^{c_x}x^{-1})(xg^0)$ eine Zerlegung wie gewünscht in der Definition von α. □

Korollar (erneut). *Es bildet die Komposition* $\left(G^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\mathrm{Tr}\downharpoonleft_H^G} H^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\mathrm{Can}\upharpoonleft_H^G} G^{\mathrm{ab}}\right)$ *ein Element* $g \in G$ *nach* $g^{[G:H]}$ *ab.*

2.5.5.3 Eine Anwendung des Transfers auf den maximalen abelschen Quotienten

Die folgende Anwendung des Transfers ist, wie auch schon der Inhalt von §2.5.5.2.3, dem Skript [**21,** Ch. 7] entnommen.

Sei $p > 0$ prim. Sei $A := (\mathbf{Z}/p^1)^{r_1} \oplus (\mathbf{Z}/p^2)^{r_2} \oplus \cdots \oplus (\mathbf{Z}/p^\ell)^{r_\ell}$ für ein $\ell \geqslant 1$ und gewisse $r_i \geqslant 0$, additiv geschrieben. Eine abelsche p-Gruppe isomorph zu A heiße *vom Typ* $(r_1, \ldots, r_\ell)$.

Lemma. *Es ist*

$$|\mathrm{Aut}\, A| \ = \ p^e \cdot \left(\prod_{i\in[1,r_1]} (p^i - 1)\right) \cdot \left(\prod_{i\in[1,r_2]} (p^i - 1)\right) \cdots \left(\prod_{i\in[1,r_\ell]} (p^i - 1)\right) \ .$$

für ein $e \geqslant 0$.

Beweis. Der Endomorphismenring von A läßt sich wie folgt als Blockmatrix schreiben.

$$\operatorname{End} A \;=$$
$$\begin{bmatrix} (\mathbf{Z}/p^1\mathbf{Z})^{r_1\times r_1} & (p^1\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z})^{r_1\times r_2} & (p^2\mathbf{Z}/p^3\mathbf{Z})^{r_1\times r_3} & (p^3\mathbf{Z}/p^4\mathbf{Z})^{r_1\times r_4} & \cdots & (p^{\ell-1}\mathbf{Z}/p^\ell\mathbf{Z})^{r_1\times r_\ell} \\ (\mathbf{Z}/p^1\mathbf{Z})^{r_2\times r_1} & (\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z})^{r_2\times r_2} & (p^1\mathbf{Z}/p^3\mathbf{Z})^{r_2\times r_3} & (p^2\mathbf{Z}/p^4\mathbf{Z})^{r_2\times r_4} & \cdots & (p^{\ell-2}\mathbf{Z}/p^\ell\mathbf{Z})^{r_2\times r_\ell} \\ (\mathbf{Z}/p^1\mathbf{Z})^{r_3\times r_1} & (\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z})^{r_3\times r_2} & (\mathbf{Z}/p^3\mathbf{Z})^{r_3\times r_3} & (p^1\mathbf{Z}/p^4\mathbf{Z})^{r_3\times r_4} & \cdots & (p^{\ell-2}\mathbf{Z}/p^\ell\mathbf{Z})^{r_3\times r_\ell} \\ \vdots & & & & \cdots & \vdots \\ (\mathbf{Z}/p^1\mathbf{Z})^{r_\ell\times r_1} & (\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z})^{r_\ell\times r_2} & (\mathbf{Z}/p^3\mathbf{Z})^{r_\ell\times r_3} & (\mathbf{Z}/p^4\mathbf{Z})^{r_\ell\times r_4} & \cdots & (\mathbf{Z}/p^\ell\mathbf{Z})^{r_\ell\times r_\ell} \end{bmatrix} .$$

Wir behaupten, daß

$$\operatorname{Aut} A \;=$$
$$\begin{bmatrix} \mathrm{GL}_{r_1}(\mathbf{Z}/p^1\mathbf{Z}) & (p^1\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z})^{r_1\times r_2} & (p^2\mathbf{Z}/p^3\mathbf{Z})^{r_1\times r_3} & (p^3\mathbf{Z}/p^4\mathbf{Z})^{r_1\times r_4} & \cdots & (p^{\ell-1}\mathbf{Z}/p^\ell\mathbf{Z})^{r_1\times r_\ell} \\ (\mathbf{Z}/p^1\mathbf{Z})^{r_2\times r_1} & \mathrm{GL}_{r_2}(\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}) & (p^1\mathbf{Z}/p^3\mathbf{Z})^{r_2\times r_3} & (p^2\mathbf{Z}/p^4\mathbf{Z})^{r_2\times r_4} & \cdots & (p^{\ell-2}\mathbf{Z}/p^\ell\mathbf{Z})^{r_2\times r_\ell} \\ (\mathbf{Z}/p^1\mathbf{Z})^{r_3\times r_1} & (\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z})^{r_3\times r_2} & \mathrm{GL}_{r_3}(\mathbf{Z}/p^3\mathbf{Z}) & (p^1\mathbf{Z}/p^4\mathbf{Z})^{r_3\times r_4} & \cdots & (p^{\ell-3}\mathbf{Z}/p^\ell\mathbf{Z})^{r_3\times r_\ell} \\ \vdots & & & & \cdots & \vdots \\ (\mathbf{Z}/p^1\mathbf{Z})^{r_\ell\times r_1} & (\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z})^{r_\ell\times r_2} & (\mathbf{Z}/p^3\mathbf{Z})^{r_\ell\times r_3} & (\mathbf{Z}/p^4\mathbf{Z})^{r_\ell\times r_4} & \cdots & \mathrm{GL}_{r_\ell}(\mathbf{Z}/p^\ell\mathbf{Z}) \end{bmatrix} .$$

Dazu genügt es zu zeigen, daß ein Endomorphismus $A \xrightarrow{\varphi} A$ genau dann ein Automorphismus ist, wenn der induzierte Endomorphismus $A/pA \xrightarrow{\bar\varphi} A/pA$ ein Automorphismus ist. Hierfür wiederum genügt es zu zeigen, daß φ genau dann surjektiv ist, wenn $\bar\varphi$ surjektiv ist. Ist φ surjektiv, so auch $\bar\varphi$. Umgekehrt, sei $\bar\varphi$ surjektiv, i.e. sei $(A/A\varphi)/p(A/A\varphi) \simeq 0$. Dann aber ist $A/A\varphi \simeq 0$, wie man erkennt, wenn man $A/A\varphi$ als direkte Summe zyklischer p-Gruppen schreibt.

Mit dieser Beschreibung von $\operatorname{Aut} A$ an der Hand genügt es nun anzumerken, daß für $r \geqslant 0$ und $i \geqslant 1$ der Morphismus $\mathrm{GL}_r(\mathbf{Z}/p^i) \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbf{F}_p)$ surjektiv ist, wie man durch eintragsweise Wahl beliebiger Urbilder, durch Betrachtung der Determinante und Verwendung der Cramerschen Regel erkennt. Denn der Kern dieses Morphismus ist die p-Gruppe $\mathrm{E}_r + (p\mathbf{Z}/p^i\mathbf{Z})^{r\times r} \leqslant \mathrm{GL}_r(\mathbf{Z}/p^i\mathbf{Z})$. ▫

Sei G eine Gruppe endlicher Ordnung. Sei p ein Primteiler von $|G|$, zu welchem eine abelsche p-Sylowgruppe H von G gehört.

Bezeichne $N := \mathrm{N}_G(H) = \{g \in G \;:\; H^g = H\}$ den *Normalisator* von H in G. Bezeichne $\mathrm{C}_G(h) := \{g \in G \;:\; h^g = h\}$ den *Zentralisator* eines Elements $h \in H$ in G.

Lemma. *Sei $h \in H$. Es ist $\{g \in G \;:\; h^g \in H\} \subseteq \mathrm{C}_G(h) \cdot N$.*

Beweis. Sei $g \in G$ so, daß $h^g \in H$. Da H abelsch ist, ist $H \leqslant \mathrm{C}_G(h)$, und auch $H \leqslant \mathrm{C}_G(h^g) = \mathrm{C}_G(h)^g$, d.h. ${}^gH \leqslant \mathrm{C}_G(h)$. Da H und ${}^gH$ p-Sylowgruppen von $\mathrm{C}_G(h)$ sind, gibt es ein $c \in \mathrm{C}_G(H)$ mit ${}^gH = {}^cH$. Damit ist $g = c(c^{-1}g) \in \mathrm{C}_G(h) \cdot N$. ▫

Lemma. *Das Bild des Transfermorphismus $\mathrm{Tr}\rfloor_H^G : G^{\mathrm{ab}} \longrightarrow H^{\mathrm{ab}} = H$ ist gleich $H \cap \mathrm{Z}(N)$.*

Beweis.

(I) Wir behaupten, daß das Bild des Transfermorphismus in $H \cap \mathrm{Z}(N)$ enthalten ist. Dazu müssen wir zeigen, daß ${}^n\!(g \operatorname{Tr}\downarrow_H^G) = g \operatorname{Tr}\downarrow_H^G$ für $g \in G$ und $n \in N$. Nun ist $G \longrightarrow G$, $g \longmapsto {}^n g$, ein Isomorphismus von G nach G, der H nach H abbildet.

Sei allgemeiner ein Isomorphismus $G \xrightarrow[\sim]{\varphi} \bar{G}$ von Gruppen gegeben. Sei $\bar{H}$ das Bild einer Untergruppe $H \leqslant G$ unter φ. Dann ist $(\operatorname{Tr}\downarrow_H^G)(\varphi|_H)^{\mathrm{ab}} = (\varphi^{\mathrm{ab}})(\operatorname{Tr}\downarrow_{\bar{H}}^{\bar{G}})$, da für einen Repräsentanten $g \in G$ eines Elementes in G^{ab} gilt, daß

$$\begin{array}{rcl} g(\operatorname{Tr}\downarrow_H^G)(\varphi|_H)^{\mathrm{ab}} & = & \prod_{\tilde{g} \in H\backslash G} (\tilde{g} g)\alpha\varphi \\ & = & \prod_{\tilde{g} \in H\backslash G} ((\tilde{g}\varphi)(g\varphi))\varphi^{-1}\alpha\varphi \\ & \overset{\hat{g} = \tilde{g}\varphi}{=} & \prod_{\hat{g} \in \bar{H}\backslash\bar{G}} (\hat{g}(g\varphi))\varphi^{-1}\alpha\varphi \\ & = & g(\varphi^{\mathrm{ab}})(\operatorname{Tr}\downarrow_{\bar{H}}^{\bar{G}})\ , \end{array}$$

da $\varphi^{-1}\alpha\varphi$ die zu dem Repräsentantensystem $\bar{H}\backslash\bar{G}$, welches aus dem Repräsentantensystem $H\backslash G$ via φ hervorgeht, gehörige Abbildung ist, weil für $\bar{g} \in \bar{G}$ die Zerlegung $\bar{g}\varphi^{-1} = (\bar{g}\varphi^{-1}\alpha)\tilde{g}$ mit einem Repräsentanten $\tilde{g}$ aus $H\backslash G$ für eine Zerlegung $\bar{g} = (\bar{g}\varphi^{-1}\alpha\varphi)(\tilde{g}\varphi)$ mit $\bar{g}\varphi^{-1}\alpha\varphi \in \bar{H}$ verwandt werden kann.

Zurück zu unserer Situation. Anwendung auf $\varphi : g \longmapsto {}^n g$ gibt nun

$$ {}^n\!(g \operatorname{Tr}\downarrow_H^G) \;=\; g(\operatorname{Tr}\downarrow_H^G)(\varphi|_H) \;=\; g\varphi^{\mathrm{ab}} \operatorname{Tr}\downarrow_H^G \;=\; ({}^n g) \operatorname{Tr}\downarrow_H^G \;=\; g \operatorname{Tr}\downarrow_H^G $$

für $g \in G$, da g und ${}^n g$ dasselbe Element in G^{ab} repräsentieren.

(II) Wir behaupten, daß $H \cap \mathrm{Z}(N)$ im Bild des Transfermorphismus enthalten ist. Da $[G : H]$ teilerfremd zur Ordnung von $H \cap \mathrm{Z}(N)$ ist, genügt es dazu zu zeigen, daß $\operatorname{Tr}\downarrow_H^G$ ein Element h von $H \cap \mathrm{Z}(N)$ nach $h^{[G:H]}$ abbildet.

Sei $m \in \mathbf{Z}$ so, daß $m[N : H] \equiv_{|H|} 1$. Wir haben einen Gruppenmorphismus

$$\begin{array}{rcl} H & \xrightarrow{\gamma} & H \cap \mathrm{Z}(N) \\ h & \longmapsto & \left(\prod_{n \in N/H} {}^n h\right)^m \ . \end{array}$$

Dieser ist wegen H abelsch unabhängig von der Wahl eines Repräsentantensystems N/H. Da Multiplikation mit einem Element aus N ein Repräsentantensystem in ein ebensolches überführt, ist das Bild von γ in der Tat auch in $\mathrm{Z}(N)$ enthalten. Es ist $h\gamma = (h^n)\gamma$ für $h \in H$ und $n \in N$. Schließlich ist $h\gamma = h$ für $h \in H \cap \mathrm{Z}(N)$.

Es ist für $h \in H$ nach dem Lemma des vorigen Abschnitts in den dortigen Bezeichnungen

$$ h \operatorname{Tr}\downarrow_H^G \;=\; \prod_{x \in X} x h^{c_x} x^{-1}\ , $$

wobei $x h^{c_x} x^{-1} \in H$ stets. Nach vorigem Lemma läßt sich für jedes solche $x \in X$ eine Darstellung $x^{-1} = a_x n_x$ finden mit $a_x \in \mathrm{C}_G(h)$ und $n_x \in N$. Also wird

$$ h \operatorname{Tr}\downarrow_H^G \;=\; \prod_{x \in X} n_x^{-1} h^{c_x} n_x\ , $$

und es folgt

$$h \operatorname{Tr}\rfloor_H^G \gamma \; = \; (h\gamma)^{[G:H]} \; .$$

Ist nun sogar $h \in H \cap \mathrm{Z}(N)$, so wird

$$h \operatorname{Tr}\rfloor_H^G \; = \; h \operatorname{Tr}\rfloor_H^G \gamma \; = \; (h\gamma)^{[G:H]} \; = \; h^{[G:H]} \; .$$

□

Satz. *Wir erinnern daran, daß p ein Primteiler von $|G|$ ist, daß H eine abelsche p-Sylowgruppe von G ist und daß $N = \mathrm{N}_G(H)$. Es besitze darüberhinaus G keinen Normalteiler von Index p. Dann gelten* (1) *und* (2).

(1) *Es ist* $H \cap \mathrm{Z}(N) \; = \; 1$.

(2) *Sei H vom Typ $(r_1, \ldots, r_\ell)$. Sei $r := \max_{i\in[1,\ell]} r_\ell$ die* Breite *von H. Es ist*

$$\mathrm{ggT}\left([N:H], \prod_{i\in[1,r]} (p^i - 1) \right) \; \neq \; 1 \; .$$

Beweis. Wir haben nach vorangehendem Lemma einen surjektiven Morphismus $G \longrightarrow G^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\operatorname{Tr}\rfloor_H^G} H \cap \mathrm{Z}(N)$. Wäre $H \cap \mathrm{Z}(N) \neq 1$, so hätte $H \cap \mathrm{Z}(N)$ und somit auch G einen Quotienten der Ordnung p, was unserer Voraussetzung an G widerspricht.

Es operiert N auf H durch Konjugation. Der Normalteiler H von N operiert hierbei trivial. Dies gibt einen Morphismus $N/H \longrightarrow \operatorname{Aut} H$. Sein Bild ist nicht gleich 1, da sonst H in $H \cap \mathrm{Z}(N)$ läge, was eben ausgeschlossen wurde. Die Ordnung dieses Bildes teilt $[N:H]$ und

$$|\operatorname{Aut} H| \; = \; p^e \cdot \left(\prod_{i\in[1,r_1]} (p^i - 1) \right) \cdot \left(\prod_{i\in[1,r_2]} (p^i - 1) \right) \cdots \left(\prod_{i\in[1,r_\ell]} (p^i - 1) \right) \; ,$$

wobei $e \geqslant 0$. Da nun p kein Teiler von $[N:H]$ ist, ist der angeführte ggT ungleich 1. □

Korollar. *Es gelte die Situation des Satzes. Ist $|H| = p^a$ für ein $a \geqslant 1$, so ist* $\mathrm{ggT}\Big([N:H], \prod_{i\in[1,a]} (p^i - 1) \Big) \; \neq \; 1$.

Beweis. Die Breite von H ist höchstenfalls gleich a. □

Korollar. *Es gelte die Situation des Satzes. Die Anzahl $[G:N]$ der p-Sylowgruppen in G ist ein echter Teiler von $[G:H]$.*

Beweis. Wäre $[G:N] = [G:H]$, so wäre $N = H$, was sowohl (1) als auch (2) widerspricht. □

Beispiel. Sei G eine einfache nichtabelsche endliche Gruppe. Sei p ein Primteiler von $|G|$, zu welchem eine abelsche p-Sylowgruppe H von G gehört.

(1) Ist $p = 2$, so hat H wenigstens Breite 2. Insbesondere gibt es keine einfache nichtabelsche Gruppe mit einer zyklischen 2-Sylowgruppe. So z.B. können die 2-Sylowgruppen der alternierenden Gruppe $\mathcal{A}_5$ nicht zu C_4 isomorph sein.

(2) Ist $p = 2$, und hat H die Breite 2, so ist 3 ein Teiler von $[N : H]$ und also auch von $|G|$. Insbesondere hat jede einfache nichtabelsche Gruppe, deren Ordnung nicht durch 3 geteilt wird, und die eine abelsche 2-Sylowgruppe besitzt, eine solche von Breite $\geqslant 3$.

(3) Sei $p = 2$. Ist $|H| = 8$, so ist $H \simeq C_2 \times C_2 \times C_2$ und ($[N : H] \equiv_3 0$ oder $[N : H] \equiv_7 0$).

(4) Sei $p = 2$. Ist $|H| = 16$, so tritt einer der folgenden Fälle ein.

- Es ist $H \simeq C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$. Diesenfalls ist $[N : H] \equiv_3 0$, $[N : H] \equiv_5 0$ oder $[N : H] \equiv_7 0$.
- Es ist $H \simeq C_4 \times C_2 \times C_2$. Diesenfalls ist $[N : H] \equiv_3 0$.
- Es ist $H \simeq C_4 \times C_4$. Diesenfalls ist $[N : H] \equiv_3 0$.

(5) Sei $p = 3$. Ist $|H| \in \{3,\, 9\}$, so ist $[N : H] \equiv_2 0$. Insbesondere ist die Anzahl $[G : N]$ der 3-Sylowgruppen ein Teiler von $[G : H]/2$. Ist $|H| = 27$, so ist $[N : H] \equiv_2 0$ oder $[N : H] \equiv_{13} 0$. Insbesondere ist die Anzahl $[G : N]$ der 3-Sylowgruppen ein Teiler von $[G : H]/2$ oder von $[G : H]/13$. (Hierbei teile keine ganze Zahl eine echt gebrochene.)

Beispiel. Sei G eine einfache Gruppe von Ordnung 60. Sei H eine 2-Sylowgruppe von G. Es ist H von Ordnung 4, also abelsch (und also isomorph zu $C_2 \times C_2$). Die Ordnung $|N|$ ihres Normalisators N ist in $\{4, 12, 20, 60\}$. Wir können $|N| = 60$ ausschließen, da G einfach ist. Mit dem zweiten Korollar können wir $|N| = 4$ ausschließen. Aus $|N| = 20$ folgte ein nichttrivialer, und also wegen der Einfachheit von G injektiver Morphismus von G nach $\mathcal{S}_3$ vermittels der transitiven Operation von G auf G/N. Dies ist ebenfalls unmöglich. Also muß $|N| = 12$ sein. Hier erhalten wir einen injektiven Morphismus $G \longrightarrow \mathcal{S}_5$. Da sein Bild B von Index 2 in $\mathcal{S}_5$ ist, ist es ein Normalteiler in $\mathcal{S}_5$. Folglich ist es gleich $\mathcal{A}_5$, denn ansonsten wäre $B \cap \mathcal{A}_5$ ein Normalteiler von Index 2 in B. Insgesamt ist also $G \simeq \mathcal{A}_5$.

Beispiel. Wir wollen zeigen, daß es keine einfache Gruppe von Ordnung 132 gibt. Sei eine solche Gruppe G als existent angenommen. Sei H eine 11-Sylowgruppe von G. Sei N ihr Normalisator in G. Da die Anzahl der 11-Sylowgruppen $[G : N] \equiv_{11} 1$ ist und zugleich 12 teilt, ist $[G : N] \in \{1,\, 12\}$. Da G einfach ist, ist H kein Normalteiler in G, und folglich $[G : N] \neq 1$. Da G einfach und H abelsch ist, ist nach dem zweiten Korollar $[G : N] < 12$. Wir haben einen Widerspruch.

2.5.6 Mackey

Wir folgen [**3,** Chap. 3].

Sei R ein kommutativer Ring. Sei G eine Gruppe. Seien $H,\, K \leqslant G$ Untergruppen von endlichem Index, i.e. $[G : H] < \infty$ und $[G : K] < \infty$. Beachte, daß dann $H \cap {}^g\!K$ von endlichem Index in H und in ${}^g\!K$ ist für $g \in G$.

Sei M ein RK-Modul. Für $g \in G$ schreiben wir ${}^gM$ für den $R\,{}^gK$-Modul, der M als unterliegenden R-Modul besitzt, und für den ${}^gk \cdot m := km$ definiert ist für $k \in K$. Dies definiert eine Äquivalenz $RK\text{-Mod} \xrightarrow[\sim]{{}^g(-)} R\,{}^gK\text{-Mod}$ und somit auch einen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} {}_{RK}(M,N) & \xrightarrow{\sim} & {}_{R\,{}^gK}({}^gM,\, {}^gN) \\ \varphi & \longmapsto & {}^g\varphi \,:\, m \longmapsto m\varphi \end{array}$$

für RK-Moduln M und N.

Sind insbesondere M und N zwei RG-Moduln, so haben wir einen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} {}^g(M\downharpoonright^G_K) & \xrightarrow{\sim} & M\downharpoonright^G_{{}^gK} \\ m & \longmapsto & gm \end{array}$$

von ${}^gK$-Moduln für $g \in G$; genauso für N. Identifizieren wir entlang dieser Isomorphismen, so erhalten wir einen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} {}_{RK}(M\downharpoonright^G_K, N\downharpoonright^G_K) & \xrightarrow[\sim]{{}^g(-)} & {}_{R\,{}^gK}(M\downharpoonright^G_{{}^gK}, N\downharpoonright^G_{{}^gK}) \\ \varphi & \longmapsto & {}^g\varphi \,:\, m \longmapsto g((g^{-1}m)\varphi)\ . \end{array}$$

Variieren wir M und N, liefert dies eine Transformation von Funktoren $(RG\text{-Mod})^\circ \times RG\text{-Mod} \rightrightarrows R\text{-Mod}$.

Es ist ${}^{\tilde{g}g}\varphi = {}^{\tilde{g}}({}^g\varphi)$ für φ wie eben und $g,\, \tilde{g} \in G$.

Wählen wir eine projektive Auflösung P von M über RG, so ist dies auch eine projektive Auflösung von $M\downharpoonright^G_K$ über RK, und wir können

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Ext}^n_{RK}(M\downharpoonright^G_K, N\downharpoonright^G_K) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^n({}_{RK}(P\downharpoonright^G_K, N\downharpoonright^G_K)) & \xrightarrow[\sim]{{}^g(-)} & \mathrm{H}^n({}_{R\,{}^gK}(P\downharpoonright^G_{{}^gK}, N\downharpoonright^G_{{}^gK})) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}^n_{R\,{}^gK}(M\downharpoonright^G_{{}^gK}, N\downharpoonright^G_{{}^gK}) \\ \varphi & & & \longmapsto & & & {}^g\varphi \end{array}$$

setzen, wobei $n \geqslant 0$. Dies ist unabhängig von der Wahl der projektiven Auflösung P. Desweiteren ist ${}^{\tilde{g}g}\zeta = {}^{\tilde{g}}({}^g\zeta)$ für ζ wie eben und $g,\, \tilde{g} \in G$. Ferner ist ${}^k\varphi = \varphi$ für $k \in K$.

Wir bezeichnen mit ${}_H\backslash G/_K$ wahlweise die Menge der H-K-Doppelnebenklassen in G, oder aber ein Repräsentantensystem für diese. In anderen Worten, $\bigsqcup_{g \in H\backslash G/K} HgK = G$. Beachte, daß $HgK = \bigsqcup_{h \in H/({}^gK \cap H)} hgK$ für $g \in G$, da $hgK = \tilde{h}gK$ für $h,\, \tilde{h} \in H$ genau dann gilt, wenn $h({}^gK \cap H) = \tilde{h}({}^gK \cap H)$ ist.

Lemma. *Seien M und N zwei RG-Moduln. Sei $\varphi \in {}_{RK}(M\downharpoonright^G_K, N\downharpoonright^G_K)$. Es wird*

$$\varphi \,\mathrm{Tr}\upharpoonleft^G_K \mathrm{Res}\downharpoonright^G_H \;=\; \sum_{g \in H\backslash G/K} ({}^g\varphi)\,\mathrm{Res}\downharpoonright^{{}^gK}_{{}^gK \cap H} \mathrm{Tr}\upharpoonleft^H_{{}^gK \cap H} \;\in\; {}_{RH}(M\downharpoonright^G_H, N\downharpoonright^G_H)\ .$$

Beweis. Für $m \in M\downharpoonleft^G_H$ wird

$$
\begin{array}{rcl}
m(\varphi \operatorname{Tr}\upharpoonleft^G_K \operatorname{Res}\downharpoonleft^G_H) & = & \sum_{x\in K\backslash G} x^{-1}((xm)\varphi) \\
& = & \sum_{x\in G/K} x((x^{-1}m)\varphi) \\
& \overset{x\,=\,hg}{=} & \sum_{g\in H\backslash G/K} \sum_{h\in H/({}^gK\cap H)} hg((g^{-1}h^{-1}m)\varphi) \\
& = & \sum_{g\in H\backslash G/K} \sum_{h\in H/({}^gK\cap H)} h((h^{-1}m)\,{}^g\varphi) \\
& = & \sum_{g\in H\backslash G/K} m\left(({}^g\varphi) \operatorname{Res}\downharpoonleft^K_{{}^gK\cap H} \operatorname{Tr}\upharpoonleft^H_{{}^gK\cap H}\right) .
\end{array}
$$

□

Lemma. *Seien M und N zwei RG-Moduln. Sei $n \geqslant 0$. Sei $\zeta \in \operatorname{Ext}^n_{RK}(M\downharpoonleft^G_K, N\downharpoonleft^G_K)$. Es wird*

$$\zeta \operatorname{Tr}\upharpoonleft^G_K \operatorname{Res}\downharpoonleft^G_H \;=\; \sum_{g\in H\backslash G/K} ({}^g\zeta) \operatorname{Res}\downharpoonleft^{{}^gK}_{{}^gK\cap H} \operatorname{Tr}\upharpoonleft^H_{{}^gK\cap H} \;\in\; \operatorname{Ext}^n_{RH}(M\downharpoonleft^G_H, N\downharpoonleft^G_H) .$$

Beweis. Sei P eine projektive Auflösung von M über RG. Sei, unter Mißbrauch der Bezeichnung, $\zeta \in {}_{RK}(P_n\downharpoonleft^G_K, N\downharpoonleft^G_K)$ ein repräsentierender Zykel. Einen repräsentierenden Zykel in ${}_{RH}(P_n\downharpoonleft^G_H, N\downharpoonleft^G_H)$ des Bildes seiner Cohomologieklasse unter $\operatorname{Tr}\upharpoonleft^G_K \operatorname{Res}\downharpoonleft^G_H$ können wir gemäß vorigem Lemma als $\sum_{g\in H\backslash G/K} ({}^g\zeta) \operatorname{Res}\downharpoonleft^{{}^gK}_{{}^gK\cap H} \operatorname{Tr}\upharpoonleft^H_{{}^gK\cap H}$ erhalten. □

Seien M und N zwei RG-Moduln. Sei $n \geqslant 0$. Ein Element ζ von $\operatorname{Ext}^n_{RH}(M\downharpoonleft^G_H, N\downharpoonleft^G_H)$ heiße *invariant unter G,* falls

$$(\zeta) \operatorname{Res}\downharpoonleft^H_{{}^gH\cap H} \;=\; ({}^g\zeta) \operatorname{Res}\downharpoonleft^{{}^gH}_{{}^gH\cap H}$$

für alle $g \in G$. Der R-Teilmodul in $\operatorname{Ext}^n_{RH}(M\downharpoonleft^G_H, N\downharpoonleft^G_H)$ der G-invarianten Elemente werde mit $\operatorname{Ext}^n_{RH}(M\downharpoonleft^G_H, N\downharpoonleft^G_H)^G$ bezeichnet.

Für den Fall, daß H ein Normalteiler in G ist, ist ζ also genau dann invariant unter G, wenn ${}^g\zeta = \zeta$ für alle $g \in G$.

Satz. *Seien M und N zwei RG-Moduln. Sei $n \geqslant 0$. Sei $[G:H]$ als invertierbar in R vorausgesetzt. Es ist*

$$\operatorname{Ext}^n_{RG}(M,N) \xrightarrow[\sim]{\operatorname{Res}\downharpoonleft^G_H} \operatorname{Ext}^n_{RH}(M\downharpoonleft^G_H, N\downharpoonleft^G_H)^G .$$

Beweis. Nach dem ersten Korollar aus §2.5.4 bildet die betrachtete Restriktionsabbildung injektiv nach $\operatorname{Ext}^n_{RH}(M\downharpoonleft^G_H, N\downharpoonleft^G_H)$ ab. Wir müssen noch zeigen, daß sie nach $\operatorname{Ext}^n_{RH}(M\downharpoonleft^G_H, N\downharpoonleft^G_H)^G$ abbildet und daß sie dorthin auch surjektiv abbildet.

Zeigen wir zunächst, daß für $\zeta \in \operatorname{Ext}^n_{RG}(M,N)$ die Restriktion $\zeta \operatorname{Res}\downharpoonleft^G_H$ invariant unter G ist. Sei P eine projektive Auflösung von M über RG, und, unter Mißbrauch der Bezeichnung, $\zeta \in {}_{RG}(P_n, N)$ ein repräsentierender Zykel. Das Bild seiner Cohomologieklasse wird durch $\zeta \operatorname{Res}\downharpoonleft^G_H \in {}_{RH}(P_n\downharpoonleft^G_H, N\downharpoonleft^G_H)$ repräsentiert. Sei $g \in G$. Wir zeigen, daß sogar ${}^g(\zeta \operatorname{Res}\downharpoonleft^G_H) \operatorname{Res}\downharpoonleft^{{}^gH}_{{}^gH\cap H} = \zeta \operatorname{Res}\downharpoonleft^G_H \operatorname{Res}\downharpoonleft^{{}^gH}_{{}^gH\cap H}$ in ${}_{R({}^gH\cap H)}(P_n\downharpoonleft^G_{{}^gH\cap H}, N\downharpoonleft^G_{{}^gH\cap H})$ gilt, und daher auch die Gleichheit der repräsentierten Cohomologieklassen. Sei $x \in P_n$. Dann ist $x\,{}^{g}\!(\zeta \operatorname{Res}\downarrow^G_H) = g((g^{-1}x)\zeta) = gg^{-1}(x\zeta) = x\zeta = x(\zeta \operatorname{Res}\downarrow^G_H)$, wenn wir uns wieder daran erinnern, daß ζ selbst RG-linear ist.

Sei nun umgekehrt $\xi \in \operatorname{Ext}^n_{RH}(M\downarrow^G_H, N\downarrow^G_H)^G$ gegeben.

Bezeichne $[HgH : H]$ die Anzahl der H-Linksnebenklassen in HgH für $g \in G$. Beachte, daß $[HgH : H] = [H : H \cap {}^gH]$, da $HgH = \bigsqcup_{h \in H/({}^gH \cap H)} hgH$.

Mit vorigem Lemma und unter Verwendung des Satzes aus §2.5.4 wird

$$\begin{array}{rcl} \xi \operatorname{Tr}\uparrow^G_H \operatorname{Res}\downarrow^G_H & = & \sum_{g \in H\backslash G/H} ({}^g\xi) \operatorname{Res}\downarrow^{{}^gH}_{{}^gH \cap H} \operatorname{Tr}\uparrow^H_{{}^gH \cap H} \\ & = & \sum_{g \in H\backslash G/H} \xi \operatorname{Res}\downarrow^H_{{}^gH \cap H} \operatorname{Tr}\uparrow^H_{{}^gH \cap H} \\ & = & \left(\sum_{g \in H\backslash G/H} [H : H \cap {}^gH]\right) \xi \\ & = & \left(\sum_{g \in H\backslash G/H} [HgH : H]\right) \xi \\ & = & [G : H]\xi \end{array}$$

Also wird $[G : H]^{-1}\xi \operatorname{Tr}\uparrow^G_H$ unter $\operatorname{Res}\downarrow^G_H$ auf ξ abgebildet. $\square$

Korollar. *Sei $n \geqslant 1$. Sei $|G|$ endlich. Sei p ein Primteiler von $|G|$. Sei P eine p-Sylowgruppe von G. Sei $[G : P]$ invertierbar in R. Sei ${}^gP \cap P = 1$ für $g \in G \smallsetminus \mathrm{N}_G(P)$. Seien M und N zwei RG-Moduln derart, daß $M\downarrow^G_1$ projektiv oder $N\downarrow^G_1$ injektiv über R ist.*

Unter diesen Voraussetzungen ist

$$\operatorname{Ext}^n_{RG}(M, N) \xrightarrow[\sim]{\operatorname{Res}\downarrow^G_{\mathrm{N}_G(P)}} \operatorname{Ext}^n_{R\mathrm{N}_G(P)}(M\downarrow^G_{\mathrm{N}_G(P)}, N\downarrow^G_{\mathrm{N}_G(P)}) \xrightarrow[\sim]{\operatorname{Res}\downarrow^{\mathrm{N}_G(P)}_P} \operatorname{Ext}^n_{RP}(M\downarrow^G_P, N\downarrow^G_P)^{\mathrm{N}_G(P)} .$$

Ferner ist $([G : \mathrm{N}_G(P)] - 1) \operatorname{Ext}^n_{RG}(M, N) = 0$.

Beachte, daß gemäß Sylow $[G : \mathrm{N}_G(P)] - 1 \equiv_p 0$ ist. Ist also e.g. $R = \mathbf{F}_p$, so ist die Annullationsaussage leer.

Beweis. Mit vorstehendem Satz bleiben die Surjektivität von $\operatorname{Res}\downarrow^G_{\mathrm{N}_G(P)}$ und die Annullation $([G : \mathrm{N}_G(P)] - 1) \operatorname{Ext}^n_{RG}(M, N) = 0$ zu zeigen.

Schreibe $H := \mathrm{N}_G(P)$. Für $g \in G \smallsetminus H$ ist ${}^gP \cap H = 1$. Denn wäre $x \in {}^gP \cap H$ und $x \neq 1$, so hätte x eine Ordnung p^a mit $a \geqslant 1$. Ferner wäre $x \notin P$, da sonst $x \in {}^gP \cap P = 1$. Daher wäre die Restklasse von x in H/P ungleich 1, so daß dies, da $|H/P|$ zu p teilerfremd ist, auch für die Restklasse von $x^{p^a} = 1$ gölte. Dies ist ein Widerspruch.

Für $\xi \in \operatorname{Ext}^n_{RP}(M\downarrow^G_P, N\downarrow^G_P)$ wird unter Verwendung von $1 \in G$ als Doppelnebenklassenrepräsentanten

$$\begin{array}{rcl} \xi \operatorname{Tr}\uparrow^G_P \operatorname{Res}\downarrow^G_H & = & \displaystyle\sum_{g \in H\backslash G/P} ({}^g\xi) \operatorname{Res}\downarrow^{{}^gP}_{{}^gP \cap H} \operatorname{Tr}\uparrow^H_{{}^gP \cap H} \\ & = & \xi \operatorname{Tr}\uparrow^H_P + \displaystyle\sum_{g \in H\backslash G/P\,,\, g \notin H} \underbrace{({}^g\xi) \operatorname{Res}\downarrow^{{}^gP}_1}_{=0} \operatorname{Tr}\uparrow^H_1 , \end{array}$$

und es ist folglich $\operatorname{Tr}\upharpoonright_P^G \operatorname{Res}\downharpoonright_H^G = \operatorname{Tr}\upharpoonright_P^H$. Mit dem Satz aus §2.5.4 ist $\operatorname{Tr}\upharpoonright_P^H$ surjektiv, und also auch $\operatorname{Res}\downharpoonright_H^G$.

Ferner erhalten wir unter Verwendung der Aufgabe 44 und des Satzes aus §2.5.4 das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ext}^n_{RG}(M,N) \arrow[r, "\operatorname{Res}\downharpoonright_H^G"] \arrow[rr, bend left, "{[G:H]}"] & \operatorname{Ext}^n_{RH}(M\downharpoonright_H^G, N\downharpoonright_H^G) \arrow[r, "\operatorname{Tr}\upharpoonright_H^G"] & \operatorname{Ext}^n_{RG}(M,N) \\
\operatorname{Ext}^n_{RP}(M\downharpoonright_P^G, N\downharpoonright_P^G) \arrow[u, "\operatorname{Tr}\upharpoonright_P^G"] \arrow[ur, "\operatorname{Tr}\upharpoonright_P^H"] \arrow[urr, "\operatorname{Tr}\upharpoonright_P^G"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ebenfalls dank loc. cit. ist $\operatorname{Tr}\upharpoonright_P^G$ epimorph, so daß es in $\operatorname{Tr}\upharpoonright_P^G [G:H] = \operatorname{Tr}\upharpoonright_P^G$ gekürzt werden kann, und wir $([G:H]-1)\operatorname{Ext}^n_{RG}(M,N) = 0$ erhalten. ▫

Kapitel 3

H^1 und H^2

3.1 H^1

3.1.1 Multiplikative Notation

Sei G eine Gruppe. Sei M ein $\mathbf{Z}G$-Modul. Wir schreiben M multiplikativ. D.h. das neutrale Element wird $1 \in M$ geschrieben; die vormalige Summe von Elementen $m,\, m' \in M$ wird als Produkt $m \cdot m' = mm'$ geschrieben; das Resultat der Operation eines Elementes $g \in G$ auf einem Element $m \in M$ als ${}^{g}m$. Dann ist $m\tilde{m} = \tilde{m}m$, ${}^{g}(m\tilde{m}) = {}^{g}m\,{}^{g}\tilde{m}$, ${}^{1}m = m$ und ${}^{\tilde{g}g}m = {}^{\tilde{g}}({}^{g}m)$ für $g,\, \tilde{g} \in G$ und $m,\, \tilde{m} \in M$.

Dies hat seinen Sinn darin, daß in der Gruppentheorie Gruppen in der Regel multiplikativ geschrieben werden. Würden wir auf additive Schreibweise in M bestehen, wäre im Verlauf der folgenden Überlegungen M als Untergruppe (bis auf Identifikation) der multiplikativ geschriebenen Gruppe $M \rtimes G$ additiv zu schreiben, was ungewöhnlich aussähe.

In dieser geänderten Schreibweise werden

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Z}^1(G,M) & := & \mathrm{Z}^1\left({}_{\mathbf{Z}G}(\mathrm{Bar}_{G;\mathbf{Z}}, M)\right) \\
& = & \{G \xrightarrow{\partial} M,\ g \longmapsto g\partial \ :\ (gh)\partial = (g\partial)\cdot {}^{g}(h\partial) \text{ für } g,\, h \in G\} \\
\mathrm{B}^1(G,M) & := & \mathrm{B}^1\left({}_{\mathbf{Z}G}(\mathrm{Bar}_{G;\mathbf{Z}}, M)\right) \\
& = & \{G \xrightarrow{\partial_m} M,\ g \longmapsto g\partial_m := {}^{g}m \cdot m^- \ :\ m \in M\} \\
\mathrm{H}^1(G,M) & = & \mathrm{Z}^1(G,M)/\mathrm{B}^1(G,M)\ ;
\end{array}$$

vgl. Beispiel (2) aus §2.3.2. Hierbei ist die $\mathbf{Z}$-Modul-Struktur auf $\mathrm{Z}^1(G,M)$ gegeben durch $g(\partial \cdot \tilde{\partial}) = g\partial \cdot g\tilde{\partial}$ für $g \in G$ und $\partial,\, \tilde{\partial} \in \mathrm{Z}^1(G,M)$; sie wird also ebenfalls multiplikativ notiert.

Für eine Derivation $\partial \in \mathrm{Z}^1(G,M)$ und ein $g \in G$ gelten noch folgende Regeln.

$$\begin{array}{rcl}
1\partial & = & 1 \\
(g^-)\partial & = & \left({}^{g^-}(g\partial)\right)^-
\end{array}$$

Ersteres erkennt man bei Betrachtung von $(1 \cdot 1)\partial$. Zweiteres erkennt man bei Betrachtung von $(g^- g)\partial$.

Wie schon erwähnt, heißen Elemente aus $\mathrm{Z}^1(G, M)$ auch 1-Cozyklen oder Derivationen. Elemente in $\mathrm{B}^1(G, M)$ werden als 1-Coränder oder innere Derivationen bezeichnet. Wir werden in $\mathrm{H}^1(G, M)$ ohne weiteren Kommentar mit repräsentierenden Derivationen arbeiten.

3.1.2 Komplemente

Sei G eine Gruppe. Sei M ein multiplikativ notierter $\mathbf{Z}G$-Modul. Wir bilden das semidirekte Produkt $M \rtimes G$, welches durch die Menge $M \times G$ mit der Multiplikation

$$(m, g)(\tilde{m}, \tilde{g}) \;:=\; (m\, {}^{g}\tilde{m}, g\tilde{g})$$

für $m, \tilde{m} \in M$ und $g, \tilde{g} \in G$ gegeben ist. Es ist $M \rtimes G$ eine Gruppe, in welcher das Einselement durch $1 := (1, 1)$, und die Inversion durch $(m, g)^- = (({}^{g^-}m)^-, g^-)$ gegeben ist.

Wir betrachten M via $m \longmapsto (m, 1)$ als Normalteiler von $M \rtimes G$, und G via $g \longmapsto (1, g)$ als Untergruppe von $M \rtimes G$.

> Wir beschränken uns also auf semidirekte Produkte bezüglich eines abelschen Normalteilers.

Sei $\mathcal{K} := \{K \leqslant M \rtimes G \;:\; M \cap K = 1,\; MK = M \rtimes G\}$ die Menge der *Komplemente* von M in $M \rtimes G$. Es ist e.g. $G \in \mathcal{K}$.

> Jedes Komplement K ist *isomorph* zu $(M \rtimes G)/M \simeq G$ via $k \longmapsto kM$. Nicht notwendig aber *konjugiert* zu G in $M \rtimes G$, wie sich gleich zeigen wird.

Es operiert $M \rtimes G$ auf $\mathcal{K}$ via Konjugation, da aus $M \cap K = 1$ folgt, daß $M \cap {}^{x}K = {}^{x}(M \cap K) = 1$ für $x \in M \rtimes G$, und da genauso aus $MK = M \rtimes G$ folgt, daß $M\, {}^{x}K = {}^{x}(MK) = M \rtimes G$ für $x \in M \rtimes G$. Sei $\underline{\mathcal{K}}$ die Menge der $M \rtimes G$-Konjugationsklassen von Komplementen von M in $M \rtimes G$.

Satz. *Wir haben eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^1(G, M) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathcal{K}} \\ \partial & \longmapsto & K_\partial \;:=\; \{(g\partial, g) \;:\; g \in G\} \end{array}$$

der ersten Cohomologiegruppe von G mit Koeffizienten in M mit der Menge der Konjugationsklassen von Komplementen von M in $M \rtimes G$.

Beweis. Zeigen wir zunächst, daß K_∂ eine Untergruppe von $M \rtimes G$ ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß $G \longrightarrow M \rtimes G$, $g \longmapsto (g\partial, g)$ ein Gruppenmorphismus ist. Für $g, h \in G$ ist in der Tat

$$((gh)\partial, gh) \;=\; ((g\partial) \cdot {}^{g}(h\partial), gh) \;=\; (g\partial, g)(h\partial, h)\;.$$

Wegen $M \cap K_\partial = 1$ und $MK_\partial = M \rtimes G$ ist also tatsächlich $K_\partial \in \mathcal{K}$.

Um zu zeigen, daß die behauptete Abbildung $\mathrm{H}^1(G,M) \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$ wohldefiniert ist, genügt es zu zeigen, daß für $\partial \in \mathrm{Z}^1(G,M)$, für $m \in M$ und für $g \in G$ die Elemente $(g\partial, g)$ und $(g(\partial\partial_m), g)$ via eines von g unabhängigen Elementes konjugiert sind. In der Tat wird

$$\begin{array}{rcl} (g(\partial\partial_m), g) & = & ((g\partial)(g\partial_m), g) \\ & = & (m^-(g\partial)\,{}^g m, g) \\ & = & (m^-, 1)(g\partial, g)(m, 1) \\ & = & (m, 1)^-(g\partial, g)(m, 1)\;. \end{array}$$

Zeigen wir die Surjektivität. Sei $K \in \mathcal{K}$. Wegen $M \cap K = 1$ gibt es für jedes $g \in G$ höchstens ein $m \in M$ mit $(m, g) \in K$. Denn aus (m, g), $(\tilde{m}, g) \in K$ folgt

$$(m, g)(\tilde{m}, g)^- \;=\; (m, g)(({}^{g^-}\tilde{m})^-, g^-) \;=\; (m\tilde{m}^-, 1)\;.$$

Wegen $MK = M \rtimes G$ gibt es für jedes $g \in G$ auch wenigstens ein $m \in M$ mit $(m, g) \in K$. Denn für gegebenes $g \in G$ ist $(1, g) \in MK$, also $(1, g) = (m, 1)(\tilde{m}, \tilde{g})$ für ein $m \in M$ und ein $(\tilde{m}, \tilde{g}) \in K$. Daraus folgt aber $g = \tilde{g}$. Insgesamt können wir eine Abbildung $G \xrightarrow{\partial} M$ dadurch definieren, daß wir $(g\partial, g) \in K$ verlangen. Zu zeigen bleibt, daß es sich um eine Derivation handelt. Nun ist für g, $h \in G$ aber $((gh)\partial, gh) \in K$, und, da K eine Untergruppe ist, auch $(g\partial, g)(h\partial, h) = ((g\partial)\,{}^g(h\partial), gh) \in K$. Nach Definition von ∂ ist folglich $(gh)\partial = (g\partial)\,{}^g(h\partial)$.

Zeigen wir die Injektivität. Seien K_∂ und $K_{\tilde{\partial}}$ konjugiert via $(m, g) \in M \rtimes G$ von links. Für $\tilde{g} \in G$ erhalten wir als konjugiertes Element

$$(m, g)(\tilde{g}\partial, \tilde{g})(m, g)^- \;=\; \Big(m\,{}^g(\tilde{g}\partial)({}^{g\tilde{g}g^-}m)^-,\, {}^g\tilde{g}\Big)\;,$$

woraus

$$m\,{}^g(\tilde{g}\partial)({}^{g\tilde{g}g^-}m)^- \;=\; ({}^g\tilde{g})\tilde{\partial} \;=\; (g\tilde{\partial})\,{}^g(\tilde{g}\tilde{\partial})\,{}^{g\tilde{g}}(g^-\tilde{\partial}) \;=\; (g\tilde{\partial})\,{}^g(\tilde{g}\tilde{\partial})\,{}^{g\tilde{g}g^-}((g\tilde{\partial})^-)$$

folgt. Hieraus ergibt sich wiederum

$$({}^{g^-}m)(\tilde{g}\partial)({}^{\tilde{g}g^-}m)^- \;=\; {}^{g^-}(g\tilde{\partial})(\tilde{g}\tilde{\partial})\,{}^{\tilde{g}g^-}((g\tilde{\partial})^-)\;,$$

und daraus

$$\tilde{g}(\partial\tilde{\partial}^-) \;=\; (\tilde{g}\partial)(\tilde{g}\tilde{\partial})^- \;=\; {}^{\tilde{g}}\tilde{m}\cdot\tilde{m}^-$$

für

$$\tilde{m} \;:=\; {}^{g^-}((g\tilde{\partial})^- m)\;.$$

□

Korollar. *Sind M und G endlich, und sind dazuhin $|M|$ und $|G|$ teilerfremd, so sind alle Komplemente zu M in $M \rtimes G$ zueinander konjugiert.*

Beweis. Dies folgt aus vorstehendem Satz zusammen mit der Aussage, daß $\mathrm{H}^1(G,M) = 1$; cf. Aufgabe 39.(3). □

Beispiel.

(1) Sei $G = \langle(1,2)\rangle \leqslant \mathcal{S}_3$, sei $M = \langle(1,2,3)\rangle \leqslant \mathcal{S}_3$. Die G-Operation auf M sei durch die Konjugationsoperation innerhalb von $\mathcal{S}_3$ erklärt, was es uns ermöglicht, $\mathcal{S}_3$ mit $M \rtimes G$ vermöge $\big((1,2,3)^i, (1,2)^j\big) \overset{\sim}{\longmapsto} (1,2,3)^i(1,2)^j$ zu identifizieren, wobei $i,\ j \in \mathbf{Z}$. Gemäß Korollar gibt es nur eine Konjugationsklasse von Komplementen zu $\langle(1,2,3)\rangle$ in $\mathcal{S}_3$. In der Tat sind die Komplemente $\langle(1,2)\rangle$, $\langle(2,3)\rangle$ und $\langle(1,3)\rangle$ zueinander konjugiert.

(2) Sei $M = \langle(1,2)(3,4),\, (1,3)(2,4)\rangle \leqslant \mathcal{S}_4$, sei $G = \langle(1,2),\, (1,2,3)\rangle \leqslant \mathcal{S}_4$. Die G-Operation auf M sei durch die Konjugationsoperation innerhalb von $\mathcal{S}_4$ erklärt, was es uns ermöglicht, $\mathcal{S}_4$ mit $M \rtimes G$ vermöge Multiplikation der Einträge der Elemente von $M \rtimes G$ zu identifizieren.

Wir behaupten, daß $\mathrm{H}^i(G,M) = 1$ für $i \geqslant 1$. Es ist M ein $\mathbf{F}_2\mathcal{S}_3$-Modul. Mit der Bemerkung aus §2.1.2 ist als abelsche Gruppen $\mathrm{H}^i(G,M) \simeq \mathrm{H}^i(G,M;\mathbf{F}_2)$ für $i \geqslant 0$. Es genügt also zu zeigen, daß M injektiv über $\mathbf{F}_2\mathcal{S}_3$ ist. Wir behaupten, daß ein endlich erzeugter $\mathbf{F}_2\mathcal{S}_3$-Modul genau dann injektiv ist, wenn er projektiv ist. In der Tat ist $(-)^*$ eine kontravariante Autoäquivalenz von $\mathbf{F}_2\mathcal{S}_3$-mod, schickt also injektive auf projektive und projektive auf injektive Moduln; cf. Aufgabe 37.(1). Da aber $\mathbf{F}_2\mathcal{S}_3 \simeq (\mathbf{F}_2\mathcal{S}_3)^*$ via $\sigma \longmapsto (\rho \longmapsto \partial_{\rho,\sigma})$, und da $(-)^*$ additiv ist, werden gemäß Aufgabe 22.(1) projektive Moduln auch auf projektive abgebildet. Ist also P projektiv, so ist P^* auch projektiv, und damit $P^{**} \simeq P$ injektiv. Ist umgekehrt I injektiv, so ist I^* projektiv, und also auch $I^{**} \simeq I$ projektiv. Somit genügt es zu zeigen, daß M projektiv über $\mathbf{F}_2\mathcal{S}_3$ ist.

Nach Aufgabe 35.(4) ist der durch die Operation

$$\begin{array}{rcl} (1,2) & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right) \\ (1,2,3) & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) \end{array}$$

auf $(\mathbf{Z}_{(2)})^2$ gegebene $\mathbf{Z}_{(2)}\mathcal{S}_3$-Modul ein Summand von $\mathbf{Z}_{(2)}\mathcal{S}_3$, mit zugehörigem Idempotent $(0, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), 0)$ in den dortigen Bezeichnungen. Insbesondere ist dieser Modul projektiv über $\mathbf{Z}_{(2)}\mathcal{S}_3$. Also ist seine Reduktion modulo 2, gegeben durch die Operation

$$\begin{array}{rcl} (1,2) & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ (1,2,3) & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \end{array}$$

auf $(\mathbf{F}_2)^2$, projektiv über $\mathbf{F}_2\mathcal{S}_3$. Diese Reduktion ist aber isomorph zu M vermöge $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \longmapsto (1,3)(2,4)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \longmapsto (1,4)(2,3)$. Diese Projektivität zeigt $\mathrm{H}^i(G,M) = 1$ für $i \geqslant 1$; insbesondere $\mathrm{H}^1(G,M) = 1$.

Also gibt es nur eine Konjugationsklasse von Komplementen zu $\langle(1,2)(3,4),\, (1,3)(2,4)\rangle$ in $\mathcal{S}_4$. In der Tat sind $\langle(1,2),\, (1,2,3)\rangle$, $\langle(1,2),\, (1,2,4)\rangle$, $\langle(1,3),\, (1,3,4)\rangle$ und $\langle(2,3),\, (2,3,4)\rangle$ alle zueinander konjugiert.

(3) Sei $D_8 := \langle(1,2,3,4),\, (1,3)\rangle \leqslant \mathcal{S}_4$. Ausgeschrieben ist

$$D_8 = \{1,\, (1,2,3,4),\, (1,3)(2,4),\, (1,4,3,2),\, (1,3),\, (1,2)(3,4),\, (2,4),\, (1,4)(2,3)\}\,.$$

Sei $G = \langle(1,3)\rangle \leqslant D_8$, sei $M = \langle(1,2,3,4)\rangle$. Die G-Operation auf M sei durch die Konjugationsoperation innerhalb von D_8 erklärt, und wir identifizieren $D_8 = M \rtimes G$. Die Menge $\mathcal{K}$ der Komplemente von $\langle(1,2,3,4)\rangle$ in D_8 zerfällt in die Konjugationsklassen $\{\langle(1,3)\rangle, \langle(2,4)\rangle\}$ und $\{\langle(1,2)(3,4)\rangle, \langle(1,4)(2,3)\rangle\}$. Also ist $|\mathrm{H}^1(G,M)| = 2$, und folglich $\mathrm{H}^1(G,M) \simeq C_2$.

3.1.3 Autostarrheit

Sei

$$N \hookrightarrow G \longrightarrow G/N$$

eine kurz exakte Sequenz von Gruppen.

Für einen Automorphismus σ von G, der N in sich überführt, bezeichne $\sigma|_{G/N}$ den auf G/N induzierten Automorphismus.

Für $x \in G$ bezeichne σ_x den inneren Automorphismus $G \xrightarrow{\sim} G$, $g \longmapsto g^x$.

Seien

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Aut}(G,N) & := & \{\sigma \in \mathrm{Aut}\, G \;:\; \sigma|_N = \mathrm{id}_N,\ \sigma|_{G/N} = \mathrm{id}_{G/N}\} \\ \mathrm{Inn}(G,N) & := & \{\sigma_z \;:\; z \in \mathrm{Z}(N)\}\ . \end{array}$$

Ist $z \in \mathrm{Z}(N)$, so ist $\sigma_z|_N = \mathrm{id}_N$, und, wegen $zN = 1 \cdot N$, auch $\sigma_z|_{G/N} = \mathrm{id}_{G/N}$. Somit ist $\mathrm{Inn}(G,N) \leqslant \mathrm{Aut}(G,N)$.

Für $\rho \in \mathrm{Aut}\, G$, $z \in \mathrm{Z}(N)$ und $g \in G$ ist $g\sigma_z\rho = (g^z)\rho = (g\rho)^{(z\rho)} = g\rho\sigma_{z\rho}$. Daher ist $\mathrm{Inn}(G,N) \leqslant \mathrm{Z}(\mathrm{Aut}(G,N))$. Insbesondere folgt

$$\mathrm{Inn}(G,N) \;\trianglelefteq\; \mathrm{Aut}(G,N) \;\leqslant\; \mathrm{Aut}\, G\ .$$

Die kurz exakte Sequenz $N \hookrightarrow G \longrightarrow G/N$ heiße *autostarr*, wenn $\mathrm{Inn}(G,N) = \mathrm{Aut}(G,N)$. Diesenfalls ist ein Automorphismus auf G, der N in sich überführt, bereits bis auf (unvermeidliche) Konjugation mit Elementen aus $\mathrm{Z}(N)$ durch seine induzierten Operationen auf N und auf G/N bestimmt.

Via Konjugation von links ist $\mathrm{Z}(N)$ ein multiplikativ geschriebener $\mathbf{Z}(G/N)$-Modul.

Satz. *Wir haben einen Gruppenisomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Z}^1(G/N, \mathrm{Z}(N)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Aut}(G,N) \\ \partial & \longmapsto & (g \longmapsto (g\partial)g)\ , \end{array}$$

welcher zu einem Isomorphismus

$$\mathrm{B}^1(G/N, \mathrm{Z}(N)) \;\xrightarrow{\sim}\; \mathrm{Inn}(G,N)$$

einschränkt. Somit ist auch

$$\mathrm{H}^1(G/N, \mathrm{Z}(N)) \;\xrightarrow{\sim}\; \mathrm{Aut}(G,N)/\,\mathrm{Inn}(G,N)\ .$$

Insbesondere ist die kurz exakte Sequenz $N \hookrightarrow G \longrightarrow G/N$ *genau dann autostarr, wenn* $\mathrm{H}^1(G/N, \mathrm{Z}(N)) = 1$.

Die Schreibweise $g\partial$ ist ein Mißbrauch von Bezeichnungen; eigentlich müßte es $(gN)\partial$ heißen.

Beweis. Zeigen wir den behaupteten Isomorphismus $\mathrm{Z}^1(G/N, \mathrm{Z}(N)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(G, N)$. Für die Wohldefiniertheit der angegebenen Abbildung zeigen wir zunächst, daß für eine Derivation ∂ die Abbildung $g \longmapsto (g\partial)g$ ein Automorphismus von G ist. Wegen $((gh)\partial)(gh) = (g\partial)\,{}^g(h\partial)(gh) = (g\partial)g \cdot (h\partial)h$ liegt ein Morphismus vor. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $g \longmapsto (g\partial)^- g$; hierfür bemerken wir $((g\partial)g)\partial = g\partial$. Es ist $\mathrm{Z}^1(G/N, \mathrm{Z}(N)) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G, N)$ ein Gruppenmorphismus, da für ∂, $\tilde{\partial} \in \mathrm{Z}^1(G/N, \mathrm{Z}(N))$ sich die Komposition zu

$$g \;\longmapsto\; (g\partial)g \;\longmapsto\; (((g\partial)g)\tilde{\partial})((g\partial)g) \;=\; (g\tilde{\partial})(g\partial)g \;=\; (g(\partial\tilde{\partial}))g$$

ergibt.

Die Injektivität von $\mathrm{Z}^1(G/N, \mathrm{Z}(N)) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G, N)$ ergibt sich aus der Konstruktion. Zeigen wir die Surjektivität. Sei $\sigma \in \mathrm{Aut}(G, N)$. Wir müssen zeigen, daß $gN \longmapsto (g\sigma)g^-$ in $\mathrm{Z}^1(G/N, \mathrm{Z}(N))$ liegt. Zunächst ist $(g\sigma)g^- = (gn)\sigma \cdot (gn)^-$ für $g \in G$ und $n \in N$, es ist also $gN \longmapsto (g\sigma)g^-$ eine wohldefinierte Abbildung von G/N nach G. Da $g\sigma$ und g nach Voraussetzung an σ dasselbe Bild in G/N haben, ist $(g\sigma)g^- \in N$. Wir wollen zeigen, daß $(g\sigma)g^- \in \mathrm{Z}(N)$. Tatsächlich wird für $n \in N$

$$n(g\sigma)g^-n^- \;=\; ((ng)\sigma)g^-n^- \;=\; ((gn^g)\sigma)g^-n^- \;=\; (g\sigma)n^g g^- n^- \;=\; (g\sigma)g^- \;.$$

Bleibt also zu zeigen, daß $gN \longmapsto (g\sigma)g^-$ eine Derivation ist. Für g, $h \in G$ wird in der Tat $((gh)\sigma)(gh)^- = (g\sigma)g^-g(h\sigma)h^-g^- = (g\sigma)g^- \cdot {}^g\big((h\sigma)h^-\big)$.

Desweiteren wurde behauptet, daß unser Isomorphismus $\mathrm{B}^1(G/N, \mathrm{Z}(N))$ auf $\mathrm{Inn}(G, N)$ abbildet. Für $z \in \mathrm{Z}(N)$ kommt nun ∂_z auf $g \longmapsto (g\partial_z)g = z^-\,{}^g z g = z^- g z = g\sigma_z$. Umgekehrt kommt für $z \in \mathrm{Z}(N)$ der innere Automorphismus σ_z auf $gN \longmapsto (g\sigma_z)g^- = z^- g z g^- = z^-\,{}^g z = g\partial_z$. $\square$

Bemerkung. Insbesondere ist $\mathrm{Aut}(G, N)$ abelsch.

Korollar. *Eine kurz exakte Sequenz* $N \hookrightarrow G \longrightarrow G/N$ *endlicher Gruppen, für welche* $|\mathrm{Z}(N)|$ *und* $|G/N|$ *teilerfremd sind, ist autostarr.*

Beweis. Dies folgt aus vorstehendem Satz zusammen mit Aufgabe 39.(3). $\square$

Autostarrheit ist ein typisches (co)homologisches Phänomen. Stellt sich in einer Situation eine erhoffte Aussage als zu naiv heraus (hier: "alle kurz exakten Sequenzen sind autostarr"; im vorigen Abschnitt: "alle Komplemente sind konjugiert"), so ist manchmal eine nicht immer verschwindende (Co)Homologiegruppe daran schuld. Man sagt dann, die (Co)Homologiegruppe stelle ein *Hindernis* oder eine *Obstruktion* gegen die Aussage dar.

Beispiel.

(1) Sei $G = C_2 \times C_2 = \langle a : a^2 = 1\rangle \times \langle b : b^2 = 1\rangle$. Sei $N = \langle a\rangle$. Der Automorphismus $a \longmapsto a$, $b \longmapsto ab$ von G ist in $\mathrm{Aut}(G, N)$, aber nicht in $\mathrm{Inn}(G, N) = 1$. Also ist die kurz exakte Sequenz $C_2 \longrightarrow C_2 \times C_2 \longrightarrow C_2$ nicht autostarr. Äquivalent, es ist $\mathrm{H}^1(C_2, C_2) \neq 1$. In der Tat ist, da C_2 isomorph zum trivialen $\mathbf{F}_2 C_2$-Modul ist, sowie gemäß Aufgabe 41,

$$\mathrm{H}^1(C_2, C_2) \;\simeq\; \mathrm{H}^1(C_2, C_2; \mathbf{F}_2) \;\simeq\; \mathrm{H}^1(C_2; \mathbf{F}_2) \;\simeq\; \mathbf{F}_2\,.$$

(2) Sei $G = \mathcal{S}_4$, sei $N = \langle (1,2)(3,4), (1,3)(2,4)\rangle \simeq C_2 \times C_2$. Aus Beispiel (2) in §3.1.2 wissen wir, daß $\mathrm{H}^1(G/N, N) = 1$. Also ist die kurz exakte Sequenz $C_2 \times C_2 \hookrightarrow \mathcal{S}_4 \longrightarrow \mathcal{S}_3$ autostarr. Eine direkte Rechnung ergibt, daß $\mathrm{C}_{\mathcal{S}_4}(C_2 \times C_2) = C_2 \times C_2$, was zusammen mit $\mathrm{Aut}\,\mathcal{S}_4 = \mathrm{Inn}\,\mathcal{S}_4$ diese Tatsache ebenfalls liefert. Vgl. Aufgabe 62.(2).

3.2 H^2

3.2.1 Erweiterungen mit abelschem Kern

Sei G eine Gruppe. Sei

$$N \xrightarrow{\;i\;} E \xrightarrow{\;p\;} G$$

eine kurz exakte Sequenz von Gruppen; i.e. es ist i injektiv, p surjektiv, und das Bild von i ist der Kern von p. Sei zunächst N nicht notwendig abelsch.

Man kann auch eine Interpretation über Kern und Cokern analog zu Aufgabe 14 angeben, obwohl (Gruppen) keine additive Kategorie ist.

Wir wollen dieser kurz exakten Sequenz einen Gruppenmorphismus

$$G \longrightarrow \mathrm{Out}\,N := \mathrm{Aut}\,N/\,\mathrm{Inn}\,N$$

entnehmen. Hierbei bezeichnet $\mathrm{Aut}\,N$ die Automorphismengruppe, und $\mathrm{Inn}\,N := \{x \longmapsto x^n \;:\; n \in N\} \trianglelefteq \mathrm{Aut}\,N$ darin den Normalteiler der inneren Automorphismen.

Zur Schreibvereinfachung betrachten wir i als Inklusionsabbildung, i.e. wir schreiben $x := xi \in E$ für $x \in N$. Zunächst einmal haben wir einen Gruppenmorphismus $E \longrightarrow \mathrm{Aut}\,N$, $e \longmapsto (x \longmapsto x^e)$, da N (genauer, Ni) ein Normalteiler in E ist. Da dieser Morphismus N auf $\mathrm{Inn}\,N$ abbildet, induziert er einen Gruppenmorphismus $G \simeq E/N \longrightarrow \mathrm{Aut}\,N/\,\mathrm{Inn}\,N = \mathrm{Out}\,N$.

Ist speziell N abelsch, so ist $\mathrm{Out}\,N = \mathrm{Aut}\,N$, und die Sequenz induziert einen Gruppenmorphismus $G \longrightarrow \mathrm{Aut}\,N$. Dadurch wird N zu einem (multiplikativ notierten) $\mathbf{Z}G$-Rechtsmodul, welchen wir auf übliche Weise zu einem $\mathbf{Z}G$-Linksmodul uminterpretieren können, viz. ${}^{g}n := n^{g^-}$ für $g \in G$ und $n \in N$.

Ausgeschrieben, und mit Bezeichnung des Morphismus i, erhalten wir diesenfalls die Operation eines Elementes $g \in G$ von links auf einem Element $n \in N$, indem wir ein $e \in E$ mit $ep = g$ wählen, ni von links mit e konjugieren, und davon das eindeutige Urbild unter i nehmen. I.e. $({}^g n)i = {}^e(ni)$, vorausgesetzt, es ist $ep = g$.

Sei nun M ein gegebener multiplikativ notierter $\mathbf{Z}G$-Linksmodul. Eine *Erweiterung* von G mit M sei eine kurz exakte Sequenz von Gruppen

$$M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G\ ,$$

wozu die dem $\mathbf{Z}G$-Modul M unterliegende abelsche Gruppe verwandt werde, derart, daß die von dieser Sequenz induzierte Operation von G auf M mit der gegebenen Operation übereinstimmt. In anderen Worten, die resultierende Operation von G auf M sei vorgeschrieben.

Zwei Erweiterungen (i, p) und (i', p') von G mit M heißen *äquivalent,* wenn es einen Morphismus $E \xrightarrow{f} E'$ gibt, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & G \arrow[d, equal] \\ M \arrow[r, "i'"] & E' \arrow[r, "p'"] & G \end{tikzcd}$$

kommutativ macht, i.e. für welchen $if = i'$ und $fp' = p$ ist.

Dies impliziert, daß f ein Isomorphismus ist, wie wir nun kurz verifizieren wollen. Wir behaupten die Injektivität. Sei $e \in E$ mit $ef = 1$ gegeben. Dann ist $efp' = ep = 1$, und also gibt es ein $m \in M$ mit $e = mi$. Somit ist $mi' = mif = 1$, woraus wegen i' injektiv $m = 1$, und schließlich $e = mi = 1$ folgt. Wir behaupten die Surjektivität. Sei $e' \in E'$ gegeben. Sei $e \in E$ mit $ep = e'p'$. Wegen $(e'(ef)^-)p' = (e'p')(ep)^- = 1$ gibt es ein $m \in M$ mit $mi' = e'(ef)^-$. Es folgt $e' = (mi')(ef) = ((mi)e)f$.

In einer Modulkategorie folgte dies mit dem Schlangenlemma aus Aufgabe 20.(1), cf. Aufgabe 20.(2).

Die Äquivalenzklassen von Erweiterungen von G mit M heißen *Erweiterungsklassen* von G mit M.

Eine spezielle Erweiterung ist durch das semidirekte Produkt

$$M \rtimes G \;=\; \{(m, g)\ :\ m \in M,\ g \in G\}$$

gegeben, welches mit der Multiplikation $(m, g)(m', g') := (m\,{}^g m', gg')$ ausgestattet ist; namentlich

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{i_0} & M \rtimes G & \xrightarrow{p_0} & G \\ m & \longmapsto & (m, 1) & & \\ & & (m, g) & \longmapsto & g\ . \end{array}$$

Diese ganze Erweiterung (i_0, p_0) von G mit M werde ebenfalls als *semidirektes Produkt* von G mit M bezeichnet.

Wir haben eine Coretraktion zu p_0, gegeben durch $G \xrightarrow{s_0} M \rtimes G$, $g \longmapsto (1, g)$. Liegt eine Erweiterung (i, p) in der Erweiterungsklasse des semidirekten Produktes, so ist folglich p eine Retraktion.

Wir behaupten umgekehrt, daß eine Erweiterung

$$M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G\ ,$$

für die es einen Gruppenmorphismus s mit $sp = 1$ gibt, zum semidirekten Produkt äquivalent ist. In der Tat ist $M \rtimes G \longrightarrow E$, $(m, g) \longmapsto (mi)(gs)$ ein Gruppenmorphismus, der das verlangte Diagramm kommutativ macht. Letzteres ist ersichtlich, verifizieren wir ersteres. Für $m, m' \in M$ und $g, g' \in G$ geht $(m, g)(m', g') = (m\,{}^{g}m', gg')$ auf $(m\,{}^{g}m')i \cdot (gg')s = mi \cdot ({}^{g}m')i \cdot gs \cdot g's$, was wegen $({}^{g}m')i = {}^{(gs)}(m'i)$ in der Tat mit $mi \cdot gs \cdot m'i \cdot g's$ übereinstimmt.

Somit ist für eine Erweiterung (i, p) von G mit M genau dann p eine Retraktion, wenn (i, p) in der Erweiterungsklasse des semidirekten Produktes von G mit M liegt.

Da wir M multiplikativ notieren, notieren wir auch $\mathrm{H}^2(G, M)$ multiplikativ. So werden

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Z}^2(G, M) & := & \mathrm{Z}^2({}_{\mathbf{Z}G}(\,\mathrm{Bar}_{G,\mathbf{Z}}, M)) \\
& = & \{G \times G \xrightarrow{z} M \ : \ {}^{g}((h,k)z) \cdot (g, hk)z = (gh, k)z \cdot (g,h)z\} \\
\mathrm{B}^2(G, M) & := & \mathrm{B}^2({}_{\mathbf{Z}G}(\,\mathrm{Bar}_{G,\mathbf{Z}}, M)) \\
& & \{G \times G \xrightarrow{z_d} M,\ (g,h) \longmapsto (g,h)z_d := {}^{g}(hd) \cdot ((gh)d)^{-} \cdot gd \ : \ G \xrightarrow{d} M\} \\
\mathrm{H}^2(G, M) & = & \mathrm{Z}^2(G, M)/\mathrm{B}^2(G, M)\ ,
\end{array}$$

cf. Beispiel (3) aus §2.3.2.

Satz. *Die Menge der Erweiterungsklassen von G mit M steht in Bijektion zu $\mathrm{H}^2(G, M)$. Hierbei korrespondiert die Klasse des semidirekten Produktes zu $1 \in \mathrm{H}^2(G, M)$.*

Beweis. Sei

$$\mathrm{Z}^2_{\mathrm{red}}(G, M) \ := \ \{z \in \mathrm{Z}^2(G, M) \ : \ (g, 1)z = 1 \text{ und } (1, g)z = 1 \text{ für alle } g \in G\} \ \leqslant \ \mathrm{Z}^2(G, M)$$

die Untergruppe der *reduzierten* 2-Cozyklen in $\mathrm{Z}^2(G, M)$.

Wir behaupten, daß der induzierte injektive Gruppenmorphismus

$$\mathrm{Z}^2_{\mathrm{red}}(G, M)/\big(\mathrm{B}^2(G, M) \cap \mathrm{Z}^2_{\mathrm{red}}(G, M)\big) \ \hookrightarrow \ \mathrm{Z}^2(G, M)/\mathrm{B}^2(G, M) \ = \ \mathrm{H}^2(G, M)$$

auch surjektiv ist. In anderen Worten, wir behaupten, daß jede Cohomologieklasse wenigstens einen reduzierten 2-Cozykel enthält.

Sei $z \in \mathrm{Z}^2(G, M)$. Für $g \in G$ ist ${}^{g}((1,1)z) = (g, 1)z$, wie aus der 2-Cozykelbedingung mit $(g, 1, 1)$ anstatt (g, h, k) folgt. Ferner ist $(1,1)z = (1, g)z$, wie aus der 2-Cozykelbedingung mit $(1, 1, g)$ anstatt (g, h, k) folgt. Also ist $\mathrm{Z}^2_{\mathrm{red}}(G, M) = \{z \in \mathrm{Z}^2(G, M) \ : \ (1,1)z = 1\}$.

Sei nun $z \in \mathrm{Z}^2(G,M)$ ein beliebig gegebener 2-Cozykel. Sei $G \xrightarrow{d} M$, $g \longmapsto (1,1)z$. Sei $z' := z \cdot z_d^-$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} (1,1)z' & = & (1,1)z \cdot (1,1)z_d^- \\ & = & (1,1)z \cdot {}^1(1d)^- \cdot (1\cdot 1)d \cdot (1d)^- \\ & = & (1,1)z \cdot (1,1)z^- \cdot (1,1)z \cdot (1,1)z^- \;=\; 1 \;, \end{array}$$

und folglich ist z' ein reduzierter 2-Cozykel. Nach Konstruktion repräsentieren z' und z dieselbe Cohomologieklasse.

Wir bemerken noch, daß

$$\mathrm{B}^2(G,M) \cap \mathrm{Z}^2_{\mathrm{red}}(G,M) \;=\; \{z_d \;:\; G \xrightarrow{d} M,\ 1d = 1\} \;.$$

In Worten, wir haben gezeigt, daß wir uns von vorneherein auf reduzierte Repräsentanten beschränken dürfen.

Wir werden nun eine Abbildung von den Erweiterungen nach

$$\mathrm{H}^2(G,M) \;=\; \mathrm{Z}^2_{\mathrm{red}}(G,M)/\big(\mathrm{B}^2(G,M) \cap \mathrm{Z}^2_{\mathrm{red}}(G,M)\big)$$

definieren, und werden sodann zeigen, daß zwei Erweiterungen in derselben Erweiterungsklasse auf dasselbe Element abbilden. Das definiert dann eine Abbildung von den Erweiterungsklassen von G mit M nach $\mathrm{H}^2(G,M)$.

Sei

$$M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \;,$$

eine Erweiterung von G mit M. Wähle eine Abbildung von Mengen $G \xrightarrow{\sigma} E$ – im allgemeinen kein Gruppenmorphismus – mit $\sigma p = 1$ und $1\sigma = 1$. Für $g,\ h \in G$ ist

$$\Big((g\sigma)\cdot(h\sigma)\cdot((gh)\sigma)^-\Big)p \;=\; g\cdot h\cdot h^- g^- \;=\; 1 \;,$$

und somit definiert $(g,h)z^\sigma i := g\sigma \cdot h\sigma \cdot ((gh)\sigma)^-$ ein Element $(g,h)z^\sigma \in M$.

Es mißt z^σ die Abweichung der Abbildung σ davon, ein Gruppenmorphismus zu sein.

Wir wollen verifizieren, daß z^σ ein reduzierter 2-Cozykel ist. Seien $g,\ h,\ k \in G$ gegeben. Es wird

$$\begin{array}{rl} & \Big({}^g((h,k)z^\sigma)\cdot(g,hk)z^\sigma\cdot((gh,k)z^\sigma)^-\cdot((g,h)z^\sigma)^-\Big)i \\ = & {}^{g\sigma}\big(h\sigma\cdot k\sigma\cdot((hk)\sigma)^-\big)\cdot g\sigma\cdot(hk)\sigma\cdot((ghk)\sigma)^-\cdot\big((gh)\sigma\cdot k\sigma\cdot((ghk)\sigma)^-\big)^-\cdot\big(g\sigma\cdot h\sigma\cdot((gh)\sigma)^-\big)^- \\ = & g\sigma\cdot h\sigma\cdot k\sigma\cdot((hk)\sigma)^-\cdot(g\sigma)^-\cdot g\sigma\cdot(hk)\sigma\cdot((ghk)\sigma)^-\cdot(ghk)\sigma\cdot(k\sigma)^-\cdot((gh)\sigma)^-\cdot(gh)\sigma\cdot(h\sigma)^-\cdot(g\sigma)^- \\ = & 1 \;. \end{array}$$

Wir müssen die Unabhängigkeit von der Wahl von σ nachweisen. Ist $\tilde{\sigma}$ eine weitere Abbildung mit $\tilde{\sigma}p = 1$ und $1\tilde{\sigma} = 1$, so ist zu zeigen, daß $(g,h) \longmapsto (g,h)z^\sigma \cdot \big((g,h)z^{\tilde{\sigma}}\big)^-$ ein 2-Corand ist. Wir setzen $gdi := (g\sigma)(g\tilde{\sigma})^-$ für $g \in G$ und erhalten damit für $g,\, h \in G$

$$\begin{array}{rcl}
\Big((g,h)z^\sigma \cdot \big((g,h)z^{\tilde{\sigma}}\big)^-\Big)i & = & (g\sigma)(h\sigma)\big((gh)\sigma\big)^-\big((gh)\tilde{\sigma}\big)(h\tilde{\sigma})^-(g\tilde{\sigma})^- \\
& = & (g\sigma)(h\sigma)\Big({}^{(gh)\sigma^-}\big(((gh)\sigma)((gh)\tilde{\sigma})^-\big)\Big)^-(h\tilde{\sigma})^-(g\tilde{\sigma})^- \\
& = & (g\sigma)(h\sigma)\Big({}^{(gh)\sigma^-}\big((gh)di\big)\Big)^-(h\tilde{\sigma})^-(g\tilde{\sigma})^- \\
& = & (g\sigma)(h\sigma)\Big(\big({}^{(gh)^-}(gh)d\big)i\Big)^-(h\tilde{\sigma})^-(g\tilde{\sigma})^- \\
& = & (g\sigma)(h\sigma)\Big(\big({}^{h^-g^-}(gh)d\big)i\Big)^-(h\tilde{\sigma})^-(g\tilde{\sigma})^- \\
& = & (g\sigma)(h\sigma)\Big({}^{(h\sigma)^-(g\sigma)^-}\big((gh)di\big)\Big)^-(h\tilde{\sigma})^-(g\tilde{\sigma})^- \\
& = & \big((gh)di\big)^-(g\sigma)(h\sigma)(h\tilde{\sigma})^-(g\tilde{\sigma})^- \\
& = & \big((gh)di\big)^-(g\sigma)(hdi)(g\tilde{\sigma})^- \\
& = & \big((gh)di\big)^-\,{}^{g\sigma}(hdi)(g\sigma)(g\tilde{\sigma})^- \\
& = & \big((gh)di\big)^-\cdot\big({}^{g}(hd)\big)i\cdot(gdi) \\
& = & \Big(\big((gh)d\big)^-\cdot{}^{g}(hd)\cdot(gd)\Big)i \\
& = & (g,h)z_d\, i\;,
\end{array}$$

Seien nun (i,p) und (i',p') in derselben Erweiterungsklasse, sei also ein Gruppenmorphismus f mit $if = i'$ und $fp' = p$ gegeben. Sei σ eine Abbildung mit $\sigma p = 1$. Wähle $\sigma' := \sigma f$. Es werden $(g,h)z^\sigma i = g\sigma\cdot h\sigma\cdot((gh)\sigma)^-$ und $(g,h)z^{\sigma'}i' = g\sigma'\cdot h\sigma'\cdot((gh)\sigma')^-$ für $g,\, h \in G$. Daraus folgt

$$\begin{array}{rcl}
(g,h)z^{\sigma'}i' & = & g\sigma'\cdot h\sigma'\cdot((gh)\sigma')^- \\
& = & (g\sigma\cdot h\sigma\cdot((gh)\sigma)^-)f \\
& = & ((g,h)z^\sigma i)f \\
& = & (g,h)z^\sigma i'\;,
\end{array}$$

und also $(g,h)z^{\sigma'} = (g,h)z^\sigma$ stets, i.e. $z^{\sigma'} = z^\sigma$.

Wundert man sich, daß man sogar Gleichheit der 2-Cozyklen selbst erhält, und nicht nur ihrer Cohomologieklassen, so erinnere man sich daran, daß wir die Bewegungsfreiheit modulo 2-Corändern bereits im Nachweis der Unabhängigkeit von der Wahl von σ' ausgenützt haben, und wir hier ein spezielles σ' gewählt haben.

Somit ist eine Abbildung von den Erweiterungsklassen von G mit M nach $\mathrm{H}^2(G,M)$ konstruiert.

Wir merken noch an, daß aus σ Gruppenmorphismus folgt, daß $z^\sigma = 1$. Die Erweiterungsklasse des semidirekten Produktes wird also, wie behauptet, auf $1 \in \mathrm{H}^2(G,M)$ abgebildet.

Nun wollen wir eine Abbildung von $\mathrm{Z}^2_{\mathrm{red}}(G,M)$ in die Erweiterungen von G mit M angeben. Sodann wollen wir zeigen, daß zwei 2-Cozykel in derselben Cohomologieklasse zwei Erweiterungen in derselben Erweiterungsklasse liefern, was dann eine Abbildung von $\mathrm{H}^2(G,M)$ in die Erweiterungsklassen von G mit M definiert.

Sei also $z \in \mathrm{Z}^2_{\mathrm{red}}(G,M)$. Definiere die Gruppe

$$M \times_z G \;:=\; \{(m,g)\;:\; m \in M,\; g \in G\}$$

vermöge der Multiplikation

$$(m,g)\cdot(m',g') \;:=\; (m \cdot {}^{g}m' \cdot (g,g')z,\; gg')\;.$$

Das Einselement ist gegeben durch $(1,1)$, da z ein reduzierter 2-Cozykel ist. Die Assoziativität folgt für (m,g), (m',g'), $(m'',g'') \in M \times_z G$ aus

$$\begin{array}{rcl}
\big((m,g)(m',g')\big)(m'',g'') & = & (m \cdot {}^{g}m' \cdot (g,g')z,\; gg')(m'',g'') \\
& = & (m \cdot {}^{g}m' \cdot (g,g')z \cdot {}^{gg'}m'' \cdot (gg',g'')z,\; gg'g'') \\
& = & (m \cdot {}^{g}m' \cdot {}^{gg'}m'' \cdot (gg',g'')z \cdot (g,g')z,\; gg'g'') \\
& = & (m \cdot {}^{g}m' \cdot {}^{gg'}m'' \cdot {}^{g}((g',g'')z) \cdot (g,g'g'')z,\; gg'g'') \\
& = & (m,g)(m' \cdot {}^{g'}m'' \cdot (g',g'')z,\; g'g'') \\
& = & (m,g)\big((m',g')(m'',g'')\big)\;.
\end{array}$$

Das Inverse zu $(m,g) \in M \times_z G$ ist $(m,g)^- = ({}^{g^-}(m^-) \cdot {}^{g^-}((g,g^-)z^-),\; g^-)$. Wegen der bereits gezeigten Assoziativität genügt es, hierfür $(m,g)(m,g)^- = (1,1)$ zu verifizieren. Wegen ${}^{g^-}((g,g^-)z) = (g^-,g)z$ ist aber auch $(m,g)^-(m,g) = (1,1)$ ersichtlich.

Wir haben eine kurz exakte Sequenz

$$M \xrightarrow{i_z} M \times_z G \xrightarrow{p_z} G\;,$$

wobei $mi_z := (m,1)$ für $m \in M$ und $(m,g)p_z := g$ für $(m,g) \in M \times_z G$. Ferner induziert Konjugation mit dem Urbild $(1,g)$ eines Elements $g \in G$ wegen

$$(1,g)(m,1)(1,g)^- \;=\; ({}^{g}m,g)({}^{g^-}((g,g^-)z^-),\; g^-) \;=\; ({}^{g}m\cdot(g,g^-)z^-\cdot(g,g^-)z,\; 1) \;=\; ({}^{g}m,1)$$

für $m \in M$ gerade die vorgegebene G-Operation auf M. Diese nun konstruierte Erweiterungsklasse von G mit M sei das Bild von z.

Sei nun $G \xrightarrow{d} M$ so eine Abbildung, daß z_d reduziert ist, i.e. so, daß $1d = 1$. Sei $\tilde{z} := z\cdot z_d^-$. Wir behaupten, daß

$$\begin{array}{rcl}
M \times_z G & \xrightarrow{f} & M \times_{\tilde{z}} G \\
(m,g) & \longmapsto & (m \cdot gd,\, g)
\end{array}$$

ein Gruppenmorphismus ist. Seien (m,g), $(m',g') \in M \times_z G$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(m,g)f \cdot (m',g')f &= (m \cdot gd, g) \cdot (m' \cdot g'd, g') \\
&= (m \cdot gd \cdot {}^{g}m' \cdot {}^{g}(g'd) \cdot (g,g')\tilde{z},\ gg') \\
&= (m \cdot gd \cdot {}^{g}m' \cdot {}^{g}(g'd) \cdot (g,g')z \cdot ((g,g')z_d)^-,\ gg') \\
&= (m \cdot gd \cdot {}^{g}m' \cdot {}^{g}(g'd) \cdot (g,g')z \cdot ({}^{g}(g'd))^- \cdot (gg')d \cdot (gd)^-,\ gg') \\
&= (m \cdot {}^{g}m' \cdot (g,g')z \cdot (gg')d,\ gg') \\
&= (m \cdot {}^{g}m' \cdot (g,g')z,\ gg')f \\
&= ((m,g)\cdot(m',g'))f\ .
\end{aligned}$$

Nach Konstruktion von f ist $i_z f = i_{\tilde{z}}$ und $fp_{\tilde{z}} = p_z$. Wir haben also eine Abbildung von $\mathrm{H}^2(G,M)$ in die Erweiterungen von G mit M konstruiert.

Abschließend müssen wir noch zeigen, daß sich die Abbildung von den Erweiterungklassen von G mit M nach $\mathrm{H}^2(G,M)$ und die Abbildung in die entgegengesetzte Richtung wechselseitig invertieren.

Sei $z \in \mathrm{Z}^2(G,M)$ ein reduzierter 2-Cozykel. Wähle $G \xrightarrow{\sigma} M \times_z G$, $g \longmapsto (1,g)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(g,h)z^\sigma\, i_z &= g\sigma \cdot h\sigma \cdot ((gh)\sigma)^- \\
&= (1,g)(1,h)(\,{}^{(gh)^-}(((gh,(gh)^-)z)^-),\ (gh)^-) \\
&= ((g,h)z, gh)(\,{}^{(gh)^-}(((gh,(gh)^-)z)^-),\ (gh)^-) \\
&= ((g,h)z \cdot (gh,((gh)^-)z)^- \cdot (gh,(gh)^-)z,\ (gh)(gh)^-) \\
&= ((g,h)z, 1) \\
&= (g,h)z\, i_z
\end{aligned}$$

für $g,\ h \in G$, i.e. $z^\sigma = z$.

Sei umgekehrt eine Erweiterung

$$M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G$$

gegeben. Wir wählen eine Abbildung $G \xrightarrow{\sigma} E$ mit $\sigma p = 1$ und $1\sigma = 1$, und behaupten, daß

$$\begin{array}{rcl}
M \times_{z^\sigma} G & \xrightarrow{f} & E \\
(m,g) & \longmapsto & (mi)(g\sigma)
\end{array}$$

ein Gruppenmorphismus ist. Für (m,g), $(m',g') \in M \times_{z^\sigma} G$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\big((m,g)\cdot(m',g')\big)f &= (m \cdot {}^{g}m' \cdot (g,g')z^\sigma,\ gg')f \\
&= mi \cdot ({}^{g}m')i \cdot (g,g')z^\sigma\, i \cdot (gg')\sigma \\
&= mi \cdot ({}^{g}m')i \cdot g\sigma \cdot g'\sigma \cdot ((gg')\sigma)^- \cdot (gg')\sigma \\
&= mi \cdot {}^{g\sigma}(m'i) \cdot g\sigma \cdot g'\sigma \\
&= mi \cdot g\sigma \cdot m'i \cdot g'\sigma \\
&= (m,g)f \cdot (m',g')f\ .
\end{aligned}$$

Nach Konstruktion von f ist $i_{z^\sigma} f = i$ und $fp = p_{z^\sigma}$. Somit ist das Bild $(i_{z^\sigma}, p_{z^\sigma})$ von z^σ in derselben Erweiterungsklasse wie (i,p). $\square$

Als Konsequenz erhalten wir "Schur-Zassenhaus mit abelschem Kern".

Korollar. *Sei*

$$N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G$$

eine kurz exakte Sequenz endlicher Gruppen. Sei N abelsch. Sind $|N|$ und $|G|$ teilerfremd, so liegt diese Erweiterung in der Erweiterungsklasse des semidirekten Produktes. Insbesondere ist dann p eine Retraktion.

Beweis. Statten wir N mit der von (i,p) induzierten Operation von G aus. Nach Aufgabe 39.(3) ist $\mathrm{H}^2(G,N) = 1$. Gemäß unserem Satz gibt es nur die Erweiterungsklasse des semidirekten Produktes von G mit N. ▫

Bemerkung. Ist G eine Gruppe und N ein Normalteiler in G, so ist der Restklassenmorphismus $G \xrightarrow{p} G/N$ genau dann eine Retraktion in (Gruppen), wenn N ein Komplement K in G hat. Hierbei ist $K \leqslant G$ ein *Komplement* zu N, wenn $N \cap K = 1$ und $NK = G$.

Denn ist p eine Retraktion, und s eine zugehörige Coretraktion in (Gruppen), so ist $K := (G/N)s$ ein Komplement zu N in G, da zum einen jedes Element $g \in G$ in der Form $(g(gps)^-)(gps)$ mit $(g(gps)^-) \in \operatorname{Kern} p = N$ und $gps \in K$ geschrieben werden kann, und da zum anderen für $g \in G$ aus $gps \in N$ folgt, daß $gp = gpsp = 1$, und also $gps = 1$ ist.

Umgekehrt, ist K ein Komplement zu N in G, so ist $p|_K : K \longrightarrow G/N$ ein Isomorphismus, dessen Injektivität aus $N \cap K = 1$ und dessen Surjektivität aus $NK = G$ folgt. Das Inverse dieses Isomorphismus, komponiert mit $K \hookrightarrow G$, ist eine Coretraktion zu p.

In dieser Allgemeinheit hat man bei Existenz eines Komplements K einen Isomorphismus $N \rtimes K \xrightarrow{\sim} G$, $(n,k) \longmapsto nk$, wobei das semidirekte Produkt mittels der Operation von K auf N zu bilden ist, die von der Konjugation innerhalb G resultiert.

3.2.2 Schur-Zassenhaus

Wir wollen die Gültigkeit des Korollars aus §3.2.1 ohne die Voraussetzung an N, abelsch zu sein, erreichen.

Lemma (Frattini). *Sei G eine endliche Gruppe. Sei $N \trianglelefteq G$. Sei p prim. Sei P eine p-Sylowgruppe von N. Dann ist $\mathrm{N}_G(P) \cdot N = G$.*

Beweis. Es operiert die Gruppe N transitiv auf ihren p-Sylowgruppen. Daher gibt es für jedes $g \in G$ ein $n \in N$ mit $P^g = P^n$. Also ist $gn^{-1} \in \mathrm{N}_G(P)$, und somit $g \in \mathrm{N}_G(P) \cdot N$. ▫

Bemerkung (Modularität). *Sei G eine Gruppe. Seien H, K, $L \leqslant G$. Sei $H \leqslant L$. Dann ist*

$$H(K \cap L) \;=\; HK \cap L$$

als Teilmengen von G.

Beweis. Seien $h \in H$ und $k \in K \cap L$. Dann liegt hk in HK, und wegen $h \in L$ und $k \in L$ auch in L. Seien umgekehrt $h \in H$ und $k \in K$ mit $hk \in L$ gegeben. Dann liegt $k = h^-(hk)$ in L, da h^- in L enthalten ist, und somit ist $hk \in H(K \cap L)$. □

Sei G eine endliche Gruppe.

Ein Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $|N|$ teilerfremd zu $|G/N|$ heiße ein *Hall-Normalteiler* oder *hallsch* in G.

Ist N ein Hall-Normalteiler von G, und $K \leqslant G$ eine Untergruppe von Ordnung $|G/N|$, so ist aus Elementordnungsgründen $N \cap K = 1$, und daher auch $|NK| = |N||K| = |G|$. Somit ist diesenfalls K bereits aus Ordnungsgründen Komplement zu N in G.

Ferner werden wir des öfteren verwenden, daß ein Normalteiler $N \trianglelefteq G$, der ein Komplement K mit Ordnung $|K|$ teilerfremd zu $|N|$ hat, hallsch ist.

In Teil (i) des Beweises des folgenden Theorems geht eine Idee ein, die ich aus [**12**] kenne; vgl. [**13,** I.§18].

Theorem (Schur-Zassenhaus.) *Sei G eine endliche Gruppe. Sei N ein Hall-Normalteiler in G.*

(i) *Es hat N ein Komplement in G.*

(ii) *Ist N oder G/N auflösbar, so sind alle solche Komplemente konjugiert in G.*

Beweis. Ad (i). Wir nehmen an, es gibt eine endliche Gruppe, die einen Hall-Normalteiler besitzt, für welchen (i) nicht gilt. Sei G eine solche endliche Gruppe minimaler Ordnung. Sei $N \trianglelefteq G$ ein Hall-Normalteiler, welcher kein Komplement besitzt. Insbesondere ist $N \neq 1$.

Sei p ein Primteiler von $|N|$. Sei P eine p-Sylowgruppe von N. Wir behaupten, daß $P \trianglelefteq G$. Sei im Gegenteil angenommen, es sei $\mathrm{N}_G(P) < G$. Mit Frattini ist $G = \mathrm{N}_G(P) \cdot N$. Es ist $\mathrm{N}_N(P)$ hallsch in $\mathrm{N}_G(P)$, da der Quotient isomorph zu $\mathrm{N}_G(P)N/N = G/N$ ist. Wegen der Minimalität von $|G|$ existiert ein Komplement K zu $\mathrm{N}_N(P)$ in $\mathrm{N}_G(P)$, isomorph zu G/N. Da N hallsch in G ist, ist aus Ordnungsgründen K ein Komplement zu N in G. Wir haben einen Widerspruch; es folgt $P \trianglelefteq G$.

Sei Z das Zentrum von P. Es ist $Z \neq 1$, da P eine nichttriviale p-Gruppe ist. Es ist Z charakteristisch in P und also normal in G. Wegen der Minimalität von $|G|$ hat N/Z ein Komplement L/Z in G/Z. Es ist also $N \cap L = Z$ und $|N/Z||L/Z| = |G/Z|$, i.e. $|N||L| = |G||Z|$.

Nun ist Z hallsch in L und abelsch, hat also nach dem Korollar aus §3.2.1 samt nachfolgender Bemerkung ein Komplement M in L. Insbesondere ist $|M| = |L/Z| = |G/N|$. Da N hallsch in G ist, ist aus Ordnungsgründen M ein Komplement zu N in G. Wir haben einen Widerspruch.

Ad (ii).

(1) Sei angenommen, es existiere eine endliche Gruppe G mit einem auflösbaren Hall-Normalteiler mit zwei nicht zueinander konjugierten Komplementen. Wähle ein solches G minimaler Ordnung. Sei $N \trianglelefteq G$ darin ein auflösbarer Hall-Normalteiler mit zwei nicht zueinander konjugierten Komplementen K und L. Es ist $N \neq 1$, und also die Kommutatoruntergruppe N' echt in N enthalten. Da N' charakteristisch in N ist, ist $N' \trianglelefteq G$.

Sei $\bar{K} := KN'/N'$ das Bild von K in $\bar{G} := G/N'$. Sei $\bar{L} := LN'/N'$. Beachte, daß wegen $K \cap N' = 1$ und $L \cap N' = 1$ gilt, daß $\bar{K} \simeq K \simeq G/N$. Aus Ordnungsgünden sind $\bar{K}$ und $\bar{L}$ Komplemente zum abelschen Normalteiler $\bar{N} := N/N'$ in $\bar{G}$. Mit dem Korollar aus §3.1.2 gibt es somit ein $\bar{x} = xN' \in G/N'$ mit $\bar{K}^{\bar{x}} = \bar{L}$. In anderen Worten, es ist $K^x N' = LN'$. Wir können somit $KN' = LN'$ annehmen.

Nun ist N' ein auflösbarer Normalteiler von KN'. Aus Ordnungsgründen sind L und K Komplemente zu N' in KN'. Wegen $|KN'| = |K||N'| < |K||N| = |G|$ folgt aus der Minimalität von $|G|$, daß L und K sogar bereits in KN' konjugiert sind. Wir haben einen Widerspruch.

(2) Sei angenommen, es existiere eine endliche Gruppe G mit einem Hall-Normalteiler mit zwei nicht zueinander konjugierten auflösbaren Komplementen. Wähle ein solches G minimaler Ordnung. Sei $N \trianglelefteq G$ darin ein Hall-Normalteiler mit zwei nicht zueinander konjugierten auflösbaren Komplementen K und L. Insbesondere ist $N < G$. Da G/N auflösbar ist, gibt es ein $N \leqslant M \trianglelefteq G$ derart, daß $[G : M] =: p$ prim ist. Wäre $N = M$, so wären K und L zwei p-Sylowgruppen in G und daher konjugiert. Also ist $N < M$.

Wegen Modularität ist $N(K \cap M) = M$, und also ist $K \cap M$ ein Komplement zu N in M. Wegen der Minimalität von $|G|$ gibt es mithin ein $m \in M$ mit ${}^{m}K \cap M = L \cap M$. Somit können wir $K \cap M = L \cap M =: U$ annehmen. Es ist $U \simeq M/N \not\simeq 1$. Ferner ist U normal in K und in L, i.e. es sind K und L in $\mathrm{N}_G(U)$ enthalten.

(a) Ist $\mathrm{N}_G(U) < G$, so ist wegen Modularität $K(N \cap \mathrm{N}_G(U)) = \mathrm{N}_G(U)$, und also K ein Komplement zu $N \cap \mathrm{N}_G(U)$ in $\mathrm{N}_G(U)$. Dito L. Wegen der Minimalität von $|G|$ sind K und L sogar bereits in $\mathrm{N}_G(U)$ konjugiert. Wir haben einen Widerspruch.

(b) Ist $\mathrm{N}_G(U) = G$, so ist $U \trianglelefteq G$. Aus Ordnungsgründen hat UN/U ($\simeq N$) in G/U die Komplemente K/U und L/U. Wegen der Minimalität von $|G|$ sind diese konjugiert, und damit auch K und L. Wir haben einen Widerspruch. □

Beispiel. Ist G eine endliche Gruppe, p ein Primteiler von $|G|$ und ist $\mathrm{Syl}_p(G) = \{P\}$ einelementig, so hat P ein Komplement in G. Alle solche Komplemente sind konjugiert. Falls $|G|$ nur zwei Primfaktoren enthält, folgt beides auch direkt aus den Sylowsätzen.

- Wir haben im Beweis von Schur-Zassenhaus in (ii.2) keine Verwendung für die Tatsache gehabt, daß $\mathrm{H}^1(G, A) = 1$ für einen $\mathbf{Z}G$-Modul A mit $|G|$ und $|A|$ teilerfremd.

- FEIT und THOMPSON (Pac. J. Math. 13, 1963) zeigten, daß eine Gruppe ungerader Ordnung auflösbar ist. Somit ist die Auflösbarkeitsbedingung in Aussage (ii) des Satzes von Schur und Zassenhaus nicht erforderlich.

- Ersatzweise können wir statt des Satzes von Feit und Thompson auch die SCHREIERsche Vermutung verwenden, um die Gültigkeit der Aussage (ii) des Satzes von Schur und Zassenhaus ohne die Auflösbarkeitsbedingung zu erhalten. Die Schreiersche Vermutung besagt, daß die äußere Automorphismengruppe $\operatorname{Out} G := \operatorname{Aut} G / \operatorname{Inn} G$ auflösbar ist für eine endliche einfache Gruppe G. Akzeptiert man die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen ([3]), so gilt die Schreiersche Vermutung durch Nachprüfen der darin angeführten Liste.

  Skizzieren wir nun unter Verwendung der oben gezeigten Version von Schur-Zassenhaus, wie man aus der Schreierschen Vermutung folgern kann, daß für eine endliche Gruppe G und einen Hall-Normalteiler N in G alle Komplemente zu N in G konjugiert sind.

  Sei angenommen, es existiere eine endliche Gruppe, die einen Hall-Normalteiler besitzt, welcher zwei nicht zueinander konjugierte Komplemente hat. Sei G eine solche Gruppe minimaler Ordnung. Sei N darin ein Hall-Normalteiler mit Komplementen K und L zu N in G, die zueinander nicht konjugiert sind. Insbesondere ist $N \notin \{1, G\}$. Mehr noch, gemäß dem Korollar aus §3.1.2 ist N nichtabelsch.

  - Wir behaupten, es ist G/N einfach. Sei angenommen, es existiere ein Normalteiler M von G echt zwischen N und G. Wie in (ii.2) erhält man durch Betrachtung von $K \cap M$ und $L \cap M$ einen Widerspruch.

  - Wir behaupten, es ist N ein minimaler Normalteiler in G, i.e. es gibt keinen Normalteiler M von G echt zwischen 1 und N. Angenommen, dies sei doch der Fall. Die Argumente von (ii.1) liefern nach Ersetzung von N' durch M einen Widerspruch.

  - **Lemma.** *Sei H eine endliche Gruppe. Sei V ein minimaler Normalteiler von H. Dann zerfällt V in ein direktes Produkt zueinander in H konjugierter einfacher Gruppen.*

    Beweis. Sei V_0 ein minimaler Normalteiler von V. Die Untergruppe $\langle {}^h V_0 \,:\, h \in H \rangle$ von V ist normal in H. Wegen der Minimalität von V ist somit $V = \langle {}^h V_0 \,:\, h \in H \rangle$.

    Sei V_1 ein Normalteiler von V, welcher maximal sei bezüglich der Eigenschaft, für eine Teilmenge $\{1\} \subseteq A \subseteq H$ in ein direktes Produkt

    $$V_1 \;=\; \prod_{h \in A} {}^h V_0$$

    zu zerfallen. Wir behaupten, daß $V_1 = V$. Sei $V_1 < V$ angenommen. Dann gibt es ein $h' \in H$ mit ${}^{h'}V_0 \not\leqslant V_1$. Es ist daher $V_1 \cap {}^{h'}V_0$ ein in ${}^{h'}V_0$ echt enthaltener Normalteiler. Da mit V_0 auch ${}^{h'}V_0$ minimal ist, folgt $V_1 \cap {}^{h'}V_0 = 1$. Da sowohl V_1 als auch ${}^{h'}V_0$ normal in V sind, ist damit auch $\prod_{h \in A \sqcup \{h'\}} {}^h V_0$ ein direktes Produkt, im Widerspruch zur Maximalität von V_1.

    Bleibt zu zeigen, daß V_0 eine einfache Gruppe ist. Ein Normalteiler von V_0 ist aber wegen der genannten direkten Zerlegung von V auch ein Normalteiler von V, und kann wegen der Minimalität von V_0 nicht echt zwischen 1 und V_0 liegen. □

    Insbesondere ist $N = \prod_{i \in [1,s]} M_i$ ein direktes Produkt zueinander in G konjugierter einfacher nichtabelscher Gruppen M_i.

[3] Diese Klassifikation baut auf Feit-Thompson auf. Sie wurde 1983 für vollendet erklärt. Es wurden hierfür 2004 die sog. quasidünnen Gruppen gerader Charakteristik von ASCHBACHER und SMITH klassifiziert (*The classification of quasithin groups I, II*, AMS Surveys and Monographs, vols. 111, 112). Die sog. Revision der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen ist momentan, 2006, noch im Gange.

- **Lemma.** *Sei* $H = \prod_{i\in[1,t]} W_i$ *ein direktes Produkt nichtabelscher einfacher Gruppen* W_i. *Jeder Normalteiler* $\tilde{H}$ *von* H *ist von der Form* $\tilde{H} = \prod_{i\in T} W_i$ *für eine Teilmenge* $T \subseteq [1,t]$.

  Beweis. Sei $\tilde{H} \trianglelefteq H$. Wir zeigen, daß wenn $\tilde{h} \in \tilde{H}$ eine nichttriviale Projektion $\tilde{h}_i$ auf W_i hat, dann $\tilde{H}\cap W_i \neq 1$, und folglich $\tilde{H}\cap W_i = W_i$ ist. In der Tat ist wegen W_i nichtabelsch einfach das Zentrum von W_i gleich 1, so daß es ein $x_i \in W_i$ so gibt, daß $1 \neq [\tilde{h}_i, x_i] = [\tilde{h}, x_i] \in \tilde{H}\cap W_i$. Wir können also

  $$T \;=\; \{i \in [1,t] \;:\; \text{es gibt ein } \tilde{h} \in \tilde{H} \text{ mit nichttrivialer Projektion auf } W_i\}$$

  wählen. □

  Mit diesen beiden Lemmata folgt nun, daß G via Konjugation auf den direkten Faktoren M_i von N transitiv operiert. Insbesondere ist, wenn wir noch $M := M_1$ schreiben, $s = [G : \mathrm{N}_G(M)]$ die Anzahl dieser Faktoren.

- Wir behaupten, es ist $\mathrm{C}_G(N) = 1$. Wegen ${}^g\mathrm{C}_G(N) = \mathrm{C}_G({}^gN) = \mathrm{C}_G(N)$ für $g \in G$ ist $\mathrm{C}_G(N) \trianglelefteq G$. Da N nicht abelsch ist, ist N nicht in $\mathrm{C}_G(N)$ enthalten. Wegen der oben gesehenen Minimalität von N folgt $N \cap \mathrm{C}_G(N) = 1$. In anderen Worten, der Morphismus $\mathrm{C}_G(N) \longrightarrow G/N$, $c \longmapsto cN$, ist injektiv. Da $\mathrm{C}_G(N) \trianglelefteq G$, ist sein Bild normal in der einfachen Gruppe G/N, und somit gleich G/N oder gleich 1. Wäre das Bild gleich G/N, so wäre $\mathrm{C}_G(N)$ ein Komplement zu N in G, welches wegen $\mathrm{C}_G(N) \trianglelefteq G$ eine direkte Zerlegung $G = N \times \mathrm{C}_G(N)$ nach sich zöge. Die Projektion von K nach N gemäß dieser direkten Zerlegung ist ein Morphismus, der aus Elementordnungsgründen trivial ist. Also ist $K \leqslant \mathrm{C}_G(N)$, und folglich $K = \mathrm{C}_G(N)$. Genauso $L = \mathrm{C}_G(N)$, und wir haben den Widerspruch $K = L$.
  Also ist das Bild gleich 1, i.e. $\mathrm{C}_G(N) \leqslant N$, was $\mathrm{C}_G(N) = \mathrm{C}_G(N) \cap N = 1$ liefert.

- Wir behaupten, daß N eine einfache Gruppe ist. Angenommen, es ist $[G : \mathrm{N}_G(M)] = s > 1$.

  Sei p ein Primteiler von $|M|$. Sei P eine p-Sylowuntergruppe von M. Sei $x \in \mathrm{N}_G(P)$. Dann enthält ${}^xM \cap M$ die nichttriviale Untergruppe ${}^xP = P$, ist somit selbst nichttrivial, und wegen der Einfachheit von M also gleich M. Also ist $\mathrm{N}_G(P) \leqslant \mathrm{N}_G(M)$.

  Frattini, angewandt auf die Situation $P \leqslant M \trianglelefteq \mathrm{N}_G(M)$, gibt $\mathrm{N}_{\mathrm{N}_G(M)}(P) \cdot M = \mathrm{N}_G(M)$, was wegen $\mathrm{N}_G(P) \leqslant \mathrm{N}_G(M)$ auf $\mathrm{N}_G(P) \cdot M = \mathrm{N}_G(M)$ hinausläuft. A fortiori ist $\mathrm{N}_G(P) \cdot N = \mathrm{N}_G(M)$.

  Mit Aussage (i) von Schur-Zassenhaus hat $\mathrm{N}_N(P)$ ein Komplement C in $\mathrm{N}_G(P)$, wobei $C \simeq \mathrm{N}_G(P)/\mathrm{N}_N(P) \simeq N\mathrm{N}_G(P)/N = \mathrm{N}_G(M)/N$. Aus Ordnungsgründen ist C auch ein Komplement zu N in $\mathrm{N}_G(M)$.

  Wegen Modularität ist auch $N\mathrm{N}_K(M) = N(K \cap \mathrm{N}_G(M)) = NK \cap \mathrm{N}_G(M) = \mathrm{N}_G(M)$, und somit $\mathrm{N}_K(M)$ ein Komplement zu N in $\mathrm{N}_G(M)$. Dito $\mathrm{N}_L(M)$. Wegen der Minimalität von $|G|$ sind nun C, $\mathrm{N}_K(M)$ und $\mathrm{N}_L(M)$ in $\mathrm{N}_G(M)$ konjugiert. Wir können also $\mathrm{N}_K(M) = \mathrm{N}_L(M) = C \leqslant \mathrm{N}_G(P)$ annehmen.

  Sei $\{k_i : i \in [1,s]\}$ ein Repräsentantensystem von $K/\mathrm{N}_K(M)$, und zugleich auch von $G/\mathrm{N}_G(M)$. Sei die Numerierung so vorgenommen, daß ${}^{k_i}M = M_i$ stets. Es ist

  $$P_K \;:=\; \prod_{i\in[1,s]} {}^{k_i}P \;\leqslant\; \prod_{i\in[1,s]} M_i \;=\; N$$

  eine p-Sylowgruppe von N. Da für $k \in K$ ein $\sigma \in \mathcal{S}_s$ existiert mit stets $kk_i = k_{i\sigma}k'_i$ für je ein $k'_i \in \mathrm{N}_K(M)$, wird wegen $\mathrm{N}_K(M) \leqslant \mathrm{N}_G(P)$

  $${}^kP_K \;=\; \prod_{i\in[1,s]} {}^{k_{i\sigma}k'_i}P \;=\; \prod_{i\in[1,s]} {}^{k_{i\sigma}}P \;=\; P_K\;,$$

i.e. $K \leqslant \mathrm{N}_G(P_K)$. Analog konstruiert man eine p-Sylowgruppe P_L von N mit $L \leqslant \mathrm{N}_G(P_L)$. Sei $n \in N$ mit $P_K = {}^nP_L$. Dann ist ${}^nL \leqslant {}^n\mathrm{N}_G(P_L) = \mathrm{N}_G({}^nP_L) = \mathrm{N}_G(P_K)$.
Wir behaupten, daß $P_K \trianglelefteq G$. Angenommen $\mathrm{N}_G(P_K) < G$. Es ist $\mathrm{N}_G(P_K)/\mathrm{N}_N(P_K) \simeq N\mathrm{N}_G(P_K)/N = G/N$ wegen $K \leqslant \mathrm{N}_G(P_K)$, und folglich sind aus Ordnungsgründen K und ${}^nL$ Komplemente zu $\mathrm{N}_N(P_K)$ in $\mathrm{N}_G(P_K)$. Wegen der Minimalität von $|G|$ sind sie sogar schon in $\mathrm{N}_G(P_K)$ zueinander konjugiert, was aber nicht der Fall ist. Wir haben einen Widerspruch; es folgt $P_K \trianglelefteq G$.
Da N ein minimaler Normalteiler ist, folgt nun $P_K = N$. Somit sind mit der oben gezeigten Version von Schur-Zassenhaus, Aussage (ii) für auflösbaren Normalteiler, die Komplemente K und L konjugiert. Wir haben einen Widerspruch.

Fassen wir zusammen. Es ist N einfach und $\mathrm{C}_G(N) = 1$. Wir behaupten, daß der Morphismus

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \operatorname{Out} N \\ k & \longmapsto & (n \longmapsto n^k) \end{array}$$

injektiv ist. In der Tat, stimmen für ein $n' \in N$ die Konjugierten n^k und $n^{n'}$ überein für alle $n \in N$, so ist $kn'^- \in \mathrm{C}_G(N) = 1$, also $k \in K \cap N$, und folglich $k = 1$. Da mit der Schreierschen Vermutung $\operatorname{Out} N$ auflösbar ist, gilt dies somit auch für K. Mit der oben gezeigten Version von Schur-Zassenhaus, Aussage (ii) für auflösbaren Quotienten, sind mithin K und L konjugiert. Wir haben einen Widerspruch; die Geisterjagd ist zuende, ein solches G existiert nicht.

Kapitel 4

Eine Verfeinerung

4.1 Spektralsequenzen

Wir folgen im wesentlichen [**22,** II.4]; cf. auch [**8,** App.].

Wir werden für einen filtrierten Komplex X die Filtration stets in der Richtung $\cdots \subseteq X(\alpha) \subseteq X(\alpha+1) \subseteq \cdots$ numerieren. Wir nehmen dabei in Kauf, daß später bei den Filtrationen des Totalkomplexes eines Doppelkomplexes im cohomologischen Fall negative Zahlen als Indizes auftreten werden; cf. §4.2.1.1 und auch die Bemerkung aus §4.1.4.

Darüberhinaus werden wir uns dort auf die Behandlung dieses cohomologischen Falls beschränken. Der homologische Fall folgt analog.

Sei R ein Ring.

4.1.1 Filtrierte Komplexe

Wir schreiben $\mathbf{Z}_\infty$ für die linear geordnete Menge $\{-\infty\} \sqcup \mathbf{Z} \sqcup \{\infty\}$, wobei $-\infty$ resp. ∞ ein formal zu $\mathbf{Z}$ hinzugefügtes Element sei, das kleiner resp. größer als alle Elemente von $\mathbf{Z}$ sei.

Sei X ein Objekt von $[\![\mathbf{Z}_\infty, \mathrm{C}(R\text{-Mod})]\!]$, i.e. ein Diagramm der Form $\mathbf{Z}_\infty$ mit Werten in den Komplexen von R-Moduln. Schreibe $X(\alpha) \in \operatorname{Ob}\mathrm{C}(R\text{-Mod})$ für das Objekt von X an der Stelle $\alpha \in \mathbf{Z}_\infty$, und schreibe, unter Mißbrauch von Notation, $X(\alpha) \xrightarrow{x} X(\beta)$ für den Diagrammorphismus zu $\alpha \leqslant \beta$, sowie $X(\alpha)^i \xrightarrow{d} X(\alpha)^{i+1}$ für das Differential des Komplexes $X(\alpha)$ bei $i \in \mathbf{Z}$.

Ein *punktweise split und endlich filtrierter Komplex* von R-Moduln sei ein Objekt X in $[\![\mathbf{Z}_\infty, \mathrm{C}(R\text{-Mod})]\!]$, für welches die Bedingungen (SEF 1, 2, 3) gelten.

Manchmal spricht man auch vom von den Komplexen $X(\alpha)$ filtrierten Komplex $X(\infty)$.

(SEF 1) Es ist $X(-\infty) = 0$. (X normiert.)

(SEF 2) Für alle $i \in \mathbf{Z}$ und alle $\alpha,\ \beta\ \in\ \mathbf{Z}_\infty$ mit $\alpha \leqslant \beta$ ist $X(\alpha)^i \xrightarrow{x^i} X(\beta)^i$ eine Coretraktion. (X punktweise split filtriert.)

(SEF 3) Für alle $i \in \mathbf{Z}$ gibt es ein $\beta_0 \in \mathbf{Z}$ und ein $\alpha_0 \in \mathbf{Z}$ so, daß $X(\alpha)^i \xrightarrow{x^i} X(\beta)^i$ eine Identität ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_\infty$ mit $\alpha \leqslant \beta \leqslant \beta_0$ oder $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$. ($X$ punktweise endlich filtriert.)

Angesichts von (SEF 3) ist der Sinn der Indizes $-\infty$ und ∞ einfach nur, problemlos auf den Anfang und das Ende der Filtrierung zugreifen zu können.

Sei X nun ein solcher punktweise split und endlich filtrierter Komplex von R-Moduln.

Für $\alpha \in \mathbf{Z}$ schreiben wir $\bar{X}(\alpha) := \operatorname{Cokern}\big(X(\alpha-1) \xrightarrow{x} X(\alpha)\big)$. Dieser Cokern ist punktweise zu bilden. Insbesondere ist

$$X(\alpha)^i \;\simeq \bigoplus_{\sigma\in]-\infty,\alpha]} \bar{X}(\sigma)^i$$

für $i \in \mathbf{Z}$ und $\alpha \in \mathbf{Z}_\infty$. Dies ist eine endliche direkte Summe, da für jedes i alle bis auf endlich viele Summanden verschwinden. Wir identifizieren entlang dieses Isomorphismus.

Schreiben wir entsprechend für $i \in \mathbf{Z}$

$$\left(X(\infty)^i \xrightarrow{d} X(\infty)^{i+1} \right) = \left(\bigoplus_{\sigma\in]-\infty,\infty[} \bar{X}(\sigma)^i \xrightarrow{(d^i_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau}} \bigoplus_{\tau\in]-\infty,\infty[} \bar{X}(\tau)^{i+1} \right)$$

mit $d^i_{\sigma,\tau} : \bar{X}(\sigma)^i \longrightarrow \bar{X}(\tau)^{i+1}$, so erhalten wir für $\alpha \in \mathbf{Z}$ wegen

$$\left(X(\alpha-1)^i \xrightarrow{x^i} X(\alpha)^i \right) = \left(X(\alpha-1)^i \xrightarrow{(1\,0)} X(\alpha-1)^i \oplus \bar{X}(\alpha)^i \right)$$

und wegen des verlangten kommutativen Vierecks

$$\begin{tikzcd} X(\alpha-1)^i \arrow[r, "d"] \arrow[d, "x^i"'] & X(\alpha-1)^{i+1} \arrow[d, "x^{i+1}"] \\ X(\alpha)^i \arrow[r, "d"] & X(\alpha)^{i+1} \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} X(\alpha-1)^i \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\,0)"'] & X(\alpha-1)^{i+1} \arrow[d, "(1\,0)"] \\ X(\alpha-1)^i \oplus \bar{X}(\alpha)^i \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)"'] & X(\alpha-1)^{i+1} \oplus \bar{X}(\alpha)^{i+1} \end{tikzcd}$$

die Einträge $d^i_{\sigma,\alpha} = 0$ für $\sigma < \alpha$. Kurz, es ist $X(\infty)^i \xrightarrow{d} X(\infty)^{i+1}$ eine untere Dreiecksmatrix.

4.1.2 Ein doppelt indiziertes Diagramm aus einem filtrierten Komplex – das Spektralobjekt

4.1.2.1 Die zugrundeliegende Kombinatorik

Sei $\bar{\mathbf{Z}}_\infty := \mathbf{Z}_\infty \times \mathbf{Z}$. Darin sei $(\alpha, k) \leqslant (\beta, \ell)$ genau dann, wenn $k < \ell$ oder ($k = \ell$ und $\alpha \leqslant \beta$). Es entsteht $\bar{\mathbf{Z}}_\infty$ also durch Aneinanderreihen von $\mathbf{Z}$ Kopien von $\mathbf{Z}_\infty$. Der Querstrich deute diese Periodizität an. Wir schreiben auch $\alpha = (\alpha, 0) \in \bar{\mathbf{Z}}_\infty$ für $\alpha \in \mathbf{Z}_\infty$.

Für $\ell \in \mathbf{Z}$ haben wir auf $\bar{\mathbf{Z}}_\infty$ den Automorphismus $\beta = (\alpha, k) \overset{\sim}{\longmapsto} (\alpha, k + \ell) =: \beta^{+\ell}$ linear geordneter Mengen. Wir schreiben auch kurz $\beta^{-\ell} = \beta^{+(-\ell)}$ für $\ell > 0$. Beachte, daß $-\infty^{+1}$ zu lesen ist als $(-\infty)^{+1}$.

Diese Automorphismen verwendet man in der Regel auch zur Bezeichnung der Elemente von $\bar{\mathbf{Z}}_\infty$, d.h. man schreibt $\alpha^{+k} = (\alpha, k)$ für $\alpha \in \mathbf{Z}_\infty$ und $k \in \mathbf{Z}$.

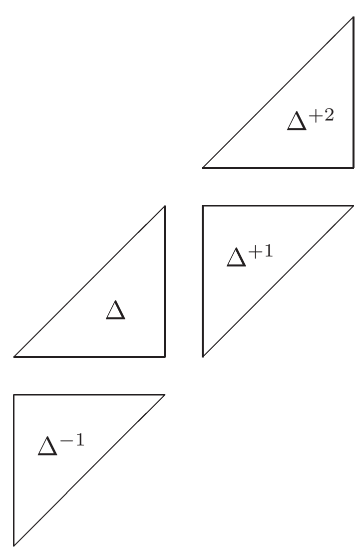
Sei nun

$$\bar{\mathbf{Z}}_\infty^\# := \{(\alpha, \beta) \in \bar{\mathbf{Z}}_\infty \times \bar{\mathbf{Z}}_\infty \;:\; \beta^{-1} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha^{+1}\}\ .$$

Schreibe auch $\beta/\alpha := (\alpha, \beta)$. Dies ist ein Poset via $\beta/\alpha \leqslant \beta'/\alpha'$ falls $\alpha \leqslant \alpha'$ und $\beta \leqslant \beta'$. Es trägt den Posetautomorphismus

$$\beta/\alpha \longmapsto (\beta/\alpha)^{+1} := \alpha^{+1}/\beta\ .$$

Setzen wir $\Delta := \{\beta/\alpha \in \bar{\mathbf{Z}}_\infty^\# \;:\; -\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \infty\}$, so ergibt sich schematisch folgendes Bild von $\bar{\mathbf{Z}}_\infty^\#$.



So etwa befinden sich auf der horizontalen Linie von Δ die Elemente der Form $\beta/{-\infty}$, und auf der vertikalen die Elemente der Form ∞/α, wobei $\alpha,\ \beta \in \mathbf{Z}_\infty$. Gegenüber, auf der vertikalen Linie von Δ^{+1}, befinden sich die Elemente der Form $-\infty^{+1}/\beta$. Auf der horizontalen Linie von Δ^{+1} befinden sich die Elemente der Form α^{+1}/∞. Usf.

4.1.2.2 Die Objekte des Diagramms Sp(X)

Sei X ein punktweise split und endlich filtrierter Komplex von R-Moduln. Wir wollen damit das *Spektralobjekt* $\mathrm{Sp}(X) \in \mathrm{Ob}\,[\![\bar{\mathbf{Z}}_\infty^\#, \mathrm{K}(R\text{-Mod})]\!]$ von X konstruieren. Dies ist also ein Diagramm der Form $\bar{\mathbf{Z}}_\infty^\#$ mit Werten in den Komplexen von R-Moduln, wobei die Diagrammkommutativitäten nur bis auf Homotopie gelten. Die Objekte dieses Diagramms $\mathrm{Sp}(X)$ sollen mit $X(\beta/\alpha)$, wobei $\beta/\alpha \in \bar{\mathbf{Z}}_\infty^\#$, die Morphismen alle einfach mit x bezeichnet werden.

Seien $\alpha,\ \beta \in \mathbf{Z}_\infty$ mit $\alpha \leqslant \beta$. Dann ist $\beta/\alpha \in \bar{\mathbf{Z}}_\infty^\#$. Sei

$$X(\beta/\alpha) \ := \ \mathrm{Cokern}\left(X(\alpha) \xrightarrow{x} X(\beta)\right) .$$

Dieser Cokern ist punktweise zu nehmen. D.h. es ist

$$X(\beta/\alpha)^i \ = \ \bigoplus_{\sigma \in]\alpha,\beta]} \bar{X}(\sigma)^i$$

für $i \in \mathbf{Z}$. Das Differential wird entsprechend

$$\left(X(\beta/\alpha)^i \xrightarrow{d} X(\beta/\alpha)^{i+1}\right) \ = \ \left(\bigoplus_{\sigma \in]\alpha,\beta]} \bar{X}(\sigma)^i \xrightarrow{(d^i_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau}} \bigoplus_{\tau \in]\alpha,\beta]} \bar{X}(\tau)^{i+1}\right) .$$

Es ist etwa $X(\alpha/-\infty) = X(\alpha)$ für $\alpha \in \mathbf{Z}_\infty$; sowie $X(\alpha/\alpha-1) = \bar{X}(\alpha)$ für $\alpha \in \mathbf{Z}$.

Wir können auch $X(\beta/\alpha) = X(\beta)/X(\alpha)$ schreiben. Dies erkläre die Schreibweise β/α.

Wir setzen nun noch

$$X(\beta/\alpha)^{+k} \ = \ X\big((\beta/\alpha)^{+k}\big) \ := \ X(\beta/\alpha)[k]$$

für $k \in \mathbf{Z}$ und $\alpha,\ \beta \in \mathbf{Z}_\infty$ mit $\alpha \leqslant \beta$. Damit sind alle Objekte von $\mathrm{Sp}(X)$ definiert. Beachte, daß $X(\alpha/\alpha) = 0$ und daher auch $X(\alpha^{+1}/\alpha) = X(\alpha/\alpha)^{+1} = 0$ für $\alpha \in \bar{\mathbf{Z}}_\infty$.

4.1.2.3 Die Morphismen des Diagramms Sp(X)

Wir behalten die Bezeichnungen des vorigen Abschnitts bei.

4.1.2.3.1 Definition der Morphismen in Sp(X)

Bezeichne für $\beta/\alpha,\ \beta'/\alpha' \in \bar{\mathbf{Z}}_\infty^\#$ mit $-\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \infty$ und $-\infty \leqslant \alpha' \leqslant \beta' \leqslant \infty$, und für $i \in \mathbf{Z}$

$$D^i_{\beta/\alpha,\,\beta'/\alpha'} \ := \ \left(d^i_{\sigma,\tau}\right)_{\sigma \in]\alpha,\beta],\ \tau \in]\alpha',\beta']} \ : \ X(\beta/\alpha)^i \longrightarrow X(\beta'/\alpha')^{i+1} .$$

So z.B. ist $D^i_{\beta/\alpha,\,\beta/\alpha}$ das Differential des Komplexes $X(\beta/\alpha)$ an der Stelle i. Allgemein ist $D^i_{\beta/\alpha,\,\beta'/\alpha'}$ "die passend ausgeschnittene" Teilmatrix der unteren Dreiecksmatrix $X(\infty)^i \xrightarrow{d} X(\infty)^{i+1}$.

Seien nun $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{Z}_\infty$ mit $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ gegeben. Dann sind β/α, γ/α, $\gamma/\beta \in \bar{\mathbf{Z}}^{\#}_\infty$. Für $i \in \mathbf{Z}$ ist $X(\gamma/\alpha)^i = X(\beta/\alpha)^i \oplus X(\gamma/\beta)^i$. Setze

$$
\begin{array}{rcl}
\Big(X(\beta/\alpha)^i \xrightarrow{x^i} X(\gamma/\alpha)^i\Big) & := & \Big(X(\beta/\alpha)^i \xrightarrow{(1\,0)} X(\beta/\alpha)^i \oplus X(\gamma/\beta)^i\Big) \\
\Big(X(\gamma/\alpha)^i \xrightarrow{x^i} X(\gamma/\beta)^i\Big) & := & \Big(X(\beta/\alpha)^i \oplus X(\gamma/\beta)^i \xrightarrow{\binom{0}{1}} X(\gamma/\beta)^i\Big) \\
\Big(X(\gamma/\beta)^i \xrightarrow{x^i} X(\alpha^{+1}/\beta)^i\Big) & := & \Big(X(\gamma/\beta)^i \xrightarrow{D^i_{\gamma/\beta,\,\beta/\alpha}} X(\beta/\alpha)^{i+1}\Big)
\end{array}
$$

Die ersten beiden setzen sich zu Komplexmorphismen $X(\beta/\alpha) \xrightarrow{x} X(\gamma/\alpha)$ resp. $X(\gamma/\alpha) \xrightarrow{x} X(\gamma/\beta)$ zusammen, da $d^i_{\sigma,\tau} = 0$ für $\sigma < \tau$. Verifizieren wir, daß auch letztere sich zu einem Komplexmorphismus $X(\gamma/\beta) \xrightarrow{x} X(\alpha^{+1}/\beta) = X(\beta/\alpha)[1]$ zusammensetzen. Wir haben dazu zu zeigen, daß das Viereck

$$
\begin{tikzcd}
X(\gamma/\beta)^i \arrow[r, "D^i_{\gamma/\beta,\,\beta/\alpha}"] \arrow[d, "D^i_{\gamma/\beta,\,\gamma/\beta}"'] & X(\beta/\alpha)^{i+1} \arrow[d, "-D^{i+1}_{\beta/\alpha,\,\beta/\alpha}"] \\
X(\gamma/\beta)^{i+1} \arrow[r, "D^{i+1}_{\gamma/\beta,\,\beta/\alpha}"] & X(\beta/\alpha)^{i+2}
\end{tikzcd}
$$

für $i \in \mathbf{Z}$ kommutiert. Nun ist

$$
X(\gamma/\alpha)^i \;=\; X(\beta/\alpha)^i \oplus X(\gamma/\beta)^i \xrightarrow{\begin{pmatrix} D^i_{\beta/\alpha,\,\beta/\alpha} & 0 \\ D^i_{\gamma/\beta,\,\beta/\alpha} & D^i_{\gamma/\beta,\,\gamma/\beta}\end{pmatrix}} X(\beta/\alpha)^{i+1} \oplus X(\gamma/\beta)^{i+1} \;=\; X(\gamma/\alpha)^{i+1}
$$

gerade das Differential von $X(\gamma/\alpha)$ an dieser Stelle, und die Differentialbedingung $\begin{pmatrix} D^i_{\beta/\alpha,\,\beta/\alpha} & 0 \\ D^i_{\gamma/\beta,\,\beta/\alpha} & D^i_{\gamma/\beta,\,\gamma/\beta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} D^{i+1}_{\beta/\alpha,\,\beta/\alpha} & 0 \\ D^{i+1}_{\gamma/\beta,\,\beta/\alpha} & D^{i+1}_{\gamma/\beta,\,\gamma/\beta}\end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ für $X(\gamma/\alpha)$ liefert insbesondere, daß

$$
D^i_{\gamma/\beta,\,\beta/\alpha}\, D^{i+1}_{\beta/\alpha,\,\beta/\alpha} + D^i_{\gamma/\beta,\,\gamma/\beta}\, D^{i+1}_{\gamma/\beta,\,\beta/\alpha} \;=\; 0\;.
$$

Somit haben wir den folgenden Teil des zu definierenden Diagramms $\mathrm{Sp}(X)$ konstruiert.

$$
\begin{tikzcd}
 & X(\gamma/\beta) \arrow[r, "x"] & X(\alpha^{+1}/\beta) \\
X(\beta/\alpha) \arrow[r, "x"] & X(\gamma/\alpha) \arrow[u, "x"'] &
\end{tikzcd}
$$

Sei das Diagramm $\mathrm{Sp}(X)$ nun auch periodisch bis auf Shift bezüglich der Morphismen, i.e. stipulieren wir

$$
\Big(X(\beta/\alpha)^{+k} \xrightarrow{x} X(\beta'/\alpha')^{+k}\Big) \;=\; \Big(X(\beta/\alpha) \xrightarrow{x} X(\beta'/\alpha')\Big)[k]
$$

für $k \in \mathbf{Z}$ und $\beta/\alpha,\ \beta'/\alpha' \in \bar{\mathbf{Z}}_{\infty}^{\#}$ mit $\beta/\alpha \leqslant \beta'/\alpha'$. Dies legt alle Diagrammorphismen fest.

4.1.2.3.2 Diagrammkommutativitäten

Unter Verwendung der Periodizität genügt es zur Konstruktion von $\mathrm{Sp}(X)$, für die angegebenen Morphismen zu verifizieren, daß untenstehende Bedingungen (i - v) gelten. Denn dann ist der Morphismus von einem Objekt im Diagramm zu einem Objekt im Diagramm mit größerem Index als Komposition entlang eines beliebigen aus horizontalen und vertikalen Stücken zusammengesetzten Weges im Diagramm definierbar, da diese Setzung dann unabhängig von der Wahl dieses Weges ist.

(i) Es ist

$$\Big(X(\beta/\alpha) \xrightarrow{x} X(\gamma/\alpha) \xrightarrow{x} X(\delta/\alpha)\Big) \;=\; \Big(X(\beta/\alpha) \xrightarrow{x} X(\delta/\alpha)\Big)$$

in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$ für $-\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \infty$.

(ii) Es ist

$$\Big(X(\delta/\alpha) \xrightarrow{x} X(\delta/\beta) \xrightarrow{x} X(\delta/\gamma)\Big) \;=\; \Big(X(\delta/\alpha) \xrightarrow{x} X(\delta/\gamma)\Big)$$

in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$ für $-\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \infty$.

(iii) Es ist

$$\Big(X(\beta/\alpha) \xrightarrow{x} X(\gamma/\alpha) \xrightarrow{x} X(\delta/\alpha) \xrightarrow{x} X(\varepsilon/\alpha)\Big) \;=\; \Big(X(\beta/\alpha) \xrightarrow{x} X(\varepsilon/\alpha)\Big)$$

in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$ für $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \infty \leqslant -\infty^{+1} \leqslant \delta \leqslant \varepsilon \leqslant \alpha^{+1}$.

(iv) Es kommutiert

$$\begin{tikzcd} X(\gamma/\beta) \arrow[r, "x"] & X(\delta/\beta) \\ X(\gamma/\alpha) \arrow[u, "x"] \arrow[r, "x"] & X(\delta/\alpha) \arrow[u, "x"'] \end{tikzcd}$$

in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$ für $-\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \infty$.

(v) Es kommutiert

$$\begin{tikzcd} X(\gamma/\beta) \arrow[r, "x"] & X(\delta/\beta) \\ X(\gamma/\alpha) \arrow[u, "x"] \arrow[r, "x"] & X(\delta/\alpha) \arrow[u, "x"'] \end{tikzcd}$$

in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$ für $\delta^{-1} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \infty \leqslant -\infty^{+1} \leqslant \delta \leqslant \alpha^{+1}$.

Zu (i). Bei $i \in \mathbf{Z}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left(X(\beta/\alpha)^i \xrightarrow{(1\,0)} X(\beta/\alpha)^i \oplus X(\gamma/\beta)^i \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0 \end{smallmatrix}\right)} X(\beta/\alpha)^i \oplus X(\gamma/\beta)^i \oplus X(\delta/\gamma)^i \right) \\ = \quad & \left(X(\beta/\alpha)^i \xrightarrow{(1\,0\,0)} X(\beta/\alpha)^i \oplus X(\gamma/\beta)^i \oplus X(\delta/\gamma)^i \right) . \end{aligned}$$

Diese Kommutativität gilt also bereits in C(R-Mod).

Zu (ii). Bei $i \in \mathbf{Z}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left(X(\beta/\alpha)^i \oplus X(\gamma/\beta)^i \oplus X(\delta/\gamma)^i \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0&0\\ 1&0\\ 0&1 \end{smallmatrix}\right)} X(\gamma/\beta)^i \oplus X(\delta/\gamma)^i \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0\\ 1 \end{smallmatrix}\right)} X(\delta/\gamma)^i \right) \\ = \quad & \left(X(\beta/\alpha)^i \oplus X(\gamma/\beta)^i \oplus X(\delta/\gamma)^i \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{smallmatrix}\right)} X(\delta/\gamma)^i \right) . \end{aligned}$$

Diese Kommutativität gilt also bereits in C(R-Mod).

Zu (iii). Bei $i \in \mathbf{Z}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left(X(\beta/\alpha)^i \xrightarrow{(1\,0)} X(\beta/\alpha)^i \oplus X(\gamma/\beta)^i \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} * & D^i_{\beta/\alpha,\,\alpha/\varepsilon^{-1}}\\ * & * \end{smallmatrix}\right)} X(\varepsilon^{-1}/\delta^{-1})^{i+1} \oplus X(\alpha/\varepsilon^{-1})^{i+1} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0\\ 1 \end{smallmatrix}\right)} X(\alpha/\varepsilon^{-1})^{i+1} \right) \\ = \quad & \left(X(\beta/\alpha)^i \xrightarrow{D^i_{\beta/\alpha,\,\alpha/\varepsilon^{-1}}} X(\alpha/\varepsilon^{-1})^{i+1} \right) . \end{aligned}$$

Diese Kommutativität gilt also bereits in C(R-Mod).

Zu (iv). Bei $i \in \mathbf{Z}$ ergibt sich das kommutative Viereck

$$\begin{tikzcd} X(\gamma/\beta)^i \arrow[r, "(1\,0)"] & X(\gamma/\beta)^i \oplus X(\delta/\gamma)^i \\ X(\beta/\alpha)^i \oplus X(\gamma/\beta)^i \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 0\\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0 \end{smallmatrix}\right)"] & X(\beta/\alpha)^i \oplus X(\gamma/\beta)^i \oplus X(\delta/\gamma)^i \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 0&0\\ 1&0\\ 0&1 \end{smallmatrix}\right)"'] \end{tikzcd} .$$

Diese Kommutativität gilt also bereits in C(R-Mod).

Zu (v). Bei $i \in \mathbf{Z}$ ergibt sich

$$\begin{tikzcd} X(\gamma/\beta)^i \arrow[r, "\left(D^i_{\gamma/\beta,\,\alpha/\delta^{-1}} \;\; D^i_{\gamma/\beta,\,\beta/\alpha} \right)"] & X(\alpha/\delta^{-1})^{i+1} \oplus X(\beta/\alpha)^{i+1} \\ X(\beta/\alpha)^i \oplus X(\gamma/\beta)^i \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 0\\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} D^i_{\beta/\alpha,\,\alpha/\delta^{-1}}\\ D^i_{\gamma/\beta,\,\alpha/\delta^{-1}} \end{smallmatrix}\right)"] & X(\alpha/\delta^{-1})^{i+1} \arrow[u, "(1\,0)"'] \end{tikzcd} .$$

Für die Differenz $\begin{pmatrix} -D^i_{\beta/\alpha,\,\alpha/\delta^{-1}} & 0 \\ 0 & D^i_{\gamma/\beta,\,\beta/\alpha} \end{pmatrix}$ konstruieren wir eine Homotopie wie folgt.

$$\begin{tikzcd}
 & X(\beta/\alpha)^i \oplus X(\gamma/\beta)^i \arrow[rr, "\begin{pmatrix} D^i_{\beta/\alpha,\,\beta/\alpha} & 0 \\ D^i_{\gamma/\beta,\,\beta/\alpha} & D^i_{\gamma/\beta,\,\gamma/\beta} \end{pmatrix}"] \arrow[dl, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[d] & & X(\beta/\alpha)^{i+1} \oplus X(\gamma/\beta)^{i+1} \arrow[dll, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \\
X(\alpha/\delta^{-1})^i \oplus X(\beta/\alpha)^i \arrow[r, "-\begin{pmatrix} D^i_{\alpha/\delta^{-1},\,\alpha/\delta^{-1}} & 0 \\ D^i_{\beta/\alpha,\,\alpha/\delta^{-1}} & D^i_{\beta/\alpha,\,\beta/\alpha} \end{pmatrix}"'] & X(\alpha/\delta^{-1})^{i+1} \oplus X(\beta/\alpha)^{i+1} & &
\end{tikzcd} ,$$

dies fortgesetzt für alle $i \in \mathbf{Z}$.

4.1.2.4 Stationäres Verhalten

Für alle $i \in \mathbf{Z}$ gibt es so ein $\alpha_1 \in \mathbf{Z}$, daß

$$\mathrm{H}^i(X(\alpha/\xi)) \xrightarrow{\mathrm{H}^i(x)} \mathrm{H}^i(X(\beta/\xi))$$

eine Identität ist für alle $\alpha,\, \beta,\, \xi \in \mathbf{Z}_\infty$ mit $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ und $\xi \leqslant \alpha$. Insbesondere ist dann $\mathrm{H}^i(X(\alpha/\xi)) = \mathrm{H}^i(X(\infty/\xi))$.

In der Tat genügt hierfür, daß $X(\alpha/\xi)^j \xrightarrow{x^j} X(\beta/\xi)^j$ eine Identität ist für alle $j \in \{i-1,\, i,\, i+1\}$.

Dual, für alle $i \in \mathbf{Z}$ gibt es so ein $\beta_1 \in \mathbf{Z}$, daß

$$\mathrm{H}^i(X(\eta/\alpha)) \xrightarrow{\mathrm{H}^i(x)} \mathrm{H}^i(X(\eta/\beta))$$

eine Identität ist für alle $\alpha,\, \beta,\, \eta \in \mathbf{Z}_\infty$ mit $\alpha \leqslant \beta \leqslant \beta_1$ und $\beta \leqslant \eta$. Insbesondere ist dann $\mathrm{H}^i(X(\eta/\beta)) = \mathrm{H}^i(X(\eta/-\infty))$.

4.1.3 Ein vierfach indiziertes Diagramm aus einem Spektralobjekt – die Spektralsequenz

4.1.3.1 Die zugrundeliegende Kombinatorik

Sei

$$\bar{\mathbf{Z}}^{\#\#}_\infty \;:=\; \{(\gamma/\alpha,\, \delta/\beta) \in \bar{\mathbf{Z}}^{\#}_\infty \times \bar{\mathbf{Z}}^{\#}_\infty \;:\; \delta^{-1} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \alpha^{+1}\}\,.$$

Wir schreiben üblicherweise $\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha := (\gamma/\alpha,\, \delta/\beta)$.

Beachte in dem Ausdruck $\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha$ insbesondere die "verschränkten" Bedingungen $\beta \leqslant \gamma$ und $\delta \leqslant \alpha^{+1}$.

Es ist $\bar{\mathbf{Z}}_\infty^{\#\#}$ ein Poset via $\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha \leqslant \delta'/\beta' /\!\!/ \gamma'/\alpha'$ falls $\gamma/\alpha \leqslant \gamma'/\alpha'$ und $\delta/\beta \leqslant \delta'/\beta'$.

> Man mache nicht den Versuch, sich dieses Ungetüm $\bar{\mathbf{Z}}_\infty^{\#\#}$ als ganzes vorzustellen. In der Praxis benötigt man immer nur einen kleinen Teil daraus.

Wir schreiben für $k \in \mathbf{Z}$ und $\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha \in \bar{\mathbf{Z}}_\infty^{\#\#}$

$$(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)^{+k} \;:=\; (\delta/\beta)^{+k} /\!\!/ (\gamma/\alpha)^{+k} \;\in\; \bar{\mathbf{Z}}_\infty^{\#\#}\;.$$

4.1.3.2 Die Objekte des Diagramms $\mathrm{E}(X)$

Sei X ein punktweise split und endlich filtrierter Komplex von R-Moduln. Wir haben diesem in §4.1.2 das Spektralobjekt $\mathrm{Sp}(X) \in \mathrm{Ob}\,[\![\bar{\mathbf{Z}}_\infty^{\#}, \mathrm{K}(R\text{-Mod})]\!]$ zugeordnet.

Wir wollen ausgehend von diesem die *Spektralsequenz* $\mathrm{E}(X) \in \mathrm{Ob}\,[\![\bar{\mathbf{Z}}_\infty^{\#\#}, R\text{-Mod}\,]\!]$ definieren. Setze dazu

$$\mathrm{E}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha) \;=\; \mathrm{E}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)(X) \;:=\; \mathrm{Im}\left(\mathrm{H}^0\Big(\; X(\gamma/\alpha) \;\xrightarrow{\;x\;}\; X(\delta/\beta)\;\Big)\right) \;\in\; \mathrm{Ob}\,R\text{-Mod}$$

für ihr Objekt an der Stelle $\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha \;\in\; \bar{\mathbf{Z}}_\infty^{\#\#}$. Beachte hierzu, daß der Funktor $\mathrm{K}(R\text{-Mod}) \xrightarrow{\mathrm{H}^0} R\text{-Mod}$ wohldefiniert ist.

Wir schreiben für $k \in \mathbf{Z}$ auch

$$\mathrm{E}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)^{+k} \;:=\; \mathrm{E}\big((\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)^{+k}\big) \;=\; \mathrm{E}\big((\delta/\beta)^{+k} /\!\!/ (\gamma/\alpha)^{+k}\big)\;,$$

dabei bezieht sich also $+k$ auf $\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha$, nicht auf das Objekt $\mathrm{E}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)$ an dieser Stelle – dies wäre auch gar nicht möglich. Beachte, daß $\mathrm{E}(\gamma/\alpha /\!\!/ \gamma/\alpha)^{+k} = \mathrm{H}^k(X(\gamma/\alpha))$.

> Sind δ/β, $\gamma/\alpha \in \bar{\mathbf{Z}}_\infty^{\#}$ mit $\gamma/\alpha \leqslant \delta/\beta$ gegeben, ohne daß $\delta^{-1} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \alpha^{+1}$ gilt, so ist der Morphismus $X(\gamma/\alpha) \xrightarrow{x} X(\delta/\beta)$ ohnehin gleich Null in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$.

Beispiel. Seien α, β, $\gamma \in \bar{\mathbf{Z}}_\infty$ mit $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \alpha^{+1}$ gegeben.

(i) Es ist $\mathrm{E}(\gamma/\beta /\!\!/ \beta/\alpha) = 0$. Denn der Morphismus $X(\beta/\alpha) \xrightarrow{x} X(\gamma/\beta)$, dessen Homologie das Bild $\mathrm{E}(\gamma/\beta /\!\!/ \beta/\alpha)$ hat, faktorisiert über $X(\beta/\beta) = 0$.

(ii) Es ist $\mathrm{E}(\gamma/\alpha /\!\!/ \beta/\gamma^{-1}) = 0$. Denn der Morphismus $X(\beta/\gamma^{-1}) \xrightarrow{x} X(\gamma/\alpha)$, dessen Homologie das Bild $\mathrm{E}(\gamma/\alpha /\!\!/ \beta/\gamma^{-1})$ hat, faktorisiert über $X(\gamma/\gamma^{-1}) = 0$.

4.1.3.3 Die Morphismen des Diagramms $\mathrm{E}(X)$

Wir behalten die Bezeichnungen des vorigen Abschnitts bei.

Sei $\delta/\beta/\!\!/\gamma/\alpha \leqslant \delta'/\beta'/\!\!/\gamma'/\alpha'$ in $\bar{\mathbf{Z}}_\infty^{\#\#}$. Sei der Morphismus $\mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\gamma/\alpha) \xrightarrow{e} \mathrm{E}(\delta'/\beta'/\!\!/\gamma'/\alpha')$ charakterisiert durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0\big(X(\gamma/\alpha)\big) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\mathrm{H}^0(x)"'] & \mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\gamma/\alpha) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "e"'] & \mathrm{H}^0\big(X(\delta/\beta)\big) \arrow[d, "\mathrm{H}^0(x)"'] \\
\mathrm{H}^0\big(X(\gamma'/\alpha')\big) \arrow[r, tail] & \mathrm{E}(\delta'/\beta'/\!\!/\gamma'/\alpha') \arrow[r, two heads] & \mathrm{H}^0\big(X(\delta'/\beta')\big) .
\end{tikzcd}$$

4.1.3.4 Eine kurz exakte Sequenz

Lemma 1 *Wir haben eine lang exakte Sequenz*

$$\begin{array}{llllll}
 & & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{H}^0(x)} & \mathrm{H}^0\big(X(\gamma/\beta)^{-1}\big) & \xrightarrow{\mathrm{H}^0(x)} \\
\mathrm{H}^0\big(X(\beta/\alpha)\big) & \xrightarrow{\mathrm{H}^0(x)} & \mathrm{H}^0\big(X(\gamma/\alpha)\big) & \xrightarrow{\mathrm{H}^0(x)} & \mathrm{H}^0\big(X(\gamma/\beta)\big) & \xrightarrow{\mathrm{H}^0(x)} \\
\mathrm{H}^0\big(X(\beta/\alpha)^{+1}\big) & \xrightarrow{\mathrm{H}^0(x)} & \cdots & & &
\end{array}$$

für $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \alpha^{+1}$ *in* $\bar{\mathbf{Z}}_\infty$.

Beweis. Da in der Folge

$$\cdots \leqslant \gamma^{-1} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \alpha^{+1} \leqslant \beta^{+1} \leqslant \cdots$$

wenigstens drei aufeinanderfolgende Terme in $\mathbf{Z}_\infty$ liegen, können wir $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbf{Z}_\infty$ annehmen.

Beachte nun, daß $\mathrm{H}^0\big(X((\alpha/\beta)^{+k})\big) = \mathrm{H}^0\big(X(\alpha/\beta)[k]\big) = \mathrm{H}^k\big(X(\alpha/\beta)\big)$ für $k \in \mathbf{Z}$. Da wir eine (punktweise split) kurz exakte Sequenz von Komplexen $X(\beta/\alpha) \xrightarrow{x} X(\gamma/\alpha) \xrightarrow{x} X(\gamma/\beta)$ haben, bleibt für eine Anwendung von Aufgabe 20.(1) zu zeigen, daß

$$\mathrm{H}^i\big(X(\gamma/\beta)\big) \xrightarrow{\mathrm{H}^i(x)} \mathrm{H}^i\big(X(\beta/\alpha)^{+1}\big) = \mathrm{H}^{i+1}\big(X(\beta/\alpha)\big)$$

für $i \in \mathbf{Z}$ gerade den in loc. cit. definierten Verbindungsmorphismus darstellt.

Repräsentiere hierzu $w \in X(\gamma/\beta)^i$ ein Element in $\mathrm{H}^i\big(X(\gamma/\beta)\big)$, i.e. verschwinde es unter dem Differential. Als Urbild von w in $X(\gamma/\alpha)^i = X(\beta/\alpha)^i \oplus X(\gamma/\beta)^i$ können wir $(\,0\ w\,)$ wählen. Unter dem Differential $\begin{pmatrix} D^i_{\beta/\alpha,\,\beta/\alpha} & 0 \\ D^i_{\gamma/\beta,\,\beta/\alpha} & D^i_{\gamma/\beta,\,\gamma/\beta} \end{pmatrix}$ kommt dieses auf $\big(\,wD^i_{\gamma/\beta,\,\beta/\alpha}\ \ 0\,\big)$, welches in der Tat das Urbild $wD^i_{\gamma/\beta,\,\beta/\alpha} = wx$ in $X(\beta/\alpha)^{i+1}$ hat. $\square$

Ein kommutatives Viereck

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "v'"] & C' \\ B \arrow[u, "b"] \arrow[r, "v"] & C \arrow[u, "c"'] \end{tikzcd}$$

in R-Mod heiße *weiches Quadrat,* wenn die Sequenz

$$B \xrightarrow{(b\ v)} B' \oplus C \xrightarrow{\binom{v'}{-c}} C'$$

exakt bei $B' \oplus C$ ist. Elementweise ausgedrückt, sind $m \in B'$ und $n \in C$ so gegeben, daß $mv' = nc$, dann gebe es ein $k \in B$ mit $kb = m$ und $kv = n$.

Ist (B, C, B', C') ein weiches Quadrat, so auch das gespiegelte kommutative Viereck (B, B', C, C').

Weiche Quadrate werden auch mit einem Symbol + als solche gekennzeichnet.

Lemma 2 *Gegeben sei*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "u'"] & B' \arrow[r, "v'"] & C' \\ A \arrow[u, "a"] \arrow[r, "u"] \arrow[ur, phantom, "+"] & B \arrow[u, "b"] \arrow[r, "v"] \arrow[ur, phantom, "+"] & C \arrow[u, "c"] \end{tikzcd}$$

in R-Mod. *Dann ist auch* (A, C, A', C') *ein weiches Quadrat.*

Beweis. Seien $s \in A'$ und $t \in C$ so, daß $su'v' = tc$. Dann gibt es ein $k \in B$ mit $kb = su'$ und $kv = t$. Dann gibt es ein $\ell \in A$ mit $\ell u = k$ und $\ell a = s$. Insgesamt ist also $\ell uv = t$ und $\ell a = s$. $\square$

Lemma 3 *Sei ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "v'"] & C' \arrow[r, "w'"] & D' \\ A \arrow[u] \arrow[r, "u"] & B \arrow[u, "b"] \arrow[r, "v"] & C \arrow[u, "c"'] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

in R-Mod *so gegeben, daß* $(A, C, 0, C')$ *und* $(B, 0, B', D')$ *weiche Quadrate sind. Dann ist auch* (B, C, B', C') *ein weiches Quadrat.*

Beweis. Seien $m \in B'$ und $n \in C$ so gegeben, daß $mv' = nc$. Da $mv'w' = ncw' = 0$, gibt es ein $k_0 \in B$ so, daß $k_0 b = m$. Da nun $(k_0 v - n)c = k_0 bv' - mv' = 0$, gibt es ein $\ell \in A$ so, daß $\ell uv = k_0 v - n$. Setzen wir $k := k_0 - \ell u \in B$, so erhalten wir $kb = k_0 b - \ell ub = m$ und $kv = k_0 v - \ell uv = n$. $\square$

Lemma 4 *Sind* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \bar{\mathbf{Z}}_\infty$ *mit* $\delta^{-1} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \alpha^{+1}$ *gegeben, so ist*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0\big(X(\gamma/\beta)\big) \arrow[r, "\mathrm{H}^0(x)"] & \mathrm{H}^0\big(X(\delta/\beta)\big) \\
\mathrm{H}^0\big(X(\gamma/\alpha)\big) \arrow[r, "\mathrm{H}^0(x)"] \arrow[u, "\mathrm{H}^0(x)"] & \mathrm{H}^0\big(X(\delta/\alpha)\big) \arrow[u, "\mathrm{H}^0(x)"']
\end{tikzcd}$$

ein weiches Quadrat.

Beweis. Dies folgt unter Betrachtung von

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0\big(X(\gamma/\beta)\big) \arrow[r, "\mathrm{H}^0(x)"] & \mathrm{H}^0\big(X(\delta/\beta)\big) \arrow[r, "\mathrm{H}^0(x)"] & \mathrm{H}^0\big(X(\alpha^{+1}/\beta)\big) \\
\mathrm{H}^0\big(X(\beta/\alpha)\big) \arrow[r, "\mathrm{H}^0(x)"] \arrow[u] & \mathrm{H}^0\big(X(\gamma/\alpha)\big) \arrow[r, "\mathrm{H}^0(x)"] \arrow[u, "\mathrm{H}^0(x)"] & \mathrm{H}^0\big(X(\delta/\alpha)\big) \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{H}^0(x)"'] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

mit Lemma 3, dessen Voraussetzungen nach Lemma 1 erfüllt sind. □

Lemma 5 *Sei*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B'' \arrow[r, "v''"] & C'' \\
A' \arrow[r, "u'"] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "+"] & B' \arrow[r, "v'"] \arrow[u, "b'"'] \arrow[ur, phantom, "+"] & C' \arrow[u, "c'"'] \\
A \arrow[r, "u"] \arrow[u, "a"] \arrow[ur, phantom, "+"] & B \arrow[r, "v"] \arrow[u, "b"'] \arrow[ur, phantom, "+"] & C \arrow[u, "c"']
\end{tikzcd}$$

in R-Mod *gegeben. Die auf den Bildern induzierten Morphismen liefern eine kurz exakte Sequenz*

$$\mathrm{Im}(au'v') \longrightarrow \mathrm{Im}(bv') \longrightarrow \mathrm{Im}(bb'v'')\ .$$

Beweis. Da $au'v' = u(bv')$, ist $\mathrm{Im}(au'v') \longrightarrow \mathrm{Im}(bv')$ monomorph. Da $bb'v'' = (bv')c'$, ist $\mathrm{Im}(bv') \longrightarrow \mathrm{Im}(bb'v'')$ epimorph. Prüfen wir, daß die Komposition verschwindet. Sei hierzu $\ell \in A$ gegeben, und betrachte $\ell au'v' = \ell ubv' \in \mathrm{Im}(au'v')$. Wir bilden es ab auf sich selbst in $\mathrm{Im}(bv')$, und sodann nach $\ell au'v'c' = 0$ in $\mathrm{Im}(bb'v'')$. Prüfen wir schließlich die Exaktheit in $\mathrm{Im}(bv')$. Sei $k \in B$, sei also $kbv' \in \mathrm{Im}(bv')$, und sei $kbv'c' = 0$, i.e. $kvcc' = 0$. Nach Lemma 2 ist $(A, C, 0, C'')$ ein weiches Quadrat. Also gibt es ein $\ell \in A$ mit $\ell uv = kv$. Nach Lemma 2 ist $(A, B, 0, B'')$ ein weiches Quadrat. Also gibt es ein $\ell' \in A$ mit $\ell' u = \ell u - k$. Es folgt

$$(\ell - \ell')au'v' \;=\; (\ell - \ell')uvc \;=\; kvc \;=\; kbv'\ ,$$

und somit liegt kbv' in der Tat in $\mathrm{Im}(au'v')$. □

Satz. *Für* $\varepsilon^{-1} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \varepsilon \leqslant \alpha^{+1}$ *in* $\bar{\mathbf{Z}}_\infty$ *haben wir die kurz exakte Sequenz*

$$\boxed{\mathrm{E}(\varepsilon/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha) \xrightarrow{e} \mathrm{E}(\varepsilon/\beta /\!\!/ \delta/\alpha) \xrightarrow{e} \mathrm{E}(\varepsilon/\gamma /\!\!/ \delta/\alpha)}\ .$$

Sie heiße eine *Fundamentalsequenz (in erster Notation)* von $\mathrm{E}(X)$.

Beweis. Wir wenden Lemma 5 auf das folgende Diagramm an, welches nach Lemma 4 die eingetragenenen weichen Quadrate enthält.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0\big(X(\delta/\gamma)\big) \arrow[r, "\mathrm{H}^0(x)"] & \mathrm{H}^0\big(X(\varepsilon/\gamma)\big) \\
\mathrm{H}^0\big(X(\gamma/\beta)\big) \arrow[u] \arrow[r, "\mathrm{H}^0(x)"] \arrow[ur, phantom, "+"] & \mathrm{H}^0\big(X(\delta/\beta)\big) \arrow[u, "\mathrm{H}^0(x)"'] \arrow[r, "\mathrm{H}^0(x)"] \arrow[ur, phantom, "+"] & \mathrm{H}^0\big(X(\varepsilon/\beta)\big) \arrow[u, "\mathrm{H}^0(x)"'] \\
\mathrm{H}^0\big(X(\gamma/\alpha)\big) \arrow[u, "\mathrm{H}^0(x)"] \arrow[r, "\mathrm{H}^0(x)"] \arrow[ur, phantom, "+"] & \mathrm{H}^0\big(X(\delta/\alpha)\big) \arrow[u, "\mathrm{H}^0(x)"'] \arrow[r, "\mathrm{H}^0(x)"] \arrow[ur, phantom, "+"] & \mathrm{H}^0\big(X(\varepsilon/\alpha)\big) \arrow[u, "\mathrm{H}^0(x)"']
\end{tikzcd}$$

Korollar. *Für $\varepsilon^{-1} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \varepsilon \leqslant \alpha^{+1}$ in $\bar{\mathbf{Z}}_\infty$ haben wir die kurz exakte Sequenz*

$$\boxed{\mathrm{E}(\varepsilon/\gamma/\!\!/\delta/\alpha) \xrightarrow{e} \mathrm{E}(\varepsilon/\gamma/\!\!/\delta/\beta) \xrightarrow{e} \mathrm{E}(\alpha^{+1}/\gamma/\!\!/\delta/\beta)}\ .$$

Sie heiße eine *Fundamentalsequenz (in zweiter Notation)* von $\mathrm{E}(X)$.

Beweis. Wenden wir auf $\mathrm{Sp}(X)$ zunächst den vom Shift $\eta/\xi \longmapsto \xi^{+1}/\eta$ auf $\bar{\mathbf{Z}}_\infty$ auf der Kategorie $[\![\bar{\mathbf{Z}}_\infty^{\#}, R\text{-Mod}]\!]$ induzierten Funktor an; bemerken wir, daß die Aussage von Lemma 4 auch für dieses geshiftete Diagramm gilt; und bemerken wir, daß dies genügt, um die Aussage des vorstehenden Satzes für das geshiftete Diagramm zu erhalten, so ergibt sich die kurz exakte Sequenz

$$\mathrm{E}(\beta'^{+1}/\varepsilon'/\!\!/\alpha'^{+1}/\gamma') \xrightarrow{e} \mathrm{E}(\beta'^{+1}/\varepsilon'/\!\!/\alpha'^{+1}/\delta') \xrightarrow{e} \mathrm{E}(\gamma'^{+1}/\varepsilon'/\!\!/\alpha'^{+1}/\delta')$$

für $\varepsilon'^{-1} \leqslant \alpha' \leqslant \beta' \leqslant \gamma' \leqslant \delta' \leqslant \varepsilon' \leqslant \alpha'^{+1}$ in $\bar{\mathbf{Z}}_\infty$. Wir verwenden dies für $\alpha =: \gamma'$, $\beta =: \delta'$, $\gamma =: \varepsilon'$, $\delta =: \alpha'^{+1}$ und $\varepsilon =: \beta'^{+1}$. ▫

Bemerkung. Wann immer die ersten beiden Indizes von $\mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\gamma/\alpha)$ erhöht werden, entsteht ein Epimorphismus. Wann immer die letzten beiden Indizes von $\mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\gamma/\alpha)$ erhöht werden, entsteht ein Monomorphismus. Diese Folgerung aus der Fundamentalsequenz in erster und zweiter Notation werden wir kommentarlos verwenden.

4.1.4 Spektralsequenzterme als Homologiemoduln

Sei X ein punktweise split und endlich filtrierter Komplex von R-Moduln. Wir betrachten seine Spektralsequenz $\mathrm{E} = \mathrm{E}(X)$.

Homologielemma. *Sei $\vartheta^{-1} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \varepsilon \leqslant \zeta \leqslant \eta \leqslant \vartheta \leqslant \alpha^{+1}$ in $\bar{\mathbf{Z}}_\infty$. Sei $k \in \mathbf{Z}$. Die Homologie von*

$$\mathrm{E}(\vartheta/\zeta/\!\!/\eta/\varepsilon)^{+k-1} \xrightarrow{e} \mathrm{E}(\zeta/\delta/\!\!/\varepsilon/\gamma)^{+k} \xrightarrow{e} \mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\gamma/\alpha)^{+k+1}$$

an der mittleren Stelle ist gegeben durch $\mathrm{E}(\eta/\delta/\!\!/\varepsilon/\beta)^{+k}$.

Beweis. Wir dürfen $k = 0$ annehmen. Beachte zunächst, daß die Komposition der beiden Morphismen verschwindet, da sie über $\mathrm{E}(\eta/\vartheta^{-1}/\!\!/\varepsilon/\eta^{-1})$ faktorisiert.

Die Fundamentalsequenz in zweiter Notation liefert

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & \mathrm{E}(\eta/\delta/\!\!/\varepsilon/\beta) \arrow[dr, "\bullet" marking] & & \\
 & \mathrm{E}(\zeta/\delta/\!\!/\varepsilon/\beta) \arrow[ur, "|" marking] \arrow[dr, "\bullet" marking] & & \mathrm{E}(\eta/\delta/\!\!/\varepsilon/\gamma) & \\
\mathrm{E}(\zeta/\vartheta^{-1}/\!\!/\varepsilon/\eta^{-1}) \arrow[dr, "|" marking] & & \mathrm{E}(\zeta/\delta/\!\!/\varepsilon/\gamma) \arrow[ur, "|" marking] \arrow[dr, "|" marking] & & \mathrm{E}(\beta^{+1}/\delta/\!\!/\alpha^{+1}/\gamma) \\
 & \mathrm{E}(\zeta/\delta/\!\!/\varepsilon/\eta^{-1}) \arrow[ur, "\bullet" marking] & & \mathrm{E}(\beta^{+1}/\delta/\!\!/\varepsilon/\gamma) \arrow[ur, "\bullet" marking] &
\end{tikzcd}
$$

□

Beispiel. Sei $r \geqslant 1$. Sei $k \in \mathbf{Z}$. Sei $\alpha \in \mathbf{Z}$. Die Homologie des Komplexausschnitts

$$\mathrm{E}(\alpha{+}2r{-}1/\alpha{+}r{-}1/\!\!/\alpha{+}r/\alpha)^{+k-1} \xrightarrow{e} \mathrm{E}(\alpha{+}r{-}1/\alpha{-}1/\!\!/\alpha/\alpha{-}r)^{+k} \xrightarrow{e} \mathrm{E}(\alpha{-}1/\alpha{-}r{-}1/\!\!/\alpha{-}r/\alpha{-}2r)^{+k+1}$$

an der mittleren Stelle ist gegeben durch

$$\mathrm{E}(\alpha + r/\alpha - 1/\!\!/\alpha/\alpha - r - 1)^{+k} \ .$$

Bemerkung. Klassisch schreibt man wie folgt. Sei $r \geqslant 1$. Seien $p,\, q \in \mathbf{Z}$.

- Cohomologisch schreibt man

  $$\mathrm{E}_r^{p,q} \ = \ \mathrm{E}(-p-1+r/-p-1/\!\!/-p/-p-r)^{+p+q} \ .$$

  Mit dem Lemma ist also $\mathrm{E}_{r+1}^{p,q}$ die Homologie von $\mathrm{E}_r^{p-r,\,q+r-1} \xrightarrow{e} \mathrm{E}_r^{p,q} \xrightarrow{e} \mathrm{E}_r^{p+r,\,q-r+1}$ bei $\mathrm{E}_r^{p,q}$.

- Homologisch schreibt man

  $$\mathrm{E}^r_{p,q} \ = \ \mathrm{E}(p-1+r/p-1/\!\!/p/p-r)^{-p-q} \ .$$

  Mit dem Lemma ist also $\mathrm{E}^{r+1}_{p,q}$ die Homologie von $\mathrm{E}^r_{p+r,\,q-r+1} \xrightarrow{e} \mathrm{E}^r_{p,q} \xrightarrow{e} \mathrm{E}^r_{p-r,\,q+r-1}$ bei $\mathrm{E}^r_{p,q}$.

4.1.5 Eine Filtrierung der Homologie

Wir behalten die Bezeichnungen des vorigen Abschnitts bei.

Ist M ein R-Modul, so sei eine *endliche Filtrierung* von M eine endliche Kette von Teilmoduln von M, beginnend mit 0 und endend mit M. Das zugehörige Tupel der Quotienten zweier aufeinanderfolgender Kettenglieder wird als eine *Graduierung* von M bezeichnet.

Filtrierungslemma. *Sei $k \in \mathbf{Z}$. Seien $\alpha,\ \gamma\ \in \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Z}_\infty$.*

(1) *Es gibt eine endliche Filtrierung von $\mathrm{H}^k\big(X(\gamma/\alpha)\big)$ mit Graduierung*

$$\Big(\mathrm{E}\big(\gamma/\beta-1/\!\!/\beta/\alpha\big)^{+k}\Big)_{\beta\in]\alpha,\gamma]}\ .$$

(2) *Ist $\bar{X}(\sigma)^\ell = X(\sigma/\sigma-1)^\ell = 0$ für alle $\sigma \in \mathbf{Z}\smallsetminus]\alpha,\gamma]$ und alle $\ell \in \{k-1,\ k,\ k+1\}$, so gibt es eine endliche Filtrierung von $\mathrm{H}^k(X(\infty)) = \mathrm{E}(\infty/-\infty/\!\!/\infty/-\infty)^{+k}$ mit Graduierung*

$$\Big(\mathrm{E}\big(\gamma/\beta-1/\!\!/\beta/\alpha\big)^{+k}\Big)_{\beta\in]\alpha,\gamma]} \;=\; \Big(\mathrm{E}\big(\infty/\beta-1/\!\!/\beta/-\infty\big)^{+k}\Big)_{\beta\in]\alpha,\gamma]}\ .$$

Ferner ist $\mathrm{E}\big(\infty/\beta-1/\!\!/\beta/-\infty\big)^{+k} = 0$ für $\beta \in \mathbf{Z}\smallsetminus]\alpha,\gamma]$.

Beachte, daß für jedes $k \in \mathbf{Z}$ Elemente $\alpha,\ \gamma\ \in\ \mathbf{Z}$ wie in (2) existieren, da X punktweise endlich filtriert ist.

Beweis. Zu (1). Wir dürfen $k = 0$ annehmen. Wir haben die Filtrierung

$$0 \;=\; \mathrm{E}(\gamma/\alpha/\!\!/\alpha/\alpha) \;\subseteq\; \mathrm{E}(\gamma/\alpha/\!\!/\alpha{+}1/\alpha) \;\subseteq\; \cdots \;\subseteq\; \mathrm{E}(\gamma/\alpha/\!\!/\gamma{-}1/\alpha) \;\subseteq\; \mathrm{E}(\gamma/\alpha/\!\!/\gamma/\alpha) \;=\; \mathrm{H}^0(X(\gamma/\alpha))\ .$$

Als Fundamentalsequenz in erster Notation erhalten wir für $\beta \in]\alpha,\gamma]$

$$\mathrm{E}(\gamma/\alpha/\!\!/\beta-1/\alpha) \rightarrowtail \mathrm{E}(\gamma/\alpha/\!\!/\beta/\alpha) \twoheadrightarrow \mathrm{E}(\gamma/\beta-1/\!\!/\beta/\alpha)\ .$$

Zu (2). Wir dürfen $k = 0$ annehmen. Unter den gemachten Voraussetzungen ist $X(\infty)^\ell = X(\gamma/\alpha)^\ell$ für $\ell \in \{-1,0,+1\}$. Also wird $\mathrm{H}^0(X(\infty)) = \mathrm{H}^0(X(\gamma/\alpha))$. Mit (1) folgt die erste angegebene Graduierung.

Da $\mathrm{H}^0\big(X(\gamma/\beta{-}1)\big) = \mathrm{H}^0\big(X(\infty/\beta{-}1)\big)$ und $\mathrm{H}^0\big(X(\beta/\alpha)\big) = \mathrm{H}^0\big(X(\beta/{-}\infty)\big)$ für $\beta \in\ ]\alpha,\gamma]$, stimmt die erste angegebene Graduierung mit der zweiten überein.

Da $\mathrm{H}^0\big(X(\infty/\beta-1)\big) = 0$ für $\beta > \gamma$ und da $\mathrm{H}^0\big(X(\beta/-\infty)\big) = 0$ für $\beta \leqslant \alpha$, folgt auch noch die abschließende Verschwindeaussage. □

Diese Filtrierung der Homologie des filtrierten Komplexes $X(\infty)$ ist die in der Kapitelüberschrift angesprochene Verfeinerung. Wir werden diese Verfeinerung noch in bestimmten Situationen in der Gruppencohomologie wiederfinden, cf. §4.4.2 unten.

Sei $X \xrightarrow{f} X'$ ein Morphismus punktweise split und endlich filtrierter Komplexe von R-Moduln; i.e. seien X und X' punktweise split und endlich filtriert, und sei $X \xrightarrow{f} X'$ ein Morphismus in $[\![\mathbf{Z}_\infty, \mathrm{C}(R\text{-Mod})]\!]$. Schreibe $\mathrm{E} = \mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{E}' = \mathrm{E}(X')$. Wir haben einen induzierten Morphismus $\mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{E}'$; unter Mißbrauch der Bezeichnung wieder nur mit f bezeichnet.

Korollar. *Gegeben sei $r \geqslant 1$. Ist*

$$\mathrm{E}\big(\beta + r - 1/\beta - 1/\!\!/\beta/\beta - r\big)^{+k} \xrightarrow{f} \mathrm{E}'\big(\beta + r - 1/\beta - 1/\!\!/\beta/\beta - r\big)^{+k}$$

ein R-linearer Isomorphismus für alle $\beta \in \mathbf{Z}$ und alle $k \in \mathbf{Z}$, so ist auch

$$\mathrm{H}^k\big(X(\infty)\big) \;=\; \mathrm{E}(\infty/-\infty/\!\!/\infty/-\infty)^{+k} \xrightarrow{f} \mathrm{E}'(\infty/-\infty/\!\!/\infty/-\infty)^{+k} \;=\; \mathrm{H}^k\big(X'(\infty)\big)$$

für alle $k \in \mathbf{Z}$ ein R-linearer Isomorphismus.

Beweis. Eine Anwendung des Homologielemmas aus §4.1.4 gibt

$$\mathrm{E}\big(\beta+(r+1)-1/\beta-1/\!\!/\beta/\beta-(r+1)\big)^{+k} \xrightarrow[\sim]{f} \mathrm{E}'\big(\beta+(r+1)-1/\beta-1/\!\!/\beta/\beta-(r+1)\big)^{+k}\;,$$

eine erneute Anwendung

$$\mathrm{E}\big(\beta+(r+2)-1/\beta-1/\!\!/\beta/\beta-(r+2)\big)^{+k} \xrightarrow[\sim]{f} \mathrm{E}'\big(\beta+(r+2)-1/\beta-1/\!\!/\beta/\beta-(r+2)\big)^{+k}\;,$$

und so fort. Nach endlich vielen Schritten erhalten wir

$$\mathrm{E}\big(\infty/\beta - 1/\!\!/\beta/-\infty\big)^{+k} \xrightarrow[\sim]{f} \mathrm{E}'\big(\infty/\beta - 1/\!\!/\beta/-\infty\big)^{+k}$$

für alle $\beta \in \mathbf{Z}$. Der fragliche Isomorphismus folgt nun mit dem Filtrierungslemma und einer iterierten Anwendung von Aufgabe 20.(2). $\square$

Beispiel. Im Fall $r = 1$ ist für $k \in \mathbf{Z}$ nach Definition

$$\mathrm{H}^k(X(\beta/\beta-1)) \;=\; \mathrm{E}\big(\beta/\beta-1/\!\!/\beta/\beta-1\big)^{+k}\;,$$

und genauso für X' und E'. Ist

$$\mathrm{H}^k(X(\beta/\beta-1)) \xrightarrow{f} \mathrm{H}^k(X'(\beta/\beta-1))$$

ein R-linearer Isomorphismus für alle $\beta \in \mathbf{Z}$ und alle $k \in \mathbf{Z}$, so ist mit dem Korollar also auch

$$\mathrm{H}^k(X(\infty)) \xrightarrow{f} \mathrm{H}^k(X'(\infty))$$

ein R-linearer Isomorphismus für alle $k \in \mathbf{Z}$.

Dieser Spezialfall folgt nun ebenfalls aus einer iterierten Anwendung der lang exakten Homologiesequenz aus Aufgabe 20.(1) auf die (punktweise split) kurz exakten Sequenzen

$$X(\beta-1) \longrightarrow X(\beta) \longrightarrow X(\beta/\beta-1)\;,$$

für $\beta \in \mathbf{Z}$, wobei für ein gewähltes k bei einem hinreichend kleinem β zu beginnen ist.

Bemerkung. Sei $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod eine volle Teilkategorie derart, daß wann immer in einer kurz exakten Sequenz $X' \longrightarrow X \longrightarrow X''$ in R-Mod zwei der drei Terme X', X, X'' in $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ liegen, dann auch der dritte. Man sagt dann auch, $\mathcal{C}$ sei eine *dicke* Teilkategorie von R-Mod.

Sei $r \geqslant 1$. Ist

$$\mathrm{E}\big(\beta + r - 1/\beta - 1/\!\!/\beta/\beta - r\big)^{+k} \;\in\; \operatorname{Ob}\mathcal{C}$$

für alle $\beta \in \mathbf{Z}$ und alle $k \in \mathbf{Z}$, so ist auch

$$\mathrm{H}^k\big(X(\infty)\big) \;\in\; \operatorname{Ob}\mathcal{C}$$

für alle $k \in \mathbf{Z}$. Dies folgt mit denselben Argumenten wie für das Korollar.

So könnte $\mathcal{C}$ etwa aus den noetherschen R-Moduln bestehen; oder aus den R-Moduln endlicher Länge im Sinne von Jordan-Hölder; oder aber auch aus den von einer Potenz eines gewählten Elements von R annullierten R-Moduln; oder aber aus den Moduln, auf welchen die Multiplikation mit einem gewählten Element von R einen Automorphismus abelscher Gruppen gibt. Ferner ist der Schnitt von dicken Teilkategorien wieder dick.

4.2 Zwei Spektralsequenzen eines Doppelkomplexes

Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$, i.e. sei X ein Doppelkomplex von R-Moduln mit $X^{i,j} = 0$ für $i < 0$ oder $j < 0$.

> Sein Totalkomplex $\mathrm{t}X$ trägt zwei Filtrationen. Die Differentiale eines punktweise split und endlich filtrierten Komplexes sind allgemein, schreibt man sie bezüglich der Graduierung als Matrizen, untere Dreiecksmatrizen. Stammt die Filtration wie hier von einem Totalkomplex, so hat diese untere Dreiecksmatrix nichtverschwindende Einträge nur auf der Haupt- und der ersten unteren Nebendiagonalen. Dies führt dennoch nicht dazu, daß die Spektralsequenz ein besonders einfaches Verhalten aufweist. Cf. §4.1.1 und §1.6.2.2.

4.2.1 Die erste Filtrierung des Totalkomplexes

4.2.1.1 Definition der Filtrierung

Für $n \geqslant 0$ schreiben wir $X^{[n,*}$ für den Doppelkomplex, der aus X durch Ersetzen von $X^{i,j}$ durch 0 für alle $j \geqslant 0$ und alle $i \in [0, n[$ hervorgeht. So etwa ist $X^{[0,*} = X$. Cf. Beweis zum ersten Lemma in §1.6.2.4.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
X^{[2,*} & X^{2,0} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & X^{2,1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & X^{2,2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & \cdots \\
X^{[1,*} & X^{1,0} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & X^{1,1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & X^{1,2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & \cdots \\
X^{[0,*} & X^{0,0} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & X^{0,1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & X^{0,2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Wir erhalten Morphismen von Doppelkomplexen, welche punktweise split monomorph sind,

$$X^{[0,*} \longleftarrow X^{[1,*} \longleftarrow X^{[2,*} \longleftarrow \cdots$$

Anwendung des Totalkomplexfunktors liefert Morphismen von Komplexen, welche ebenfalls punktweise split monomorph sind,

$$\mathrm{t}X^{[0,*} \longleftarrow \mathrm{t}X^{[1,*} \longleftarrow \mathrm{t}X^{[2,*} \longleftarrow \cdots$$

Definiere mit diesen den punktweise split und endlich filtierten Komplex $\mathrm{t_I}X$, der

$$\mathrm{t_I}X(\alpha) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha = -\infty \\ \mathrm{t}X^{[-\alpha,*} & \text{für } \alpha \in \,]-\infty, 0] \\ \mathrm{t}X & \text{für } \alpha \in [0, \infty] \end{cases}$$

habe. Beachte, daß für $k < 0$ stets $\mathrm{t_I}X(\alpha)^k = 0$, und daß für $k \geqslant 0$

$$\mathrm{t_I}X(\alpha)^k \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha \in [-\infty, -k-1] \\ \bigoplus\limits_{\substack{i+j\,=\,k\,, \\ i\in[-\alpha,\,k]}} X^{i,j} & \text{für } \alpha \in [-k, -1] \\ (\mathrm{t}X)^k & \text{für } \alpha \in [0, \infty] \end{cases}$$

Schreibe

$$\mathrm{E_I} \;=\; \mathrm{E_I}(X) \;:=\mathrm{E}(\mathrm{t_I}X)\;.$$

Fassen wir diese Konstruktion einer Spektralsequenz $\mathrm{E_I}(X)$ ausgehend von einem Doppelkomplex $X \in \operatorname{Ob}\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ zusammen.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod}) \arrow[d, "\mathrm{t_I}"] \arrow[ddd, bend right=60, "\mathrm{E_I}"'] & & \\
\Big(\text{punktweise split und endlich filtrierte Komplexe}\Big) \arrow[d, "\mathrm{Sp}"] \arrow[dd, bend right=40, "\mathrm{E}"'] & \overset{\text{voll}}{\subseteq} & [\![\bar{\mathbf{Z}}_\infty,\, \mathrm{C}(R\text{-Mod})]\!] \\
\Big(\text{Spektralobjekte}\Big) \arrow[d] & \overset{\text{voll}}{\subseteq} & [\![\bar{\mathbf{Z}}_\infty^{\#},\, \mathrm{K}(R\text{-Mod})]\!] \\
\Big(\text{Spektralsequenzen}\Big) & \overset{\text{voll}}{\subseteq} & [\![\bar{\mathbf{Z}}_\infty^{\#\#},\, R\text{-Mod}\,]\!]
\end{tikzcd}
$$

4.2.1.2 Verschwinde- und Identitätsaussagen über Homologieterme

Seien $\alpha,\ \beta \in \mathbf{Z}_\infty$ mit $\alpha \leqslant \beta$. Sei $k \in \mathbf{Z}$.

Ist $k < 0$, so ist $\mathrm{H}^k \mathrm{t_I} X(\beta/\alpha) = 0$.

Sei also $k \geqslant 0$. Es ist

$$\mathrm{H}^k \mathrm{t_I} X(\beta/\alpha) \;=\; 0\ ,$$

falls $\alpha \geqslant 0$ oder $\beta \leqslant -k-1$.

Ferner ist

$$\mathrm{H}^k \mathrm{t_I} X(\beta/\alpha) \;=\; \mathrm{H}^k \mathrm{t_I} X(\beta'/\alpha')\ ,$$

falls $\alpha' \leqslant \alpha \leqslant -k-2 \leqslant 0 \leqslant \beta \leqslant \beta'$. Denn dann ist $\mathrm{t_I} X(\beta/\alpha)^\ell = \mathrm{t_I} X(\beta'/\alpha')^\ell$ für $\ell \in \{k-1,\ k,\ k+1\}$.

So etwa ist $\mathrm{H}^k \mathrm{t_I} X(0/-k-2) = \mathrm{H}^k \mathrm{t_I} X(\infty/-\infty) = \mathrm{H}^k \mathrm{t} X$.

4.2.1.3 Verschwinde- und Identitätsaussagen über Spektralsequenzterme

Sei $k \in \mathbf{Z}$. Sei $\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha$ mit $-\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \infty$ gegeben.

Ist $k < 0$, so ist $\mathrm{E_I}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)^{+k} \;=\; 0$.

Sei also $k \geqslant 0$. Es ist

$$\mathrm{E_I}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)^{+k} \;=\; 0\ ,$$

falls $\mathrm{H}^k \mathrm{t_I} X(\gamma/\alpha) = 0$ oder falls $\mathrm{H}^k \mathrm{t_I} X(\delta/\beta) = 0$. Dies tritt ein, falls $\beta \geqslant 0$ oder $\gamma \leqslant -k-1$.

Es ist

$$\mathrm{E_I}(\alpha^{+1}/\gamma /\!\!/ \delta/\beta)^{+k} \;=\; 0\ ,$$

falls $\mathrm{H}^k \mathrm{t_I} X(\delta/\beta) \;=\; 0$ oder falls $\mathrm{H}^{k+1} \mathrm{t_I} X(\gamma/\alpha) \;=\; 0$. Dies tritt ein, falls $\beta \;\geqslant\; 0$ oder $\gamma \leqslant -k-2$ oder $\delta \leqslant -k-1$.

Ferner ist

$$\mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\delta/\beta/\!\!/\beta/\alpha)^{+k} \;=\; 0 \;,$$

wie wir dem Beispiel aus §4.1.3.2 entnehmen können.

Lemma. *Sei* $-\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \varepsilon \leqslant \infty$. *Sei* $k \geqslant 0$.

Folgende Morphismen sind Identitäten.

$$\begin{array}{lcll}
\mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\varepsilon/\beta/\!\!/\gamma/\alpha)^{+k} & \xrightarrow{e} & \mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\varepsilon/\beta/\!\!/\delta/\alpha)^{+k} & \textit{falls } \gamma \geqslant 0 \;. \\
\mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\varepsilon/\beta/\!\!/\delta/\alpha)^{+k} & \xrightarrow{e} & \mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\varepsilon/\gamma/\!\!/\delta/\alpha)^{+k} & \textit{falls } \gamma \leqslant -k-1 \;. \\
\mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\varepsilon/\gamma/\!\!/\delta/\alpha)^{+k} & \xrightarrow{e} & \mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\varepsilon/\gamma/\!\!/\delta/\beta)^{+k} & \textit{falls } \beta \leqslant -k-2 \;. \\
\mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\delta/\beta/\!\!/\gamma/\alpha)^{+k} & \xrightarrow{e} & \mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\varepsilon/\beta/\!\!/\gamma/\alpha)^{+k} & \textit{falls } \delta \geqslant 0 \;.
\end{array}$$

Dieses Lemma werden wir stillschweigend verwenden, wann immer Indizes verschoben werden sollen, ohne das Spektralsequenzobjekt zu ändern.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen folgen mit den Vorbemerkungen aus der Fundamentalsequenz in erster Notation

$$\mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\varepsilon/\beta/\!\!/\gamma/\alpha)^{+k} \rightarrowtail \mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\varepsilon/\beta/\!\!/\delta/\alpha)^{+k} \twoheadrightarrow \mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\varepsilon/\gamma/\!\!/\delta/\alpha)^{+k} \;.$$

Die dritte Aussage folgt aus der Tatsache, daß $\mathrm{H}^k X(\delta/\alpha) = \mathrm{H}^k X(\delta/\beta)$ für $\beta \leqslant -k-2$.

Die vierte Aussage folgt aus der Tatsache, daß $\mathrm{H}^k X(\delta/\beta) = \mathrm{H}^k X(\varepsilon/\beta)$ für $\delta \geqslant 0$. □

Noch ein kleiner Nachtrag zu §4.2.1.2.

Korollar. *Sei* $-\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \infty$. *Sei* $k \geqslant 0$.

Es ist $\mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\alpha^{+1}/\gamma/\!\!/\delta/\beta)^{+k} = 0$ *falls* $\gamma \geqslant 0$ *oder* $\beta \leqslant k-2$.

Wir wenden voriges Lemma an auf die Fundamentalsequenzen in zweiter Notation

$$\mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\delta/\gamma/\!\!/\delta/\alpha)^{+k} \rightarrowtail \mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\delta/\gamma/\!\!/\delta/\beta)^{+k} \twoheadrightarrow \mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\alpha^{+1}/\gamma/\!\!/\delta/\beta)^{+k} \;,$$

und

$$\mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\gamma/\alpha/\!\!/\beta/\delta^{-1})^{+k+1} \rightarrowtail \mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\gamma/\alpha/\!\!/\beta/\alpha)^{+k+1} \twoheadrightarrow \mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\delta/\alpha/\!\!/\beta/\alpha)^{+k+1} \;,$$

□

4.2.2 Die zweite Filtrierung des Totalkomplexes

Für $n \geqslant 0$ schreiben wir $X^{*,[n}$ für den Doppelkomplex, der durch Ersetzen von $X^{i,j}$ durch 0 für $i \geqslant 0$ und $j \in [0, n[$ aus X hervorgeht. So etwa ist $X^{*,[0} = X$.

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \\
X^{2,0} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & X^{2,1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & X^{2,2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & \cdots \\
X^{1,0} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & X^{1,1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & X^{1,2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & \cdots \\
X^{0,0} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & X^{0,1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & X^{0,2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\delta"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

$X^{*,[2}$

$X^{*,[1}$

$X^{*,[0}$

Wir erhalten Morphismen von Doppelkomplexen, welche punktweise split monomorph sind,

$$X^{*,[0} \longleftarrow X^{*,[1} \longleftarrow X^{*,[2} \longleftarrow \cdots$$

Anwendung des Totalkomplexfunktors liefert Morphismen von Komplexen, welche ebenfalls punktweise split monomorph sind,

$$\mathrm{t}X^{*,[0} \longleftarrow \mathrm{t}X^{*,[1} \longleftarrow \mathrm{t}X^{*,[2} \longleftarrow \cdots$$

Definiere mit diesen den punktweise split und endlich filtierten Komplex $\mathrm{t_{II}}X$, der

$$\mathrm{t_{II}}X(\alpha) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha = -\infty \\ \mathrm{t}X^{*,[-\alpha} & \text{für } \alpha \in\,]-\infty, 0] \\ \mathrm{t}X & \text{für } \alpha \in [0, \infty] \end{cases}$$

habe. Beachte, daß für $k < 0$ stets $\mathrm{t_{II}}X(\alpha)^k = 0$, und daß für $k \geqslant 0$

$$\mathrm{t_{II}}X(\alpha)^k \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha \in [-\infty, -k-1] \\ \bigoplus\limits_{\substack{i+j\,=\,k\,, \\ j\in[-\alpha,\,k]}} X^{i,j} & \text{für } \alpha \in [-k, -1] \\ (\mathrm{t}X)^k & \text{für } \alpha \in [0, \infty] \end{cases}$$

Schreibe

$$\mathrm{E_{II}} \;=\; \mathrm{E_{II}}(X) \;:= \mathrm{E}(\mathrm{t_{II}}X)\;.$$

Aus Symmetriegründen machen wir folgende

Feststellung. *Sämtliche Aussagen aus* §4.2.1.2 *und* §4.2.1.3 *für* $\mathrm{t_I}X$ *und* $\mathrm{E_I}$ *gelten auch für* $\mathrm{t_{II}}X$ *und* $\mathrm{E_{II}}$.

4.2.3 Homologie horizontal und vertikal genommen

Sei $k \geqslant 0$. Nehmen wir die Homologie der vertikalen Differentiale δ, so erhalten wir einen Komplex

$$\mathrm{H}^k(X^{*,-}) \;:=\; \Big(\mathrm{H}^k(X^{*,0}) \xrightarrow{\mathrm{H}^k(d)} \mathrm{H}^k(X^{*,1}) \xrightarrow{\mathrm{H}^k(d)} \mathrm{H}^k(X^{*,2}) \xrightarrow{\mathrm{H}^k(d)} \cdots\Big) \;\in\; \mathrm{C}^+(R\text{-Mod})$$

Die Symbolik bedeute, daß die Stelle $*$ zur Bildung von H^k verwandt werde, und in die Stelle $-$ noch ein Spaltenindex eingesetzt werden kann. Wird auf den resultierenden Komplex $\mathrm{H}^k(X^{*,-})$ abermals ein Homologiefunktor H^ℓ angewandt, so gilt also " $*$ vor $-$ " in der Auswertung von $\mathrm{H}^\ell\mathrm{H}^k(X^{*,-})$.

Nehmen wir umgekehrt die Homologie der horizontalen Differentiale d, so erhalten wir einen Komplex

$$\mathrm{H}^k(X^{-,*}) \;:=\; \Big(\mathrm{H}^k(X^{0,*}) \xrightarrow{\mathrm{H}^k(\delta)} \mathrm{H}^k(X^{1,*}) \xrightarrow{\mathrm{H}^k(\delta)} \mathrm{H}^k(X^{2,*}) \xrightarrow{\mathrm{H}^k(\delta)} \cdots\Big) \;\in\; \mathrm{C}^+(R\text{-Mod})\,,$$

dessen Homologiegruppen mit $\mathrm{H}^\ell\mathrm{H}^k(X^{-,*})$ bezeichnet werden, wobei $k,\,\ell \in \mathbf{Z}$.

> Für $\mathrm{H}^k(X^{*,-})$ nimmt man also vertikal Homologie und läuft horizontal. Für $\mathrm{H}^k(X^{-,*})$ nimmt man also horizontal Homologie und läuft vertikal.

Für $\alpha \leqslant 0$ ist der Komplex $\mathrm{t_I}X(\alpha/\alpha-1)$ bis auf ([4]) Vorzeichen der Differentiale gleich $X^{-\alpha,*}[\alpha]$. Daher ist für $k \geqslant 0$ auch

$$\mathrm{H}^k\big(\mathrm{t_I}X(\alpha/\alpha-1)\big) \;=\; \mathrm{H}^{k+\alpha}(X^{-\alpha,*})\,.$$

Ferner ist der Morphismus

$$\mathrm{t_I}X(\alpha/\alpha-1) \;\longrightarrow\; \mathrm{t_I}X((\alpha-2)^{+1}/\alpha-1) = \mathrm{t_I}X(\alpha-1/\alpha-2)^{+1}$$

aus $\mathrm{Sp}(\mathrm{t_I}X)$ nach Definition aus §4.1.2.3.1 bis auf Vorzeichen gleich

$$X^{-\alpha,*}[\alpha] \;\xrightarrow{\delta}\; X^{-\alpha+1,*}[\alpha]\,.$$

Insbesondere ist für $k \geqslant 0$

$$\mathrm{H}^k\big(\mathrm{t_I}X(\alpha/\alpha-1)\big) \;\longrightarrow\; \mathrm{H}^k\Big(\mathrm{t_I}X\big((\alpha-2)^{+1}/\alpha-1\big)\Big) \;=\; \mathrm{H}^{k+1}\big(\mathrm{t_I}X\big(\alpha-1/\alpha-2\big)\big)$$

bis auf Vorzeichen gleich

$$\mathrm{H}^{k+\alpha}(X^{-\alpha,*}) \xrightarrow{\mathrm{H}^{k+\alpha}(\delta)} \mathrm{H}^{k+\alpha}(X^{-\alpha+1,*})\,.$$

[4]...für die Homologie unwesentliches, und für I zufällig korrektes ...

Lemma. *Sei* $k \geqslant 0$. *Sei* $\alpha \in [-k, 0]$. *Es ist*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{E_I}(\alpha/\alpha-1/\!\!/\alpha/\alpha-1)^{+k}(X) & = & \mathrm{H}^{k+\alpha}(X^{-\alpha,*}) \\ \mathrm{E_I}(\alpha+1/\alpha-1/\!\!/\alpha/\alpha-2)^{+k}(X) & = & \mathrm{H}^{-\alpha}\mathrm{H}^{k+\alpha}(X^{-,*}) \\ \mathrm{E_{II}}(\alpha/\alpha-1/\!\!/\alpha/\alpha-1)^{+k}(X) & = & \mathrm{H}^{k+\alpha}(X^{*,-\alpha}) \\ \mathrm{E_{II}}(\alpha+1/\alpha-1/\!\!/\alpha/\alpha-2)^{+k}(X) & = & \mathrm{H}^{-\alpha}\mathrm{H}^{k+\alpha}(X^{*,-})\ , \end{array}$$

die Identifikationen jeweils natürlich in X.

Beweis. Betrachten wir die Aussagen bezüglich $\mathrm{E_I}$. Die erste Aussage wurde eben schon bemerkt. Gemäß dem Homologielemma aus §4.1.4 ist $\mathrm{E_I}(\alpha+1/\alpha-1/\!\!/\alpha/\alpha-2)^{+k}$ die Homologie von

$$\mathrm{E_I}(\alpha{+}1/\alpha/\!\!/\alpha{+}1/\alpha)^{+k-1} \xrightarrow{e} \mathrm{E_I}(\alpha/\alpha{-}1/\!\!/\alpha/\alpha{-}1)^{+k} \xrightarrow{e} \mathrm{E_I}(\alpha{-}1/\alpha{-}2/\!\!/\alpha{-}1/\alpha{-}2)^{+k+1}\ .$$

Wie aber vorstehend bemerkt, ist diese Sequenz bis auf Vorzeichen gleich

$$\mathrm{H}^{k+\alpha}(X^{-\alpha-1,*}) \xrightarrow{\mathrm{H}^{k+\alpha}(\delta)} \mathrm{H}^{k+\alpha}(X^{-\alpha,*}) \xrightarrow{\mathrm{H}^{k+\alpha}(\delta)} \mathrm{H}^{k+\alpha}(X^{-\alpha+1,*})\ ,$$

und dies ist der Ausschnitt von $\mathrm{H}^{k+\alpha}(X^{-,*})$ um die Position $-\alpha$. □

Lemma (Fünftermsequenzen). *Wir haben folgende exakte Sequenzen.*

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(X^{-,*}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1\mathrm{t}X & \longrightarrow & \mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(X^{-,*}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(X^{-,*}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2\mathrm{t}X \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(X^{*,-}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1\mathrm{t}X & \longrightarrow & \mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(X^{*,-}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(X^{*,-}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2\mathrm{t}X \end{array}$$

D.h. diese beiden Sequenzen sind bei allen Nichtendtermen exakt.

Siehe Aufgabe 81 für in Repräsentanten ausgedrückte Abbildungsvorschriften der ersten dieser beiden Sequenzen.

Beweis. Wir wollen die erste Sequenz herleiten. Aus Fundamentalsequenzen in erster und zweiter Notation können wir zunächst folgende exakte Sequenz zusammensetzen.

$$\begin{array}{llllll} 0 & \longrightarrow \ \mathrm{E_I}(0/-3/\!\!/-1/-3)^{+1} & \longrightarrow & \mathrm{E_I}(0/-3/\!\!/0/-3)^{+1} & \longrightarrow & \mathrm{E_I}(0/-1/\!\!/0/-2)^{+1} \\ & \longrightarrow \ \mathrm{E_I}(-1/-3/\!\!/-2/-4)^{+2} & \longrightarrow & \mathrm{E_I}(0/-3/\!\!/0/-4)^{+2} & & \end{array}$$

Mit dem Lemma aus §4.2.1.3, den Bemerkungen aus §4.2.1.2 und vorigem Lemma wird

$$\begin{array}{lclcl} \mathrm{E_I}(0/-3/\!\!/-1/-3)^{+1} & = & \mathrm{E_I}(0/-2/\!\!/-1/-3)^{+1} & = & \mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(X^{-,*}) \\ \mathrm{E_I}(0/-3/\!\!/0/-3)^{+1} & = & \mathrm{H}^1\mathrm{t_I}X(0/-3) & = & \mathrm{H}^1\mathrm{t}X \\ \mathrm{E_I}(0/-1/\!\!/0/-2)^{+1} & = & \mathrm{E_I}(1/-1/\!\!/0/-2)^{+1} & = & \mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(X^{-,*}) \\ \mathrm{E_I}(-1/-3/\!\!/-2/-4)^{+2} & & & = & \mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(X^{-,*}) \\ \mathrm{E_I}(0/-3/\!\!/0/-4)^{+2} & = & \mathrm{E_I}(0/-4/\!\!/0/-4)^{+2} & = & \mathrm{H}^2\mathrm{t}X\ . \end{array}$$

□

Es kann etwa die erste Fünftermsequenz via $\mathrm{H}^2\mathrm{t}X \longrightarrow \mathrm{E_I}(0/-2/\!\!/0/-3)^{+3} \longrightarrow \mathrm{H}^3\mathrm{H}^0(X^{-,*})$ exakt fortgesetzt werden, jedoch hat der Term $\mathrm{E_I}(0/-2/\!\!/0/-3)^{+3}$ keine mir bekannte Interpretation außer die definierende als $\mathrm{Im}\big(\mathrm{H}^3\mathrm{t_I}X(0/-3) \longrightarrow \mathrm{H}^3\mathrm{t_I}X(0/-2)\big)$.

4.3 Die Grothendieck-Spektralsequenz

Sei R ein Ring. Ein Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ von R-Moduln heiße *spaltend* oder *split,* wenn $X \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{Im} f$, $x \longmapsto xf$ split epimorph, und $\operatorname{Im} f \xrightarrow{\dot{f}} Y$, $y \longmapsto y$, split monomorph ist. Ein Komplex $K \in \mathrm{C}(R\text{-Mod})$ heiße *spaltend* oder *split,* wenn alle seine Differentiale split sind.

Bemerkung. Ein Komplex $K \in \mathrm{C}(R\text{-Mod})$ ist genau dann split, wenn die kurz exakten Sequenzen $(\mathrm{B}^k K, \mathrm{Z}^k K, \mathrm{H}^k K)$ und $(\mathrm{Z}^k K, K^k, \mathrm{B}^{k+1} K)$ für alle $k \in \mathbf{Z}$ split kurz exakt sind. Dies folgt aus der Tatsache, daß in einer kurz exakten Sequenz der Kern genau dann split monomorph ist, wenn der Cokern split epimorph ist; daraus, daß der erste Morphismus in einer Komposition zu einem split monomorphen selbst split monomorph ist; und daraus, daß die Komposition zweiter split monomorpher Morphismen wieder split monomorph ist; vgl. Aufgabe 21.(2).

Seien nun R, S und T Ringe. Seien

$$R\text{-Mod} \xrightarrow{F} S\text{-Mod} \xrightarrow{G} T\text{-Mod}$$

linksexakte additive Funktoren.

> Wir wollen der Frage nachgehen, was die Rechtsabgeleiteten $R\text{-Mod} \xrightarrow{\mathrm{R}^* F} S\text{-Mod}$, $S\text{-Mod} \xrightarrow{\mathrm{R}^* G} T\text{-Mod}$ und $R\text{-Mod} \xrightarrow{\mathrm{R}^*(G \circ F)} T\text{-Mod}$ miteinander zu tun haben. Vgl. Aufgabe 26.(2).

Lemma. *Gegeben sei ein Komplex* $K \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(S\text{-Mod})$. *Es gibt einen Doppelkomplex* $J \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}^+(\mathrm{C}(S\text{-Inj}))$ *(i.e.* $J^{k,\ell} = 0$ *für* $k < 0$*) mit folgenden Eigenschaften.*

(1) *Es ist* $\mathrm{H}^0 J^{*,-} \simeq K$.

(2) *Der Komplex* $J^{*,k}$ *ist eine injektive Auflösung von* K^k *für* $k \in \mathbf{Z}$.

(3) *Der Komplex* $\mathrm{H}^k(J^{-,*}) \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}^+(S\text{-Mod})$ *ist eine injektive Auflösung von* $\mathrm{H}^k K$ *für* $k \in \mathbf{Z}$.

(4) *Der Komplex* $J^{\ell,*}$ *ist split für* $\ell \geqslant 0$ *(i.e.* J *ist* zeilenweise split*).*

Ist $K \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}^+(S\text{-Mod})$, *so kann dazuhin* $J \in \operatorname{Ob} \mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Inj})$ *gewählt werden.*

Eine Doppelkomplex J mit den Eigenschaften $(1, 2, 3, 4)$ heiße *Cartan-Eilenberg-Auflösung* von K; cf. [**7,** XVII.§1].

Beweis. Betrachte

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{H}^k K & & & \mathrm{H}^{k+1} K \\
 & \mathrm{B}^k K \arrow[r, tail] & \mathrm{Z}^k K \arrow[ur, two heads] \arrow[dr, tail] & & \mathrm{B}^{k+1} K \arrow[r, tail] & \mathrm{Z}^{k+1} K \arrow[ur, two heads] \arrow[dr, tail] & \\
K^{k-1} \arrow[ur, two heads] & & & K^k \arrow[ur, two heads] & & & K^{k+1}
\end{tikzcd}$$

Löse zunächst $\mathrm{B}^k K$ und $\mathrm{H}^k K$ injektiv auf für alle $k \in \mathbf{Z}$. Wähle hierbei die Nullauflösung für $\mathrm{B}^k K$ mit $k \leqslant 0$ und für $\mathrm{H}^k K$ mit $k \leqslant -1$. Wende nun das Hufeisenlemma aus §1.5.5 auf die kurz exakten Sequenzen $(\mathrm{B}^k K, \mathrm{Z}^k K, \mathrm{H}^k K)$ an. Wende sodann selbiges Hufeisenlemma auf die kurz exakten Sequenzen $(\mathrm{Z}^k K, K^k, \mathrm{B}^{k+1} K)$ an. ▫

Ein Objekt $Y \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod}$ heiße F*-azyklisch*, falls $(\mathrm{R}^k F)(Y) \simeq 0$ für $k \geqslant 1$. Die volle Teilkategorie der F-azyklischen Moduln in R-Mod werde mit $R\text{-Mod}_F$ bezeichnet.

Es ist $R\text{-Mod}_F$ eine volle additive Teilkategorie von R-Mod. Darüberhinaus ist sie unter Summanden abgeschlossen; i.e. ist $X \simeq X_1 \oplus X_2$, und ist X ein F-azyklisches Objekt, so sind dies auch X_1 und X_2.

Etwa sind alle injektiven R-Moduln F-azyklisch, unabhängig von der Wahl von F; cf. Aufgabe 26.(1).

Schreibe $\mathrm{C}^{+,0}(R\text{-Mod}_F) \subseteq \mathrm{C}^{+}(R\text{-Mod}_F)$ für die volle Teilkategorie der Komplexe mit verschwindender Homologie an Position $\geqslant 1$. Sei $X \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod}$. Gibt es einen Quasiisomorphismus $\mathrm{Konz}\, X \longrightarrow A$ für ein $A \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{C}^{+,0}(R\text{-Mod}_F)$, so heiße A eine F*-azyklische Auflösung* von X.

Bemerkung. *Ist $Y \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod}$ F-azyklisch, und ist I eine injektive Auflösung von Y, so ist das Bild des zugehörigen Quasiisomorphismus $\mathrm{Konz}\, Y \longrightarrow I$ unter F, viz. $\mathrm{Konz}\, FY \longrightarrow FI$, ebenfalls ein Quasiisomorphismus.*

Beweis. Nach Voraussetzung an Y ist $\mathrm{H}^k FI \simeq (\mathrm{R}^k F)(Y) \simeq 0$ für $k \geqslant 1$. Da F linksexakt ist, und da $(Y \longrightarrow I^0)$ ein Kern von $(I^0 \longrightarrow I^1)$ ist, ist auch $F(Y \longrightarrow I^0)$ ein Kern von $F(I^0 \longrightarrow I^1)$. Also ist $\mathrm{Konz}\, FY \longrightarrow FI$ ein Quasiisomorphismus. ▫

Lemma. *Ist $X \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod}$, ist A eine F-azyklische Auflösung von X, und ist I eine injektive Auflösung von X, so gibt es einen Quasiisomorphismus $A \longrightarrow I$, welcher unter H^0 auf 1_X abgebildet wird, und welcher unter F zu einem Quasiisomorphismus $FA \longrightarrow FI$ wird.*

Insbesondere ist

$$(\mathrm{R}^k F)(X) \;\simeq\; \mathrm{H}^k(FI) \;\simeq\; \mathrm{H}^k(FA)$$

für $k \geqslant 0$.

Kurz, wir können $\mathrm{R}^k F$ mittels azyklischer Auflösungen berechnen.

Beweis. Da zwei injektive Auflösungen I und I' von X isomorph in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$ sind via eines Isomorphismus, der die Identität auf X auflöst, und da also auch die Bilder FI und FI' isomorph in $\mathrm{K}(S\text{-Mod})$ sind, genügt es, eine injektive Auflösung I von X so zu finden, daß es Quasiisomorphismen $A \longrightarrow I$ und $FA \longrightarrow FI$ gibt, wobei $A \longrightarrow I$ die Identität auf X auflösen sollte.

Sei $J \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ eine Cartan-Eilenberg-Auflösung von A, existent nach vorigem Lemma. Sei $k \geqslant 0$. Da $J^{*,k}$ eine injektive Auflösung von A^k ist, ist mit voriger Bemerkung auch $F\, \mathrm{Konz}\, A^k \longrightarrow FJ^{*,k}$ ein Quasiisomorphismus. Nach dem Lemma aus §1.6.2.4 folgt aus einem spaltenweisen Quasiisomorphismus von Doppelkomplexen ein Quasiisomorphismus der Totalkomplexe, was uns den Quasiisomorphismus $FA \longrightarrow \mathrm{t}FJ = F\mathrm{t}J$

beschert. Mit demselben Lemma ist auch $A \longrightarrow \mathrm{t}J$ ein Quasiisomorphismus. Durch Komposition von Quasiisomorphismen $\mathrm{Konz}\, X \longrightarrow A \longrightarrow \mathrm{t}J$ erkennen wir, daß $\mathrm{t}J$ tatsächlich eine injektive Auflösung von X ist, und daß $A \longrightarrow \mathrm{t}J$ die Identität auf X auflöst. ▫

Sei X ein R-Modul.

Definition. Existiert ein $A \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{C}^{+,0}(R\text{-Mod}_F) \cap \mathrm{Ob}\, \mathrm{C}^{+,0}(R\text{-Mod}_{G\circ F})$ mit $FA \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{C}^{+}(S\text{-Mod}_G)$ und $\mathrm{H}^0 A = X$, so heiße X ein *(F,G)-azyklisch auflösbarer* R-Modul, und A eine *(F,G)-azyklische Auflösung* von X.

In Worten, eine Auflösung A von X ist (F,G)-azyklisch, falls folgendes gilt.

- A ist eine F-azyklische Auflösung von X.
- A ist eine $(G \circ F)$-azyklische Auflösung von X.
- FA^k ist G-azyklisch für alle $k \geqslant 0$.

Beispiel. Führt F injektive R-Moduln in G-azyklische S-Moduln über, so sind vermittels injektiver Auflösungen alle R-Moduln (F,G)-azyklisch auflösbar, und es sind alle injektiven Auflösungen eines R-Moduls (F,G)-azyklisch.

Beispiel. Führt F injektive R-Moduln in injektive S-Moduln über, so sind alle R-Moduln (F,G)-azyklisch auflösbar, und es sind alle injektiven Auflösungen eines R-Moduls (F,G)-azyklisch. Dies ist ein Spezialfall des vorigen Beispiels.

Definition. Sei X ein (F,G)-azyklisch auflösbarer R-Modul. Sei A eine (F,G)-azyklische Auflösung von X. Sei $J \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{CC}^{\llcorner}(S\text{-Inj})$ eine Cartan-Eilenberg-Auflösung von FA. Wir bilden bezüglich des Doppelkomplexes

$$GJ \;\in\; \mathrm{Ob}\, \mathrm{CC}^{\llcorner}(T\text{-Mod})$$

die *Grothendieck-Spektralsequenz*

$$\mathrm{E}^{\mathrm{Gr}}_{F,G} \;=\; \mathrm{E}^{\mathrm{Gr}}_{F,G}(X) \;:=\; \mathrm{E}_{\mathrm{I}}(GJ) \;=\; \mathrm{E}(\mathrm{t}_{\mathrm{I}} GJ)$$

bezüglich F und G.

Bemerkung. Die Frage nach der Unabhängigkeit bis auf Isomorphie der Spektralsequenz $\mathrm{E}^{\mathrm{Gr}}_{F,G}(X)$ von den Wahlen der Auflösungen A und J wird in Aufgabe 76.(2) betrachtet. Die Frage nach der Funktorialität von $\mathrm{E}^{\mathrm{Gr}}_{F,G}(X)$ in X wird in Aufgabe 76.(1) behandelt.

Satz. *Sei X ein (F,G)-azyklisch auflösbarer R-Modul. Seien A und J wie in der vorstehenden Definition beschrieben. Für $k \geqslant 0$ ist*

$$\mathrm{H}^k \mathrm{t}GJ \;=\; \mathrm{E}^{\mathrm{Gr}}_{F,G}(\infty/-\infty /\!\!/ \infty/-\infty)^{+k} \;\simeq\; \big(\mathrm{R}^k(G \circ F)\big)(X)\;.$$

Ferner wird für $k \geqslant 0$ und $\alpha \in [0,k]$

$$\mathrm{E}^{\mathrm{Gr}}_{F,G}(-\alpha+1/-\alpha-1 /\!\!/ -\alpha/-\alpha-2)^{+k} \;\simeq\; (\mathrm{R}^{\alpha} G)(\mathrm{R}^{k-\alpha} F)(X)\;.$$

Vergleiche dazu das Homologielemma aus §4.1.4, welches, iteriert angewandt, liefert, daß $\mathrm{E}^{\mathrm{Gr}}_{F,G}(-\alpha+1/-\alpha-1/\!\!/-\alpha/-\alpha-2)^{+k}$ einen Subquotienten isomorph zu $\mathrm{E}^{\mathrm{Gr}}_{F,G}(\infty/-\alpha-1/\!\!/-\alpha/-\infty)^{+k}$ hat. Vergleiche dann das Filtrierungslemma aus §4.1.5, welches eine Filtrierung von

$$\mathrm{H}^k\mathrm{t}GJ \;=\; \mathrm{H}^k\big(\mathrm{t}_{\mathrm{I}}(GJ)(\infty)\big) \;=\; \mathrm{E}^{\mathrm{Gr}}_{F,G}(\infty/-\infty/\!\!/\infty/-\infty)^{+k}$$

mit Subquotienten der Form $\mathrm{E}^{\mathrm{Gr}}_{F,G}(\infty/-\alpha-1/\!\!/-\alpha/-\infty)^{+k}$ beinhaltet. Dies ist der eingangs angesprochene Zusammenhang von $\big(\mathrm{R}^k(G\circ F)\big)(X)$ mit $(\mathrm{R}^\alpha G)(\mathrm{R}^{k-\alpha}F)(X)$, vorausgesetzt, es ist X auch (F,G)-azyklisch auflösbar, i.e. es existiert eine sowohl F-azyklische als auch $(G\circ F)$-azyklische Auflösung A von X, für welche FA aus G-azyklischen Termen besteht.

Beweis. Für $k\geqslant 0$ haben wir einen Quasiisomorphismus $\mathrm{Konz}\,FA^k \longrightarrow J^{*,k}$. Wegen der G-Azyklizität von FA^k ist mit obiger Bemerkung auch $\mathrm{Konz}\,GFA^k \longrightarrow GJ^{*,k}$ ein Quasiisomorphismus. Nach dem Lemma aus §1.6.2.4 folgt aus einem spaltenweisen Quasiisomorphismus von Doppelkomplexen ein Quasiisomorphismus der Totalkomplexe, was hier den Quasiisomorphismus $GFA \longrightarrow \mathrm{t}GJ$ gibt.

Insbesondere ist nach vorigem Lemma für $k\geqslant 0$

$$\big(\mathrm{R}^k(G\circ F)\big)(X) \;\simeq\; \mathrm{H}^k GFA \;\simeq\; \mathrm{H}^k\mathrm{t}GJ\;.$$

Mit dem ersten Lemma aus §4.2.3 ist für $k\geqslant 0$ und $\alpha\in[0,k]$

$$\mathrm{E}^{\mathrm{Gr}}_{F,G}(-\alpha+1/-\alpha-1/\!\!/-\alpha/-\alpha-2)^{+k} \;\simeq\; \mathrm{H}^\alpha\mathrm{H}^{k-\alpha}(GJ^{-,*})\;.$$

Da G split epimorphe resp. split monomorphe Morphismen in ebensolche überführt, ist für $\ell\geqslant 0$

$$\mathrm{H}^{k-\alpha}(GJ^{\ell,*}) \;\simeq\; G\big(\mathrm{H}^{k-\alpha}(J^{\ell,*})\big)\;,$$

und insgesamt auch

$$\mathrm{H}^{k-\alpha}(GJ^{-,*}) \;\simeq\; G\big(\mathrm{H}^{k-\alpha}(J^{-,*})\big)\;,$$

Da $\mathrm{H}^{k-\alpha}(J^{-,*})$ eine injektive Auflösung von $\mathrm{H}^{k-\alpha}(FA)\simeq(\mathrm{R}^{k-\alpha}F)(X)$ ist, liefert Anwendung von H^α

$$\mathrm{H}^\alpha\mathrm{H}^{k-\alpha}(GJ^{-,*}) \;\simeq\; \mathrm{H}^\alpha G\big(\mathrm{H}^{k-\alpha}(J^{-,*})\big) \;\simeq\; (\mathrm{R}^\alpha G)(\mathrm{R}^{k-\alpha}F)(X)\;.$$

□

Mit dem ersten Lemma aus §4.2.3 ist

$$\mathrm{E}_{\mathrm{II}}(-\alpha/-\alpha-1/\!\!/-\alpha/-\alpha-1)^{+k} \;\simeq\; \mathrm{H}^{k-\alpha}(GJ^{*,\alpha})\;.$$

Da $J^{*,\alpha}$ eine injektive Auflösung von FA^α ist, folgt $\mathrm{H}^{k-\alpha}(GJ^{*,\alpha})\simeq(\mathrm{R}^{k-\alpha}G)(FA^\alpha)\simeq 0$ für $k-\alpha\geqslant 1$. Daher hat E_{II} hier keine praktische Bedeutung.

Bemerkung. Ist $X\xrightarrow{f}X'$ eine R-lineare Abbildung, für die $(\mathrm{R}^kF)(f)$ isomorph ist für alle $k\geqslant 0$, so ist auch $(\mathrm{R}^k(G\circ F))(f)$ isomorph für alle $k\geqslant 0$. Dies folgt mit der Funktorialität der Grothendieck-Spektralsequenz, cf. Aufgabe 76.(1), und wird in Aufgabe 76.(5) abgehandelt.

Korollar. *Sei $X \in \operatorname{Ob} R\text{-Mod}$ (F,G)-azyklisch auflösbar. Die Diagrammorphismen der Grothendieck-Spektralsequenz $\mathrm{E}^{\mathrm{Gr}}_{F,G}$ geben eine exakte Fünftermsequenz*

$$0 \longrightarrow (\mathrm{R}^1 G)(\mathrm{R}^0 F)(X) \longrightarrow (\mathrm{R}^1(G\circ F))(X) \longrightarrow (\mathrm{R}^0 G)(\mathrm{R}^1 F)(X) \longrightarrow (\mathrm{R}^2 G)(\mathrm{R}^0 F)(X) \longrightarrow (\mathrm{R}^2(G\circ F))(X)\,.$$

Beweis. Das ist die erste Aussage des Fünftermsequenzlemmas aus §4.2.3, angewandt auf die Grothendieck-Spektralsequenz $\mathrm{E}^{\mathrm{Gr}}_{F,G}$; cf. den Beweis in loc. cit. ▫

4.4 Die Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralsequenz

Sei R ein kommutativer Ring. Sei G eine endliche Gruppe, sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler.

Sei $RG\text{-Mod} \xrightarrow{F} R(G/N)\text{-Mod}$, $X \longmapsto X^N$. Da N auf X^N trivial operiert, ist X^N in der Tat ein $R(G/N)$-Modul.

Sei $R(G/N)\text{-Mod} \xrightarrow{F'} R\text{-Mod}$, $Y \longmapsto Y^{G/N}$.

Auf den Morphismen operieren F und F' durch jeweiliges Einschränken von Abbildungen.

4.4.1 Azyklizitäten

Sei RG-lat die Kategorie der *RG-Gitter* (engl. lattices), i.e. der endlich erzeugten RG-Moduln, die als R-Moduln projektiv sind.

Beispiel. Ein endlich erzeugter projektiver RG-Modul ist ein RG-Gitter. Der triviale Modul R ist ein RG-Gitter. Ist R ein Körper, so ist jeder als R-Vektorraum endlichdimensionale RG-Modul ein RG-Gitter.

Mit Aufgabe 37.(1) haben wir eine Äquivalenz $RG\text{-lat} \longrightarrow (RG\text{-lat})^\circ$, $X \longmapsto X^*$. Es ist $RG \xrightarrow{\sim} RG^*$ via $g \longmapsto (\tilde{g} \longmapsto \partial_{g,\tilde{g}})$. Insbesondere ist mit Aufgabe 22.(1) der Duale eines endlich erzeugten Projektiven wieder endlich erzeugt und projektiv.

Ist A ein azyklischer Komplex mit Einträgen in RG-lat, so gilt dies auch für A^*, da sich A aus über R split kurz exakten Sequenzen $\mathrm{B}_k A \longrightarrow A_k \longrightarrow \mathrm{B}_{k-1} A$ zusammensetzt, $k \in \mathbf{Z}$, die unter $(-)^*$ in ebensolche überführt werden.

Lemma.

(1) *Ein endlich erzeugter projektiver RG-Modul ist F-azyklisch.*

(2) *Ein endlich erzeugter projektiver RG-Modul ist $(F' \circ F)$-azyklisch.*

Beweis. Es genügt, (1) zu zeigen, (2) ist der Spezialfall $N = 1$. Ferner genügt es zu zeigen, daß RG selbst F-azyklisch ist, da $RG\text{-Mod}_F$ unter direkten Summen und direkten Summanden abgeschlossen ist.

Wir haben einen $R(G/N)$-linearen Isomorphismus

$$\begin{array}{lcl} X^N & \xrightarrow{\sim} & {}_{RG}(R(G/N),X) \\ x & \longmapsto & (gN \longmapsto gx) \\ (1N)f & \longleftarrow\!\shortmid & f\ , \end{array}$$

natürlich in $X \in \mathrm{Ob}\, RG$-Mod, wozu $R(G/N)$ als RG-$R(G/N)$-Bimodul aufgefaßt werde, cf. Aufgabe 13.(4).

Sei $k \geqslant 1$. Wir müssen zeigen, daß $\mathrm{Ext}^k_{RG}(R(G/N), RG) = 0$.

Sei B eine projektive Auflösung von $R(G/N)$ über RG mit Termen in RG-lat. Eine solche existiert, da wir für den jeweils zu konstruierenden Epimorphismus von einem Projektiven auf den jeweiligen Kern ein Epimorphismus von einem endlich erzeugt Projektiven genommen werden kann, der als R-lineare Abbildung split epimorph ist.

Außer an Position 0 hat B^* überall verschwindende Homologie besitzt, wie man erkennt, wenn man den um den Modul $R(G/N)$ in Position -1 ergänzten azyklischen Komplex dualisiert.

Somit wird

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{R}^k F)(RG) & \simeq & \mathrm{Ext}^k_{RG}(R(G/N), RG) \\ & \simeq & \mathrm{H}^k\big({}_{RG}(B, RG)\big) \\ & = & \mathrm{H}^k\big({}_{RG\text{-lat}}(B, RG)\big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^k\big({}_{RG\text{-lat}}(RG^*, B^*)\big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^k\big({}_{RG\text{-lat}}(RG, B^*)\big) \\ & = & \mathrm{H}^k\big({}_{RG}(RG, B^*)\big) \\ & \simeq & 0 \end{array}$$

dank der Projektivität von RG über RG. ▫

Vgl. auch die Argumentation in Beispiel (2) aus §3.1.2.

Lemma. *Das Bild eines endlich erzeugt projektiven RG-Modul unter F ist F'-azyklisch.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $F(RG^*) \simeq (RG)^N$ F'-azyklisch ist. Es ist F der Rechtsadjungierte des vollen und treuen Inklusionsfunktors $R(G/N)$-Mod $\hookrightarrow$ RG-Mod, i.e. es ist ${}_{R(G/N)}(X, Y^N) \simeq {}_{RG}(X, Y)$, natürlich in $Y \in \mathrm{Ob}\, R(G/N)$-Mod und in $X \in \mathrm{Ob}\, RG$-Mod. Ferner bettet $R(G/N)$-lat nach RG-lat ein.

Sei C eine projektive Auflösung von R über $R(G/N)$ mit Einträgen in $R(G/N)$-lat. Für

$k \geqslant 1$ erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{R}^k F')\big((RG)^N\big) & \simeq & \mathrm{Ext}^k_{R(G/N)}\big(R, (RG)^N\big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^k\big(\,{}_{R(G/N)}(C, (RG)^N)\big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^k\big(\,{}_{RG}(C, RG)\big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^k\big(\,{}_{RG\text{-lat}}(C, RG)\big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^k\big(\,{}_{RG\text{-lat}}(RG^*, C^*)\big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^k\big(\,{}_{RG\text{-lat}}(RG, C^*)\big) \\ & \simeq & 0\,. \end{array}$$

□

4.4.2 Spezialisieren von Grothendieck zu Lyndon-Hochschild-Serre

Sei nun X ein RG-Gitter. Sei P eine projektive Auflösung von X^* mit Werten in RG-lat. Gemäß dem ersten Lemma aus §4.4.1 ist P^* eine sowohl F-azyklische als auch $(F' \circ F)$-azyklische Auflösung von X ([5]). Gemäß dem zweiten Lemma aus loc. cit. besteht $F(P^*)$ aus F'-azyklischen Einträgen.

In anderen Worten, jedes RG-Gitter ist (F, F')-azyklisch auflösbar, und zwar mittels einer aus RG-Gittern bestehenden (F, F')-azyklischen Auflösung. Vgl. auch Aufgabe 84.(3).

Definition. Die Grothendieck-Spektralsequenz bezüglich F und F' heißt *Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralsequenz*

$$\mathrm{E}^{\mathrm{LHS}}_{G,N;R}(X) \;:=\; \mathrm{E}^{\mathrm{Gr}}_{F,F'}(X)$$

bezüglich G und N, über dem Grundring R.

Wir haben RG-Mod $\xrightarrow{F'\circ F}$ R-Mod, $X \longmapsto X^G$. Also ist $\mathrm{R}^k(F' \circ F) = \mathrm{H}^k(G, -; R)$ für $k \geqslant 0$.

Sei RN-Mod $\xrightarrow{\tilde{F}}$ R-Mod, $X \longmapsto X^N$. Da $P{\downarrow_N}$ eine projektive Auflösung von $X^*{\downarrow_N} = (X{\downarrow_N})^*$ über RN ist, ist $(P{\downarrow_N})^* = P^*{\downarrow_N}$ eine $\tilde{F}$-azyklische Auflösung von $X{\downarrow_N}$. Für $k \geqslant 0$ ist also

$$(\mathrm{R}^k F)(X){\downarrow_1} \;\simeq\; \mathrm{H}^k((P^*)^N){\downarrow_1} \;\simeq\; \mathrm{H}^k((P^*{\downarrow_N})^N) \;\simeq\; (\mathrm{R}^k \tilde{F})(X{\downarrow_N}) \;\simeq\; \mathrm{H}^k(N, X{\downarrow_N}; R)\,.$$

In anderen Worten, es ist $(\mathrm{R}^k F)(X)$ gegeben durch $\mathrm{H}^k(N, X{\downarrow_N}; R)$, ausgestattet mit der von der $R(G/N)$-Modulstruktur der Einträge von $(P^*{\downarrow_N})^{\bar{G}}$ induzierten $R(G/N)$-Modulstruktur; cf. auch Aufgabe 85.

Satz. *Für $k \geqslant 0$ ist*

$$\mathrm{E}^{\mathrm{LHS}}_{G,N;R}(\infty/-\infty /\!\!/ \infty/-\infty)^{+k}(X) \;\simeq\; \mathrm{H}^k(G, X; R)\,.$$

[5] Das $*$ bei P ist hier nicht der Platzhalter für einen Index, sondern bezeichnet die Dualität.

Ferner wird für $k \geqslant 0$ und $\alpha \in [0, k]$

$$\mathrm{E}^{\mathrm{LHS}}_{G,N;R}(-\alpha+1/-\alpha-1\sslash-\alpha/-\alpha-2)^{+k}(X) \;\simeq\; \mathrm{H}^{\alpha}(G/N, \mathrm{H}^{k-\alpha}(N, X\!\downarrow_N; R); R) \; .$$

Beweis. Wir spezialisieren die Aussagen des Satzes aus §4.3 über die Grothendieck-Spektralsequenz zur Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralsequenz. □

Bemerkung. Ist $X \xrightarrow{f} X'$ eine RG-lineare Abbildung, für die $\mathrm{H}^k(N, f\!\downarrow_N; R)$ isomorph ist für alle $k \geqslant 0$, so ist auch $\mathrm{H}^k(G, f; R)$ isomorph für alle $k \geqslant 0$. Das ist die letzte Bemerkung aus 4.3 in unserer Situtation. Wir merken noch an, daß diese Aussage für $N = G$ und für $N = 1$ eine Tautologie ist.

Korollar. *Sei $X \in RG$-*Mod*. Die Diagrammorphismen der Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralsequenz geben eine exakte Fünftermsequenz*

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(G/N, X^N; R) \longrightarrow \mathrm{H}^1(G, X; R) \longrightarrow \mathrm{H}^1(N, X\!\downarrow_N; R)^{G/N} \longrightarrow \mathrm{H}^2(G/N, X^N; R) \longrightarrow \mathrm{H}^2(G, X; R) \; .$$

Beweis. Das ist das Korollar aus §4.3 in unserer Situtation. □

In Aufgabe 83.(5) werden die Abbildungsvorschriften der Morphismen in einer zu dieser Fünftermsequenz isomorphen Sequenz auf repräsentierenden Cozyklen hergeleitet.

Beispiel. Sei X ein endlich erzeugter RG-Modul. Wir wollen $\mathrm{H}^2(G, X; R)$ aus Spektralsequenztermen "zusammensetzen". Der Einfachheit halber schreiben wir $\mathrm{E} := \mathrm{E}^{\mathrm{LHS}}_{G,N;R}(X)$.

Schritt 1. Das Filtrierungslemma aus §4.1.5 gibt die Filtrierung

$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{H}^2(G,X;R) & = & \mathrm{E}(\infty/-\infty\sslash\infty/-\infty)^{+2} & \\
 & = & \mathrm{E}(\infty/-4\sslash 0/-\infty)^{+2} & \bullet \\
 & & & \Big| \quad \mathrm{E}(\infty/-1\sslash 0/-\infty)^{+2} \;=\; \mathrm{E}(1/-1\sslash 0/-4)^{+2} \\
 & & \mathrm{E}(\infty/-4\sslash -1/-\infty)^{+2} & \bullet \\
 & & & \Big| \quad \mathrm{E}(\infty/-2\sslash -1/-\infty)^{+2} \;=\; \mathrm{E}(0/-2\sslash -1/-4)^{+2} \\
 & & \mathrm{E}(\infty/-4\sslash -2/-\infty)^{+2} & \bullet \\
 & & & \Big| \quad \mathrm{E}(\infty/-3\sslash -2/-\infty)^{+2} \;=\; \mathrm{E}(0/-3\sslash -2/-4)^{+2} \\
0 & = & \mathrm{E}(\infty/-4\sslash -3/-\infty)^{+2} & \bullet
\end{array}$$

Schritt 2. Nun reduzieren wir die entstandene Graduierung vermittels des Homologielemmas aus §4.1.4. In $\mathrm{E}(\delta/\beta\sslash\gamma/\alpha)^{+k}$ sollten wir die Differenzen $\delta-\beta$ und $\gamma-\alpha$ auf 2 bringen, um eine Interpretation als Cohomologiegruppen zu ermöglichen.

Es ist $\mathrm{E}(1/-1/\!\!/0/-4)^{+2}$ der Kern von

$$\mathrm{E}(1/-1/\!\!/0/-3)^{+2} \longrightarrow \mathrm{E}(-1/-4/\!\!/-3/-5)^{+3} .$$

Es ist $\mathrm{E}(0/-2/\!\!/-1/-4)^{+2}$ der Kern von

$$\underbrace{\mathrm{E}(0/-2/\!\!/-1/-3)^{+2}}_{\mathrm{H}^1(G/N,\,\mathrm{H}^1(N,X\downarrow_N;R);R)} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{E}(-2/-4/\!\!/-3/-5)^{+3}}_{\mathrm{H}^3(G/N,\,\mathrm{H}^0(N,X\downarrow_N;R);R)} .$$

Es ist $\mathrm{E}(0/-3/\!\!/-2/-4)^{+2}$ der Cokern von

$$\underbrace{\mathrm{E}(1/-1/\!\!/0/-2)^{+1}}_{\mathrm{H}^0(G/N,\,\mathrm{H}^1(N,X\downarrow_N;R);R)} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{E}(-1/-3/\!\!/-2/-4)^{+2}}_{\mathrm{H}^2(G/N,\,\mathrm{H}^0(N,X\downarrow_N;R);R)}$$

Schritt 3. Wir wenden das Homologielemma auf die noch nicht interpretierten Terme an.

Es ist $\mathrm{E}(1/-1/\!\!/0/-3)^{+2}$ der Kern von

$$\underbrace{\mathrm{E}(1/-1/\!\!/0/-2)^{+2}}_{\mathrm{H}^0(G/N,\,\mathrm{H}^2(N,X\downarrow_N;R);R)} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{E}(-1/-3/\!\!/-2/-4)^{+3}}_{\mathrm{H}^2(G/N,\,\mathrm{H}^1(N,X\downarrow_N;R);R)} .$$

Es ist $\mathrm{E}(-1/-4/\!\!/-3/-5)^{+3}$ der Cokern von

$$\underbrace{\mathrm{E}(0/-2/\!\!/-1/-3)^{+2}}_{\mathrm{H}^1(G/N,\,\mathrm{H}^1(N,X\downarrow_N;R);R)} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{E}(-2/-4/\!\!/-3/-5)^{+3}}_{\mathrm{H}^3(G/N,\,\mathrm{H}^0(N,X\downarrow_N;R);R)} .$$

Insbesondere haben wir folgendes gesehen.

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{E}(\infty/-1/\!\!/0/-\infty)^{+2} & \text{ist ein Subquotient von} & \mathrm{H}^0(G/N,\,\mathrm{H}^2(N,X\downarrow_N;R);R) \\
\mathrm{E}(\infty/-2/\!\!/-1/-\infty)^{+2} & \text{ist ein Subquotient von} & \mathrm{H}^1(G/N,\,\mathrm{H}^1(N,X\downarrow_N;R);R) \\
\mathrm{E}(\infty/-3/\!\!/-2/-\infty)^{+2} & \text{ist ein Subquotient von} & \mathrm{H}^2(G/N,\,\mathrm{H}^0(N,X\downarrow_N;R);R)
\end{array}$$

In Aufgabe 86 wird dieses Beispiel im Falle $R = \mathbf{Z}$, $n \geqslant 1$, $n = m \cdot d$, $G = C_n$, $N = C_m$ durchgerechnet.

Beispiel. Wir setzen voriges Beispiel unter der zusätzlichen Voraussetzung fort, es seien $\mathrm{H}^0(N, X\downarrow_N; R) \simeq 0$ und $\mathrm{H}^2(N, X\downarrow_N; R) \simeq 0$. Dann verschwinden alle Terme der Graduierung außer möglicherweise $\mathrm{E}(\infty/-2/\!\!/-1/-\infty)^{+2}$. Also wird

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{H}^2(G, X; R) & \simeq & \mathrm{E}(\infty/-2/\!\!/-1/-\infty)^{+2} \\
& = & \mathrm{E}(0/-2/\!\!/-1/-4)^{+2} \\
& = & \mathrm{E}(0/-2/\!\!/-1/-3)^{+2} \\
& \simeq & \mathrm{H}^1(G/N,\,\mathrm{H}^1(N, X\downarrow_N; R); R) .
\end{array}$$

Allgemein gesprochen erkennen wir, daß einem die Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralsequenz erlaubt, eine Graduierung von $\mathrm{H}^k(G, X; R)$ zu berechnen, i.e. $\mathrm{H}^k(G, X; R)$ bis auf Erweiterungsfragen seiner Graduierungsstücke zu bestimmen, sofern man die Cohomologie von G/N und von N hinreichend im Griff hat.

Anhang A

Aufgaben und Lösungen

A.1 Aufgaben

Die Zuordnung der Aufgaben zu den Abschnitten ist nicht immer monoton wachsend und nicht immer genau eingrenzbar.

Aufgabe 1 (§1.1.1) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, mit Abbildungen $s_\mathcal{C}$, $i_\mathcal{C}$ und $t_\mathcal{C}$ und der Komposition $fg = f \cdot_\mathcal{C} g$.

Bestehe die *entgegengesetzte Kategorie* $\mathcal{C}^\circ$ (engl. opposite) aus $(\mathcal{C}^\circ)_0 = \mathcal{C}_0$, $(\mathcal{C}^\circ)_1 = \mathcal{C}_1$, $s_{\mathcal{C}^\circ} := t_\mathcal{C}$, $t_{\mathcal{C}^\circ} := s_\mathcal{C}$, $i_{\mathcal{C}^\circ} := i_\mathcal{C}$ und $g \cdot_{\mathcal{C}^\circ} f := f \cdot_\mathcal{C} g$.

Zeige, daß es sich bei $\mathcal{C}^\circ$ wieder um eine Kategorie handelt, und daß $(\mathcal{C}^\circ)^\circ = \mathcal{C}$.

Gegeben ein kategorieller Begriff, so heißt dieser Begriff, angewandt auf $\mathcal{C}^\circ$, der jeweils *duale* Begriff, und wird manchmal durch die Vorsilbe "Co" kenntlich gemacht. So z.B. ist die Coretraktion der duale Begriff zur Retraktion, da $f \in \mathcal{C}_1 = (\mathcal{C}^\circ)_1$ eine Retraktion bezüglich $\mathcal{C}^\circ$ genau dann ist, wenn f eine Coretraktion bezüglich $\mathcal{C}$ ist.

Finde die dualen Begriffe zu folgenden Begriffen. Monomorphismus, Isomorphismus, initiales Objekt, Nullobjekt.

Aufgabe 2 (§1.1.2) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus darin. Zeige oder widerlege.

(1) Ist $X \xrightarrow{f} Y$ eine Coretraktion, so ist es ein Monomorphismus.

(2) Ist $X \xrightarrow{f} Y$ ein Monomorphismus, so ist es eine Coretraktion.

(3) Ist $X \xrightarrow{f} Y$ ein Monomorphismus und eine Retraktion, so ist es ein Isomorphismus.

(4) Ist $X \xrightarrow{f} Y$ ein Monomorphismus und ein Epimorphismus, so ist es ein Isomorphismus.

(5) Sind $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}$, und ist fg ein Monomorphismus, so auch f.

Aufgabe 3 (§1.1.2)

(1) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus in (Mengen) mit $X \neq \emptyset$. Zeige, daß f monomorph ist genau dann, wenn es Coretraktion ist, und genau dann, wenn es injektiv ist.

(2) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus in (Mengen). Zeige, daß f epimorph ist genau dann, wenn es Retraktion ist, und genau dann, wenn es surjektiv ist.

(3) Sei R ein Ring. Zeige, daß in R-Mod ein Morphismus genau dann monomorph ist, wenn seine zugrundeliegende Abbildung injektiv ist.

(4) Sei R ein Ring. Zeige, daß in R-Mod ein Morphismus genau dann epimorph ist, wenn seine zugrundeliegende Abbildung surjektiv ist.

(5) Zeige, daß in (Gruppen) ein Morphismus genau dann epimorph ist, wenn seine zugrundeliegende Abbildung surjektiv ist.

Aufgabe 4 (§1.1.3) Bestimme in der Kategorie $\mathcal{C}$ ein initiales und ein terminales Objekt. Existiert ein Nullobjekt?

(1) $\mathcal{C} =$ (Mengen).

(2) $\mathcal{C} =$ (Ringe).

(3) $\mathcal{C} = R$-Mod, wobei R ein Ring sei.

Aufgabe 5 (§1.1.3) Zeige.

(1) Sei R ein Ring. Sei $n \geqslant 0$. In R-Mod ist R^n projektiv.

(2) Sei k ein Körper. Jeder k-Modul ist bijektiv.

(3) Sei R ein Hauptidealbereich. Ein R-Modul Q heiße *divisibel,* falls es für alle $q \in Q$ und alle $r \in R \smallsetminus \{0\}$ ein $q' \in Q$ mit $rq' = q$ gibt. Zeige, daß divisible R-Moduln injektiv sind. (Hinweis: Zorn auf die halbgeordnete Menge

$$\{\, (Y, g) \;:\; Q \subseteq Y \subseteq X \text{ Teilmodul, } Y \xrightarrow{g} Q \text{ Morphismus mit } g|_Q = 1_Q \}$$

anwenden.)

Aufgabe 6 (§1.2.1) Seien G und H Gruppen. Konstruiere in (Gruppen):

(1) $G \sqcap H$,

(2) $G \amalg H$. (Hinweis: Verwende eine freie Gruppe auf $G \sqcup H$.)

Ist (Gruppen) eine additive Kategorie?

Aufgabe 7 (§1.2.2) Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie.

(1) Zeige, daß für je zwei Objekte X und Y die Menge ${}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ mit der Operation $(+)$ eine abelsche Gruppe bildet. (Hinweis: Die Assoziativität haben wir in der Vorlesung bei der Herleitung des Matrixkalküls mit gezeigt, aber die hier zu zeigende Tatsache nicht verwandt. Also braucht Assoziativität nicht nochmals gezeigt werden, und ferner darf der Matrixkalkül hier verwandt werden.)

(2) Zeige, daß für $X \underset{f'}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \underset{g'}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Z$ die Distributivität

$$(f+f')(g+g') \;=\; fg + fg' + f'g + f'g'$$

gilt.

(3) Zeige, daß für jedes Objekt $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ die Menge $\operatorname{End}_{\mathcal{C}} X$ zusammen mit der Addition und der durch die Komposition von Morphismen gegebenen Multiplikation einen Ring bildet.

Aufgabe 8 (§1.2.2) Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie. Zeige, daß Summanden projektiver Objekte wieder projektiv sind.

Aufgabe 9 (§1.3.1) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Wir haben einen Funktor $(-,=)$ von $\mathcal{C}$ nach $[\![\mathcal{C}^\circ, (\text{Mengen})]\!]$, der X nach $(-,X)$ schickt.

(1) Definiere $(-,=)$ auf Morphismen in $\mathcal{C}$ (in natürlicher Weise).

(2) Sei $F \in \operatorname{Ob}[\![\mathcal{C}^\circ, (\text{Mengen})]\!]$. Zeige, daß die Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} ((-,X),F) & \longleftrightarrow & FX \\ \alpha & \xmapsto{e} & (\alpha)e \;:=\; (1_X)(\alpha X) \\ (d_t X')_{X'\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}} \;=\; d_t & \xleftarrow[]{d}\!\shortmid & t \end{array}$$

beide wohldefiniert sind und sich wechselseitig invertieren, wobei

$$d_t X' \;:\; (X',X) \longrightarrow FX'\,, \quad (X' \xrightarrow{f} X) \longmapsto (t)(Ff)\,.$$

(3) Zeige, daß $(-,=) : \mathcal{C} \longrightarrow [\![\mathcal{C}^\circ, (\text{Mengen})]\!]$ voll und treu ist. Ist $(-,=)$ dicht?

Aufgabe 10 (§1.3.2.3)

(1) Seien $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ und $\mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ Funktoren. Zeige, daß $F \dashv G$ genau dann, wenn es Transformationen $1_\mathcal{C} \xrightarrow{\varepsilon} G \circ F$ (die *Einheit*) und $F \circ G \xrightarrow{\eta} 1_\mathcal{D}$ (die *Coeinheit*) gibt mit

$$\begin{array}{rcll} (\varepsilon GY)(G\eta Y) & = & 1_{GY} & \text{für alle } Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D} \\ (F\varepsilon X)(\eta FX) & = & 1_{FX} & \text{für alle } X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\ . \end{array}$$

(2) Sind $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ und $\mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ sich bis auf Isotransformation invertierende Äquivalenzen, i.e. gibt es $1_\mathcal{C} \underset{\sim}{\xrightarrow{\alpha}} G \circ F$ und $F \circ G \underset{\sim}{\xrightarrow{\beta}} 1_\mathcal{D}$, so ist $F \dashv G$. Gib eine Formel in α, β, F und G für Einheit und Coeinheit an.

Aufgabe 11 (§1.3.2.3) Es gibt den Funktor des *Abelianisierens*

$$\begin{array}{rcl} (\text{Gruppen}) & \xrightarrow{(-)^{\text{ab}}} & (\text{AbGruppen}) \\ G & \longmapsto & G^{\text{ab}} := G/G'\ . \end{array}$$

(1) Gib eine geeignete Definition von $(-)^{\text{ab}}$ auf den Morphismen.

(2) Zeige, daß der Funktor $(-)^{\text{ab}}$ linksadjungiert zum Inklusionsfunktor (AbGruppen) $\hookrightarrow$ (Gruppen) ist. Gib Einheit und Coeinheit an.

Aufgabe 12 (§1.3.2.1) Seien G und H Gruppen, aufgefaßt als Kategorien.

Beschreibe die Isoklassen in $[\![G, H]\!]$.

Aufgabe 13 (§1.4.1) Seien R und S Ringe. Ein R-*Rechtsmodul* ist ein R°-Linksmodul, und dito die Morphismen. Ist $M = (M, \varphi)$ ein R-Rechtsmodul, so schreibt man in der Regel $(m)\varphi(r) =: mr$, da dann $m(rr') = (mr)r'$ gilt, wobei $m \in M$ und $r,\ r' \in R$. Die Kategorie der R-Rechtsmoduln wird mit Mod-R bezeichnet.

Ein R-S-*Bimodul* besteht aus den Daten $M = (M, \varphi, \psi)$, wobei (M, φ) ein R-Linksmodul, (M, ψ) ein S-Rechtsmodul, und $(rm)s = r(ms)$ gelte für alle $r \in R$, $m \in M$ und $s \in S$. Zum Beispiel ist jeder R-Linksmodul ein R-$\mathbf{Z}$-Bimodul.

(1) Sei M ein R-Rechtsmodul. Sei N ein R-Linksmodul. Sei A eine abelsche Gruppe. Eine Abbildung $M \times N \xrightarrow{f} A$ heißt R-bilinear, falls

$$\begin{array}{rcl} (mr, n)f & = & (m, rn)f\ , \\ (m + m', n)f & = & (m, n)f + (m', n)f\ , \\ (m, n + n')f & = & (m, n)f + (m, n')f \end{array}$$

gelten für alle $m,\ m' \in M,\ n,\ n' \in N$ und $r \in R$.

Sei M ein R-Rechtsmodul und N ein R-Linksmodul. Konstruiere eine abelsche Gruppe $M \otimes_R N$ zusammen mit einer R-bilinearen Abbildung $M \times N \xrightarrow{b} M \otimes_R N$,

$(m,n) \longmapsto m \otimes n$ derart, daß es für jede R-bilineare Abbildung $M \times N \xrightarrow{f} A$ in eine abelsche Gruppe A genau eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $M \otimes_R N \xrightarrow{\tilde{f}} A$ gibt mit $b\tilde{f} = f$. Es heißt $M \otimes_R N$ dann das *Tensorprodukt* von M und N über R.

(2) Ist M ein R-Rechtsmodul, und ist N ein R-S-Bimodul, so ist $M \otimes_R N$ ein S-Rechtsmodul. (Usf.)

(3) Ist M ein R-Rechtsmodul, N ein R-S-Bimodul und P ein S-Linksmodul, so ist

$$\begin{array}{ccc} (M \otimes_R N) \otimes_S P & \longrightarrow & M \otimes_R (N \otimes_S P) \\ (m \otimes n) \otimes p & \longmapsto & m \otimes (n \otimes p) \end{array}$$

ein $\mathbf{Z}$-linearer Isomorphismus. ("Das Tensorprodukt ist assoziativ.")

(4) Ist N ein R-S-Bimodul, so ist

$$\begin{array}{ccc} S\text{-Mod} & \xrightarrow{N \otimes_S -} & R\text{-Mod} \\ X & \longmapsto & N \otimes_S X \end{array}$$

nach geeigneter Definition der Operation auf den Morphismen ein additiver Funktor, linksadjungiert zu ${}_R(N,-) := {}_{R\text{-Mod}}(N,-)$. Wobei für letzteren Funktor noch die S-Modulstruktur auf ${}_R(N,U)$ für $U \in \operatorname{Ob} R\text{-Mod}$ zu erklären ist.

(5) Sei M ein R-Rechtsmodul. Sei N ein R-Linksmodul. Zeige oder widerlege.

  (a) Es ist $M \times N \xrightarrow{b} M \otimes_R N$ eine surjektive Abbildung (cf. (1)).

  (b) Ist $R = k$ ein Körper, und sind M und N endlichdimensional, so ist

$$\dim_k(M \otimes_k N) \;=\; (\dim_k M)(\dim_k N)\;.$$

  (c) Sind $M \not\simeq 0$ und $N \not\simeq 0$, so ist auch $M \otimes_R N \not\simeq 0$.

Aufgabe 14 (§1.5.3.1) Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$.

Ein Morphismus $K_f \xrightarrow{i} X$ heißt *Kern* von f, falls $if = 0$ und es für alle Morphismen $T \xrightarrow{t} X$ mit $tf = 0$ genau einen Morphismus $T \xrightarrow{t'} K_f$ mit $t'i = t$ gibt.

Manchmal bezieht man sich mit dem Begriff des Kerns auch nur auf das Objekt K_f.

Dual der Begriff des Cokerns $Y \xrightarrow{p} C_f$ zu $X \xrightarrow{f} Y$.

(1) Seien $K \xrightarrow{i} X$ und $K' \xrightarrow{i'} X$ Kerne zu $X \xrightarrow{f} Y$. Zeige, daß es genau einen Isomorphismus $K \xrightarrow[\sim]{k} K'$ mit $ki' = i$ gibt.

(2) Zeige, daß jeder Kern in $\mathcal{A}$ ein Monomorphismus ist.

(3) Sei R ein Ring. Zeige, daß jeder Morphismus in R-Mod einen Kern und einen Cokern besitzt.

(4) (i) Zeige, daß es in $\mathcal{A}$ einen induzierten Morphismus vom Cokern des Kerns in den Kern des Cokerns eines Morphismus gibt, so alle vier existieren.

(ii) Zeige, daß in $\mathbf{Z}$-free jeder Morphismus Kern und Cokern hat, daß aber der induzierte Morphismus aus (i) nicht immer ein Isomorphismus ist.

(iii) Sei R ein Ring. Zeige, daß in R-Mod der induzierte Morphismus aus (i) stets ein Isomorphismus ist.

(5) Sei R ein Ring. Eine Sequenz $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$ von Morphismen in R-Mod heißt *exakt in* X, falls

$$\begin{array}{rrcl} & (X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'') & = & 0 \\ \text{und} & (K_g \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} C_f) & = & 0\,. \end{array}$$

Das ist eine selbstduale Charakterisierung. Zeige, daß diese damit äquivalent ist, daß der Kern von g und das Bild von f als Teilmoduln von X übereinstimmen.

Aufgabe 15 (§1.4.2) Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie. Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$ eine volle additive Teilkategorie.

(1) Zeige, daß $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ eine additive Kategorie ist, und daß der Restklassenfunktor $\mathcal{C} \xrightarrow{Q} \mathcal{C}/\mathcal{N}$ additiv ist.

(2) Zeige, daß der Restklassenfunktor $\mathcal{C} \xrightarrow{Q} \mathcal{C}/\mathcal{N}$ die in §1.4.2 behauptete universelle Eigenschaft hat.

Aufgabe 16 (§1.5.1) Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Ein Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ heiße *nullhomotop,* falls es ein Tupel von Morphismen $(X^i \xrightarrow{h^i} Y^{i-1})_{i\in\mathbf{Z}}$ gibt, genannt *Homotopie,* mit $h^i d + dh^{i+1} = f^i$ für alle $i \in \mathbf{Z}$.

Zeige, daß ein Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ genau dann über ein Objekt in $\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A})$ faktorisiert, wenn er nullhomotop ist.

Aufgabe 17 (§1.5.3.3) Seien R und S Ringe. Sei R-Mod $\xrightarrow{F}$ S-Mod ein additiver Funktor.

(1) Hat F einen Rechtsadjungierten, so zeige, daß F rechtsexakt ist. Kurz: Linksadjungierte sind rechtsexakt. Dual, Rechtsadjungierte sind linksexakt.

Insbesondere sind kovariante Homfunktoren linksexakt, und der Funktor $N \otimes_S -$ aus Aufgabe 13.(4) ist rechtsexakt.

(2) Zeige, daß auch kontravariante Homfunktoren von $(R\text{-Mod})^\circ$ nach $\mathbf{Z}$-Mod der Form ${}_R(-, M)$ mit $M \in \mathrm{Ob}\, R$-Mod linksexakt sind.

(3) Gib ein Beispiel für einen Rechtsadjungierten zwischen Modulkategorien, der nicht exakt ist, und ein Beispiel für einen Linksadjungierten, der nicht exakt ist.

Aufgabe 18 (§1.2) Sei R ein Ring.

(1) Zeige, daß es zu jedem Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[d, "y"'] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

in R-Mod ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & Y' \arrow[d, "y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

mit folgender universeller Eigenschaft gibt. Sind $T \xrightarrow{u} X$ und $T \xrightarrow{v} Y'$ Morphismen in R-Mod mit $uf = vy$, so gibt es genau einen Morphismus $T \xrightarrow{w} X$ mit $wx = u$ und $wf' = v$. Zeige, daß diese universelle Eigenschaft den *Pullback* X' bis auf eindeutige Isomorphie bestimmt. Der Haken im Diagramm links oben deute den Pullback an.

(2) Zeige, daß f monomorph f' monomorph impliziert. Zeige, daß f epimorph f' epimorph impliziert.

(3) Zeige, daß der auf den Kernen induzierte Morphismus $K_{f'} \xrightarrow{k} K_f$ ein Isomorphismus ist. Zeige, daß der auf den Cokernen induzierte Morphismus $C_{f'} \xrightarrow{c} C_f$ ein Monomorphismus ist. Zeige unter Vorwegnahme von Aufgabe 20, daß umgekehrt ein kommutatives Viereck genau dann ein Pullback ist, wenn auf den Kernen ein Isomorphismus und auf den Cokernen ein Monomorphismus induziert wird.

(4) Zeige, daß ein R-Modul P genau dann projektiv ist, wenn ${}_R(P,-)$: R-Mod $\longrightarrow$ $\mathbf{Z}$-Mod ein exakter Funktor ist. (Hinweis: Ist ${}_R(P,-)$ exakt, so transformiert er insbesondere einen Epimorphismus $X \twoheadrightarrow P$ in einen Epimorphismus. Umgekehrt, ist P projektiv, und ein Epimorphismus $X \twoheadrightarrow Y$ gegeben, so haben wir zu zeigen, daß jeder Morphismus $P \longrightarrow Y$ über $X \twoheadrightarrow Y$ faktorisiert. Bilde hierzu einen Pullback.)

(5) Der duale Begriff zum Pullback ist der des *Pushouts.* Dualisiere (1–4). Zeige insbesondere, daß ein R-Modul I genau dann injektiv ist, wenn ${}_R(-,I)$ exakt ist.

Aufgabe 19 (§1.2, §1.3) Sei R ein Ring.

(1) Sei I eine Indexmenge (möglicherweise unendlich). Sei $(M_i)_{i\in I}$ ein Tupel von R-Moduln. Konstruiere das Produkt $\prod_{i\in I} M_i$ und das Coprodukt $\coprod_{i\in I} M_i$. (Hinweis: Letzteres in ersterem.)

(2) Zeige, daß ${}_R(\coprod_{i\in I} M_i, -) \simeq \prod_{i\in I} {}_R(M_i, -)$, wobei die Funktorialität der rechten Seite geeignet zu definieren sei. Zeige damit und mit Aufgabe 18.(4), daß aus M_i projektiv für alle i folgt, daß $\coprod_{i\in I} M_i$ projektiv ist. Zeige dual, ist M_i injektiv für alle i, so ist $\prod_{i\in I} M_i$ injektiv.

(3) Sei X ein R-Modul. Zeige, daß es einen Projektiven P und einen Epimorphismus $P \twoheadrightarrow X$ gibt.

(4) Sei für den Moment $R = \mathbf{Z}$. Zeige, daß es für jeden $\mathbf{Z}$-Modul X einen Injektiven I und einen Monomorphismus $X \rightarrowtail I$ gibt. (Hinweis: Mit Aufgabe 5.(3) sind $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ injektiv. Sei $x \in X$. Ist $\langle x\rangle$ endlich, so gibt es $\langle x\rangle \rightarrowtail \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, ist $\langle x\rangle \simeq \mathbf{Z}$, so gibt es $\langle x\rangle \rightarrowtail \mathbf{Q}$. Wir können jeweils zu einem Morphismus $X \xrightarrow{f_x} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ resp. $X \xrightarrow{f_x} \mathbf{Q}$ fortsetzen. Diese Morphismen zusammengenommen bilden einen Morphismus in das Produkt.)

(5) Sei wieder R beliebig. Zeige, daß es für jeden R-Modul X einen Injektiven I und einen Monomorphismus $X \rightarrowtail I$ gibt. (Hinweis: Wende (4) auf $X|_{\mathbf{Z}}$ an. Zeige und verwende dann, daß für einen injektiven $\mathbf{Z}$-Modul I auch ${}_{\mathbf{Z}}(R, I)$ ein injektiver R-Modul ist.)

Aufgabe 20 (§1.5.3.4) Sei R ein Ring.

(1) Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$, i.e. sei $X'^k \xrightarrow{i^k} X^k \xrightarrow{p^k} X''^k$ kurz exakt für alle $k \in \mathbf{Z}$. Zeige, daß es eine lang exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^k X' \xrightarrow{\mathrm{H}^k i} \mathrm{H}^k X \xrightarrow{\mathrm{H}^k p} \mathrm{H}^k X'' \xrightarrow{\partial^k} \mathrm{H}^{k+1} X' \xrightarrow{\mathrm{H}^{k+1} i} \mathrm{H}^{k+1} X \xrightarrow{\mathrm{H}^{k+1} p} \mathrm{H}^{k+1} X'' \longrightarrow \cdots$$

gibt, wobei der *Verbindungsmorphismus* $\mathrm{H}^k X'' \xrightarrow{\partial^k} \mathrm{H}^{k+1} X'$ wie folgt repräsentantenweise erklärt ist.

> Sei $x'' \in \mathrm{Z}^k X''$. Sei $x \in X^k$ gewählt mit $xp^k = x''$. Sei $x' \in X'^{k+1}$ mit $x' i^{k+1} = xd$. Es ist $x'd = 0$, also $x' \in \mathrm{Z}^{k+1} X'$. Es repräsentiert x' in $\mathrm{H}^{k+1} X'$ das Bild unter ∂^k des von x'' in $\mathrm{H}^k X'$ repräsentierten Elementes.

(2) Sei

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & X'' \arrow[d, "f''"] \\ Y' \arrow[r, "j"] & Y \arrow[r, "q"] & Y'' \end{tikzcd}$$

ein Morphismus kurz exakter Sequenzen in R-Mod (Morphismus in $[\![\Delta_2, R\text{-Mod}\,]\!]$). Zeige, daß aus f' und f'' isomorph folgt, daß f isomorph ist.

(3) Sei

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & X'' \arrow[d, "f''"] \\ Y' \arrow[r, "j"] & Y \arrow[r, "q"] & Y'' \end{tikzcd}$$

ein Morphismus kurz exakter Sequenzen in R-Mod. Zeige die Existenz einer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Kern} f' \longrightarrow \operatorname{Kern} f \longrightarrow \operatorname{Kern} f'' \longrightarrow \operatorname{Cokern} f' \longrightarrow \operatorname{Cokern} f \longrightarrow \operatorname{Cokern} f' \longrightarrow 0\,,$$

i.e. einer Sequenz, welche in allen Nichtendtermen exakt ist.

(4) Sei

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "fg"] & \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Dreieck in R-Mod. Zeige die Existenz einer lang exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Kern} f \longrightarrow \operatorname{Kern}(fg) \longrightarrow \operatorname{Kern} g \longrightarrow \operatorname{Cokern} f \longrightarrow \operatorname{Cokern}(fg) \longrightarrow \operatorname{Cokern} g \longrightarrow 0\,,$$

(Hinweis: Um (3) zweimal anwenden zu können, füge man das Bild von f ein.)

Aufgabe 21 (§1.5.4, Aufgabe 20) Zeige oder widerlege.

(1) Seien R und S Ringe. Sei $R\text{-Mod} \xrightarrow{F} S\text{-Mod}$ additiv. Es ist $\mathrm{K}(F)\circ\mathrm{PRes} \simeq \mathrm{PRes}\circ F$.

(2) Sei R ein Ring. Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$ eine kurz exakte Sequenz in R-Mod. Es ist (i,p) split kurz exakt genau dann, wenn i Coretraktion ist, und auch genau dann, wenn p Retraktion ist.

Aufgabe 22 (Aufgabe 19) Sei R ein Ring. Ein R-Modul isomorph zu einem R-Modul der Form $\coprod_{i\in I} R$ für eine Indexmenge I heiße *frei (auf I)*.

(1) Zeige, daß $X \in \operatorname{Ob} R\text{-Mod}$ genau dann projektiv ist, wenn X ein direkter Summand eines freien Moduls ist. (Genauso folgt, daß X genau dann endlich erzeugt und projektiv ist, wenn X direkter Summand eines endlich erzeugten freien Moduls ist.)

(2) Zeige, daß ein direkter Summand von R isomorph zu einem Modul von der Form Re mit einem *Idempotent* $e \in R$ ist, i.e. einem Element e von R, welches $e^2 = e$ erfüllt.

Aufgabe 23 (§1.5.4)
Sei

$$R \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & 0 & \mathbf{Q} \end{pmatrix} := \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \;:\; a_{i,j} = 0 \text{ für } i > j \right\} \;\subseteq\; \mathbf{Q}^{3\times 3}\,.$$

(1) Gib drei paarweise nichtisomorphe projektive Summanden von R an.
(Hinweis: Isomorphe Moduln haben dieselben Annullatorideale.)

(2) Gib drei paarweise nichtisomorphe Injektive von R-Mod von $\mathbf{Q}$-Dimension $\leqslant 3$ an.
(Hinweis: Zeige zunächst, daß $R\text{-Mod} \simeq [\![\Delta_2, \mathbf{Q}\text{-Mod}]\!]$.)

(3) Löse die Projektiven aus (1) injektiv und die Injektiven aus (2) projektiv auf.

Aufgabe 24 (§1.5.3.3) Sei R ein Ring. Sei P ein projektiver Modul in Mod-R. Zeige, daß $P \otimes_R -$ exakt ist. (Hinweis: Reduziere zum Fall $P = \coprod_I R$ für eine Indexmenge I. Zeige, daß $(\coprod_I R) \otimes_R M \simeq \coprod_I (R \otimes_R M)$.)

Aufgabe 25 (§1.6.1)

(1) Sei $p > 0$ prim. Sei $k \geqslant 1$. Zeige, daß $\mathbf{Z}/p^k$ injektiv ist in $(\mathbf{Z}/p^k)$-Mod.
(Hinweis: die Lösung zu Aufgabe 5.(3) kann teils zitiert, teils imitiert werden.)

(2) Berechne die lang exakte Sequenz der Rechtsabgeleiteten von

$$G \;:=\; {}_{\mathbf{Z}/16}(\mathbf{Z}/4, -) \;:\; (\mathbf{Z}/16)\text{-Mod} \;\longrightarrow\; (\mathbf{Z}/8)\text{-Mod}$$

auf der kurz exakten Sequenz $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$.

(3) Berechne die lang exakte Sequenz der Rechtsabgeleiteten von

$$H \;:=\; {}_{\mathbf{Z}/16}(-, \mathbf{Z}/4) \;:\; ((\mathbf{Z}/16)\text{-Mod})^\circ \;\longrightarrow\; (\mathbf{Z}/8)\text{-Mod}$$

auf der kurz exakten Sequenz $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$.

Aufgabe 26 (§1.6.1) Seien R, S und T Ringe. Gegeben seien ferner linksexakte additive Funktoren $R\text{-Mod} \xrightarrow{F} S\text{-Mod} \xrightarrow{G} T\text{-Mod}$. Zeige oder widerlege.

(1) Ist $I \in \operatorname{Ob} R\text{-Mod}$ injektiv, so ist $\mathrm{R}^i F I \simeq 0$ für $i > 0$.

(2) Es ist $(\mathrm{R}^i G) \circ (\mathrm{R}^j F) \simeq \mathrm{R}^{i+j}(G \circ F)$ für $i,\, j \;\geqslant\; 0$.

(3) Ist F linksexakt, so ist auch $\mathrm{R}^i F$ linksexakt für $i \geqslant 0$.

(4) Ist F rechtsexakt, so ist $\mathrm{R}^i F \simeq 0$ für $i > 0$.

Aufgabe 27 (§1.6.1) Sei R ein Ring. Seien $X, Y \in \operatorname{Ob} R$-Mod. Betrachte die Menge der kurz exakten Sequenzen mit Kern X und Cokern Y. Zwei solche kurz exakten Sequenzen heißen *äquivalent,* wenn sie in $[\![\Delta_2, R\text{-Mod}]\!]$ isomorph sind vermöge eines Diagrammisomorphismus, der auf X und auf Y die Identität stehen hat. Sei $\operatorname{ext}^1_R(Y, X)$ die Menge der Äquivalenzklassen.

Sei auf der anderen Seite $F := {}_R(-, X) : R\text{-Mod} \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$. Wir wollen wie folgt eine Bijektion Φ von der abelschen Gruppe $\mathrm{R}^1 FY$ zur Menge $\operatorname{ext}^1_R(Y, X)$ konstruieren. Sei $P := \operatorname{PRes} Y$. Sei $P^1 \xrightarrow{z} X$ mit $dz = 0$ ein Repräsentant eines Elements von $\mathrm{R}^1 FY$. Sei $\mathrm{B}_0 P \xrightarrow{z'} X$ die Faktorisierung von z. Sei $X \rightarrowtail E$ der Pushout von $\mathrm{B}_0 P \rightarrowtail P_0$ entlang z'. Sei $X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow Y$ das Bild von z unter Φ.

Zeige, daß Φ eine wohldefinierte Abbildung ist. Konstruiere die Umkehrbijektion Φ^{-1}.

Aufgabe 28 (§1.6.2.4) Sei $p > 0$ prim.

(1) Berechne $\operatorname{Ext}^k_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m)$ und $\operatorname{Tor}^{\mathbf{Z}}_k(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m)$ für $k \geqslant 0$ und $l, m \geqslant 1$ auf je 3 Weisen (wie im Korollar aus §1.6.2.4 beschrieben).

(2) Berechne $\operatorname{Ext}^2_{\mathbf{Z}/p^3}(\mathbf{Z}/p^2, \mathbf{Z}/p)$ und $\operatorname{Tor}^{\mathbf{Z}/p^3}_2(\mathbf{Z}/p^2, \mathbf{Z}/p)$ auf je 2 Weisen. Vergleiche mit (1).

Aufgabe 29 (§1.6.2.4) Sei R ein kommutativer Ring. Sei A ein Ring. Sei $R \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Z}(A)$ ein Ringmorphismus in das *Zentrum* $\mathrm{Z}(A) := \{z \in A \; : \; za = az \text{ für alle } a \in A\}$ von A. Man sagt auch, (A, φ) ist eine *R-Algebra*. Oft schreibt man für (A, φ) kurz nur A. So z.B. ist jeder Ring auf eindeutige Weise eine $\mathbf{Z}$-Algebra, da $\mathbf{Z}$ initial in der Kategorie der Ringe ist (vgl. Aufgabe 4.(2)).

Zeige durch Betrachtung der jeweiligen Konstruktion, daß $\operatorname{Ext}^i_A(X, Y)$ für $X, Y \in \operatorname{Ob} A$-Mod und $\operatorname{Tor}^A_i(X, Y)$ für $X \in \operatorname{Ob}\text{Mod-}A$ und $Y \in \operatorname{Ob} A$-Mod in natürlicher Weise eine R-Modulstruktur tragen, funktoriell in X und Y. Formal gesprochen, man zeige, daß $\operatorname{Ext}^i_A(-, =)$ und $\operatorname{Tor}^A_i(-, =)$ über den treuen Vergißfunktor $R\text{-Mod} \hookrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$ faktorisieren.

Aufgabe 30 (§1.6.2.4) Sei $R = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & 0 & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$. Wir verwenden die Bezeichnung der Lösung zu Aufgabe 23. Berechne

$$\dim_{\mathbf{Q}} \operatorname{Ext}^k_R(I_i, P_j)$$

für $i, j \in [1, 3]$ und $k \geqslant 0$ (eine Berechnungsweise genüge; vgl. Aufgabe 29 für die $\mathbf{Q}$-Vektorraumstruktur).

Aufgabe 31 (§1.6.2.3) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ additive Kategorien. Seien $U, V \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}^+(\mathcal{A})$. Sei $U \xrightarrow{f} V$ ein nullhomotoper Morphismus in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ (vgl. Aufgabe 16). Sei $U' \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}^+(\mathcal{A}')$. Zeige, daß $\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(f, U')$ nullhomotop ist. (Hinweis: Gib eine Homotopie an. Hierzu dürfen Indizes bei Morphismen unterschlagen werden.)

Aufgabe 32 (§2.1.1) Sei R ein kommutativer Ring, sei G eine Gruppe. Zeige, daß es einen Monoidmorphismus $G \xrightarrow{\varepsilon G} RG$ gibt, natürlich in G. Zeige, daß es für eine R-Algebra A und für einen Monoidmorphismus $G \xrightarrow{f} A$ genau einen Ringmorphismus $RG \xrightarrow{\hat{f}} A$ derart gibt, daß

$$(G \xrightarrow{\varepsilon G} RG \xrightarrow{\hat{f}} A) \;=\; (G \xrightarrow{f} A)\,.$$

Aufgabe 33 (§1.6.2.4) Sei R ein kommutativer Ring. Sei $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge (d.h. ein Teilmonoid von $(R, \cdot)$). Sei $S^{-1}R$ die Lokalisation von R an S. Als Menge ist $S^{-1}R = \{\frac{r}{s} \;:\; r \in R,\; s \in S\}$, wobei $\frac{r}{s}$ für die Äquivalenzklasse von Paaren $(r, s) \in R \times S$ steht, für die Äquivalenzrelation $(r, s) \sim (r', s')$, falls es ein $t \in S$ mit $ts'r = tsr'$ gibt. Es ist $S^{-1}R$ ein Ring vermöge der üblichen Bruchrechenregeln. Es gibt einen Ringmorphismus $R \xrightarrow{i} S^{-1}R$, $r \longmapsto \frac{r}{1}$. Jeder Ringmorphismus $R \longrightarrow U$, der S in die Einheiten von U abbildet, faktorisiert eindeutig über i.

(1) Für einen R-Modul M setze man $S^{-1}M = \{\frac{m}{s} \;:\; m \in M,\; s \in S\}$, wobei $\frac{m}{s}$ für die Äquivalenzklasse von Paaren $(m, s) \in M \times S$ steht, für die Äquivalenzrelation $(m, s) \sim (m', s')$, falls es ein $t \in S$ mit $ts'm = tsm'$ gibt. Zeige, daß $S^{-1}M$ ein $S^{-1}R$-Modul ist. Sei A eine R-Algebra. Zeige, daß $S^{-1}A$ eine $S^{-1}R$-Algebra ist.

(2) Sei A eine R-Algebra (z.B. $A = R$). Definiere einen Funktor

$$\begin{array}{rcl} A\text{-Mod} & \longrightarrow & (S^{-1}A)\text{-Mod} \\ M & \longmapsto & S^{-1}M\,, \end{array}$$

und zeige, daß er exakt ist. (Hinweis: Zeige Rechtsexaktheit mittels $S^{-1}M \simeq S^{-1}A \otimes_A M$.)

Ist $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal, und ist $S = R \setminus \mathfrak{p}$, so schreibt man auch $R_\mathfrak{p} := S^{-1}R$, $M_\mathfrak{p} := S^{-1}M$ für einen R-Modul M, und speziell auch $A_\mathfrak{p} := S^{-1}A$, und spricht von der *Lokalisierung von R, M bzw. A an $\mathfrak{p}$.*

(3) Sei A eine R-Algebra. Sei $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge. Sei $i \geqslant 0$.

Sei M ein A-Rechtsmodul, sei N ein A-Linksmodul. Zeige, daß $\operatorname{Tor}_i^{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N) \simeq S^{-1}\operatorname{Tor}_i^A(M, N)$ als $S^{-1}R$-Moduln.

Seien M und N A-Linksmoduln. Falls A ein noetherscher Ring und M endlich erzeugt über A ist, so zeige, daß $\operatorname{Ext}^i_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N) \simeq S^{-1}\operatorname{Ext}^i_A(M, N)$ als $S^{-1}R$-Moduln.

(Hinweis: Zeige, daß aus M projektiv über A folgt, daß $S^{-1}M$ projektiv über $S^{-1}A$ ist. Zeige dann die jeweilige Aussage zunächst im Falle $i = 0$.)

Aufgabe 34 (§1.6.2.4) Sei R ein Ring.

(1) Seien $U \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}^-(R\text{-Mod})$, sei $V \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}^+(R\text{-Mod})$, sei $k \geqslant 0$. Schreibe ${}_{R}(U,V) := F^{\mathrm{CC}}(U,V)$ für $F := {}_{R}(-,=)$. Zeige, daß ${}_{\mathrm{C}(R\text{-Mod})}(U, V[k]) \simeq \mathrm{Z}^k \mathrm{t}_R(U,V)$. Zeige, daß ${}_{\mathrm{K}(R\text{-Mod})}(U, V[k]) \simeq \mathrm{H}^k \mathrm{t}_R(U,V)$.

(2) Seien X, $Y \in \operatorname{Ob} R\text{-Mod}$, sei $k \geqslant 0$. Zeige unter Verwendung von (1), daß

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Ext}^k_R(X,Y) & \simeq & {}_{\mathrm{K}(R\text{-Mod})}(\mathrm{PRes} X, \mathrm{IRes} Y[k]) \\ & \simeq & {}_{\mathrm{K}(R\text{-Mod})}(\mathrm{Konz}\, X, \mathrm{IRes} Y[k]) \\ & \simeq & {}_{\mathrm{K}(R\text{-Mod})}(\mathrm{PRes} X, (\mathrm{Konz}\, Y)[k]) \; . \end{array}$$

In der Homotopiekategorie $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$ wird also “ Ext wieder zu Hom ”.

Aufgabe 35 (§2.1.1)

(1) Zeige, daß

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}\mathcal{S}_2 & \xrightarrow{\omega_2} & \{(a,b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \;:\; a \equiv_2 b\} \;\subseteq\; \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \\ (1,2) & \longmapsto & (1,-1) \end{array}$$

einen Isomorphismus von Ringen (i.e. von $\mathbf{Z}$-Algebren) definiert.

(2) Zeige, daß

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}\mathcal{S}_3 & \xrightarrow{\omega_3} & \{(a, \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ d & e \end{smallmatrix}\right), f) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^{2\times 2} \times \mathbf{Z} \;:\; a \equiv_2 f,\; a \equiv_3 b,\; e \equiv_3 f,\; d \equiv_3 0\} \;\subseteq\; \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^{2\times 2} \times \mathbf{Z} \\ (1,2) & \longmapsto & (1, \left(\begin{smallmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right), -1) \\ (1,2,3) & \longmapsto & (1, \left(\begin{smallmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1) \end{array}$$

einen Isomorphismus von Ringen (i.e. von $\mathbf{Z}$-Algebren) definiert.

(3) Gib eine Beschreibung von $\mathbf{Z}_{(2)}\mathcal{S}_2$ und von $\mathbf{Z}_{(p)}\mathcal{S}_2$ für p prim, $p \geqslant 3$, unter Verwendung von ω_2.

(4) Gib eine Beschreibung von $\mathbf{Z}_{(2)}\mathcal{S}_3$ und von $\mathbf{Z}_{(3)}\mathcal{S}_3$ unter Verwendung von ω_3.

Zerlege $\mathbf{Z}_{(3)}\mathcal{S}_3$ in eine direkte Summe zweier nichtverschwindender projektiver $\mathbf{Z}_{(3)}\mathcal{S}_3$-Moduln.

Aufgabe 36 (§2.1.2) Sei R ein kommutativer Ring. Sei G eine endliche Gruppe. Verwende $|G|$ via $\mathbf{Z} \longrightarrow R$ auch als Element von R.

(1) Sei $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ eine kurz exakte Sequenz von RG-Moduln, in welcher M'' als R-Modul projektiv sei. Zeige, daß es eine RG-lineare Abbildung $M' \xleftarrow{f} M$ mit $if = |G| \cdot 1_{M'}$ gibt.

(2) Seien M und N RG-Moduln. Sei M projektiv über R. Zeige, daß $|G| \cdot \mathrm{Ext}^k_{RG}(M,N) \simeq 0$ für $k \geqslant 1$.
(Hinweis: Ein Repräsentant in $\mathrm{Z}^k(P,N)$ faktorisiert über $\mathrm{B}_{k-1}P \longrightarrow N$. Kann man mit Hilfe von (1) noch weiter gehen?)

(3) Sei $M \in \mathrm{Ob}\,\text{Mod-}RG$. Sei $N \in \mathrm{Ob}\,RG\text{-Mod}$. Sei M projektiv über R. Zeige, daß $|G| \cdot \mathrm{Tor}^{RG}_k(M,N) \simeq 0$ für $k \geqslant 1$. (Hinweis: Verwende (1) und betrachte $\mathrm{B}_{k-1}P \otimes_{RG} N \longrightarrow P_{k-1} \otimes_{RG} N \longrightarrow \mathrm{B}_{k-1}P \otimes_{RG} N$.)

(4) Zeige, daß in (2) $\mathrm{Ext}^k_{RG}(M,N) \simeq 0$ für $k \geqslant 1$ und daß in (3) $\mathrm{Tor}^{RG}_k(M,N) \simeq 0$ für $k \geqslant 1$, falls $|G|$ in R invertierbar ist.

Aufgabe 37 (§2.2.1) Sei R ein kommutativer Ring. Seien M und N RG-Moduln.

(1) Zeige, daß $M \xrightarrow{\mathrm{ev}M} M^{**}$ ein Isomorphismus ist, falls M endlich erzeugt projektiv über R ist.

(2) Zeige, daß $M^* \otimes_R N \xrightarrow{d(M,N)} {}_R(M,N)$ ein Isomorphismus ist, falls (i) oder (ii) erfüllt ist.

  (i) Es ist M endlich erzeugt projektiv über R.

  (ii) Es ist R noethersch, es ist M endlich erzeugt über R, und es ist N projektiv über R.

Aufgabe 38 (§2.3.1) Sei R ein kommutativer Ring. Sei $n \geqslant 2$.

Bezeichne $C_n = \langle c : c^n = 1 \rangle$ die zyklische Gruppe von Ordnung n.

(1) Gib eine periodische projektive Auflösung P von R über RC_n an.

(2) Gib Morphismen von Komplexen $\mathrm{Bar}_{C_n;R} \xrightarrow{f} P$ und $P \xrightarrow{g} \mathrm{Bar}_{C_n;R}$ an, welche in $\mathrm{K}(RC_n\text{-Mod})$ sich gegenseitig invertierende Isomorphismen darstellen.
(Hinweis: Aus $\mathrm{H}_0(f) = \mathrm{H}_0(g) = 1_R$ folgt bereits, daß sich f und g bis auf Homotopie invertieren, da $\mathrm{K}^{-,0}(RC_n\text{-Mod}) \xrightarrow{\mathrm{H}_0} RC_n\text{-Mod}$ eine Äquivalenz ist.)

Aufgabe 39 (§2.1.2, Aufgabe 36) Sei G eine endliche Gruppe. Sei M ein $\mathbf{Z}G$-Modul.

Zeige oder widerlege.

(1) Ist M ein endlich erzeugter $\mathbf{Z}G$-Modul (i.e. gibt es einen Epimorphismus $(\mathbf{Z}G)^k \longrightarrow M$ für ein $k \geqslant 0$), so sind $\mathrm{H}^i(G,M)$ und $\mathrm{H}_i(G,M)$ endlich für $i \geqslant 1$.

(2) Sind M und G als Mengen endlich, und sind $|M|$ und $|G|$ teilerfremd, so ist $\mathrm{H}^i(G,M) = 0$ oder $\mathrm{H}_i(G,M) = 0$ für $i \geqslant 0$.

(3) Sind M und G als Mengen endlich, und sind $|M|$ und $|G|$ teilerfremd, so ist $\mathrm{H}^i(G,M) = 0$ und $\mathrm{H}_i(G,M) = 0$ für $i \geqslant 1$.

Aufgabe 40 (§2.1.2, Aufgabe 35)

(1) Löse $\mathbf{Z}_{(2)}$ projektiv über $\mathbf{Z}_{(2)}\mathcal{S}_3$ auf mittels einer periodischen projektiven Auflösung. (Hinweis: 35 (4).)

(2) Löse $\mathbf{Z}_{(3)}$ projektiv über $\mathbf{Z}_{(3)}\mathcal{S}_3$ auf mittels einer periodischen projektiven Auflösung. (Hinweis: 35 (4).)

(3) Sei $k \geqslant 0$. Berechne $\mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3; \mathbf{Z}_{(2)})$. Berechne $\mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3; \mathbf{Z}_{(3)})$. Berechne

$$\mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3) \ .$$

(Hinweis: Aufgabe 33.(3), Aufgabe 36.(2).)

(4) Sei $k \geqslant 0$. Berechne $\mathrm{H}_k(\mathcal{S}_3; \mathbf{Z}_{(2)})$. Berechne $\mathrm{H}_k(\mathcal{S}_3; \mathbf{Z}_{(3)})$. Berechne

$$\mathrm{H}_k(\mathcal{S}_3) \ .$$

(Hinweis: Aufgabe 33.(3), Aufgabe 36.(3). Verwende eine Auflösung in zweiter Variablen.)

Aufgabe 41 (§2.4) Sei $n \geqslant 2$. Wir verwenden die Bezeichnungen von Aufgabe 38.

(1) Berechne den Cohomologiering $\mathrm{H}^*(C_n)$.

(2) Berechne den Cohomologiering $\mathrm{H}^*(C_n; \mathbf{Z}/n)$.

(3) Sei G eine Gruppe. Sei R ein kommutativer Ring. Sei $k \geqslant 0$.
Zeige oder widerlege: Ist $\chi \in \mathrm{H}^{2k+1}(G; R)$, so ist $\chi \cup \chi = 0$.

Den Cohomologiering zu berechnen, heiße hierbei, $\mathrm{H}^k(C_n)$ resp. $\mathrm{H}^k(C_n; \mathbf{Z}/n)$ für $k \geqslant 0$ zu berechnen und Produkte für $\mathbf{Z}$-lineare Erzeuger auszuwerten.

(Hinweise: Verwende Aufgabe 38.(1) zum Bestimmen von $\mathbf{Z}$-linearen Erzeuger von $\mathrm{H}^*(C_n)$, verwende die Standardauflösung zum Berechnen derer Produkte, und verwende Aufgabe 38.(2) zum Wechseln zwischen beiden Interpretationen. Ähnlich für $\mathrm{H}^*(C_n; \mathbf{Z}/n)$. Bis zu einem gewissen Punkt lassen sich (1) und (2) auch gemeinsam lösen.)

Aufgabe 42 (§2.5.2) Der $\mathbf{Z}\mathcal{S}_3$-Modul M habe die $\mathbf{Z}$-lineare Basis (e_1, e_2, e_3) und sei mit der Operation

$$\sigma \cdot e_i \ := \ e_{i\sigma^{-1}}$$

ausgestattet für $\sigma \in \mathcal{S}_3$ und $i \in [1,3]$.

(Dieser Modul wird auch als *natürlicher* $\mathbf{Z}\mathcal{S}_3$-Modul bezeichnet, nicht zu verwechseln mit dem *regulären* $\mathbf{Z}\mathcal{S}_3$-Modul $\mathbf{Z}\mathcal{S}_3$.)

Berechne $\mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3, M)$ und $\mathrm{H}_k(\mathcal{S}_3, M)$ für $k \geqslant 0$.

Aufgabe 43 (§2.5.2) Sei G eine Gruppe. Sei $H \leqslant G$ eine Untergruppe mit $[G : H] < \infty$. Sei R ein kommutativer Ring. Sei X ein RG-Modul. Sei Y ein RH-Modul. Sei $k \geqslant 0$. Zeige folgende Isomorphien von R-Moduln.

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{H}^k(H, {}_R(Y, X{\downarrow}_H); R) & \simeq & \mathrm{H}^k(G, {}_R(Y{\uparrow}^G, X); R) \\
\mathrm{H}_k(H, {}_R(Y, X{\downarrow}_H); R) & \simeq & \mathrm{H}_k(G, {}_R(Y{\uparrow}^G, X); R) \\
\mathrm{H}^k(H, Y \otimes_R X{\downarrow}_H; R) & \simeq & \mathrm{H}^k(G, Y{\uparrow}^G \otimes_R X; R) \\
\mathrm{H}_k(H, Y \otimes_R X{\downarrow}_H; R) & \simeq & \mathrm{H}_k(G, Y{\uparrow}^G \otimes_R X; R)
\end{array}$$

Aufgabe 44 (§2.5.4) Sei R ein kommutativer Ring. Sei G eine Gruppe. Seien $L \leqslant H \leqslant G$ mit $[G : L] < \infty$. Seien X und X' zwei RG-Moduln. Sei $k \geqslant 0$. Zeige, daß

$$\begin{array}{rl}
& \left(\mathrm{Ext}^k_{RL}(X{\downarrow}_L, X'{\downarrow}_L) \xrightarrow{\mathrm{Tr}{\uparrow}_L^H} \mathrm{Ext}^k_{RH}(X{\downarrow}_H, X'{\downarrow}_H) \xrightarrow{\mathrm{Tr}{\uparrow}_H^G} \mathrm{Ext}^k_{RG}(X, X') \right) \\
= & \left(\mathrm{Ext}^k_{RL}(X{\downarrow}_L, X'{\downarrow}_L) \xrightarrow{\mathrm{Tr}{\uparrow}_L^G} \mathrm{Ext}^k_{RG}(X, X') \right) .
\end{array}$$

Aufgabe 45 (§2.5.4) Sei $n \geqslant 1$. Sei m ein Teiler von n. Sei R ein kommutativer Ring. Sei $k \geqslant 0$. Berechne

$$\mathrm{H}^k(C_m; R) \xrightarrow{\mathrm{Tr}{\uparrow}_{C_m}^{C_n}} \mathrm{H}^k(C_n; R)$$

und

$$\mathrm{H}^k(C_n; R) \xrightarrow{\mathrm{Res}{\downarrow}_{C_m}^{C_n}} \mathrm{H}^k(C_m; R) .$$

Bestätige die Formel für deren Komposition. (Hinweis: Verwende Aufgabe 41.)

Aufgabe 46 (§2.5.5.1) Sei R ein kommutativer Ring. Sei G eine Gruppe. Sei $L \leqslant H \leqslant G$ mit $[G : L] < \infty$. Seien X und X' zwei RG-Moduln. Sei $k \geqslant 0$. Zeige, daß

$$\begin{array}{rl}
& \left(\mathrm{Tor}_k^{RG}(X, X') \xrightarrow{\mathrm{Tr}{\downarrow}_H^G} \mathrm{Tor}_k^{RH}(X{\downarrow}_H, X'{\downarrow}_H) \xrightarrow{\mathrm{Tr}{\downarrow}_L^H} \mathrm{Tor}_k^{RL}(X{\downarrow}_L, X'{\downarrow}_L) \right) \\
= & \left(\mathrm{Tor}_k^{RG}(X, X') \xrightarrow{\mathrm{Tr}{\downarrow}_L^G} \mathrm{Tor}_k^{RL}(X{\downarrow}_L, X'{\downarrow}_L) \right) .
\end{array}$$

Aufgabe 47 (§2.5.5.1) Sei $n \geqslant 1$. Sei m ein Teiler von n. Sei R ein kommutativer Ring. Sei $k \geqslant 0$. Berechne

$$\mathrm{H}_k(C_n; R) \xrightarrow{\mathrm{Tr}{\downarrow}_{C_m}^{C_n}} \mathrm{H}_k(C_m; R)$$

und

$$\mathrm{H}_k(C_m; R) \xrightarrow{\mathrm{Can}{\uparrow}_{C_m}^{C_n}} \mathrm{H}_k(C_n; R) .$$

Bestätige die Formel für deren Komposition.

Aufgabe 48 (§2.5.4, §2.5.5.1) Sei $k \geqslant 0$. Sei G eine Gruppe. Sei $H \leqslant G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Sei R ein kommutativer Ring. Sei M ein RG-Modul. Zeige oder widerlege.

(1) Es ist $\mathrm{H}_0(H, M\!\downarrow_H; R) \xrightarrow{\mathrm{Can}\uparrow_H^G} \mathrm{H}_0(G, M; R)$ surjektiv.

(2) Es ist $\mathrm{H}^k(G, M; R) \xrightarrow{\mathrm{Res}\downarrow_H^G} \mathrm{H}^k(H, M\!\downarrow_H; R)$ injektiv.

Aufgabe 49 (§2.5.4) Sei G eine endliche Gruppe. Wir betrachten die $\mathbf{Z}G$-Moduln $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{Q}$, auf denen jedes Element von G identisch operiere.

(1) Sei R ein kommutativer Ring. Sei A eine R-Algebra. Seien $X,\, X' \in \mathrm{Ob}\, A\text{-Mod}$. Seien $r,\, r' \in R$ so, daß die Multiplikation mit r resp. r' einen Automorphismus auf X resp. X' induziert. Sei $k \geqslant 0$. Zeige, daß die Multiplikation mit rr' einen Automorphismus auf $\mathrm{Ext}_A^k(X, X')$ induziert.

(2) Zeige, daß $\mathrm{H}^k(G, \mathbf{Q}) = 0$ für $k \geqslant 1$. (Hinweis: (1), sowie Korollar zu Transfer.)

(3) Zeige unter Verwendung der kurz exakten Sequenz $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, daß $\mathrm{H}^k(G) \simeq \mathrm{H}^{k-1}(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ falls $k \geqslant 2$, und daß $\mathrm{H}^1(G) = 0$.

(4) Sei A eine abelsche Gruppe, welche vermittels identischer Operation aller Elemente von G zu einem $\mathbf{Z}G$-Modul werde. Zeige, daß $\mathrm{H}^1(G, A) \simeq {}_{(\mathrm{AbGruppen})}(G^{\mathrm{ab}}, A)$. Zeige so erneut, daß $\mathrm{H}^1(G) = 0$.

Aufgabe 50 (§2.5.5.2.1)

(1) Sei A ein Ring. Seien I und J Ideale in A. Zeige, daß

$$\mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/J) \;\simeq\; (I \cap J)/(I \cdot J)\,.$$

(Hinweis: Die kurz exakte Sequenz $J \longrightarrow A \longrightarrow A/J$ zeigt, daß $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/J) \simeq \mathrm{Kern}(A/I \otimes_A J \longrightarrow A/I)$. Der Morphismus kurz exakter Sequenzen von $IJ \longrightarrow J \longrightarrow A/I \otimes_A J$ nach $I \longrightarrow A \longrightarrow A/I$ zeigt dann die Behauptung.)

(2) Sei G eine Gruppe, sei R ein kommutativer Ring. Wende (1) an für $A := RG$ und $I := J := \mathrm{Aug}_{G;R}$, um erneut zu folgern, daß $\mathrm{H}_1(G; R) \simeq \mathrm{Aug}_{G;R}/\mathrm{Aug}_{G;R}^2$.

Aufgabe 51 (§2.5.5.2.1) Sei R ein kommutativer Ring. Sei G eine Gruppe. Schreibe $I := \mathrm{Aug}_{G;R}$.

(1) Sei M ein RG-Modul, welcher über R projektiv ist. Zeige, daß $\mathrm{H}_k(G, M; R) \simeq \mathrm{H}_{k-1}(G, M \otimes_R I; R)$ für $k \geqslant 2$.

(2) Sei M ein RG-Modul. Zeige, daß $\mathrm{H}_1(G, M; R) \simeq \mathrm{Kern}(I \otimes_{RG} M \xrightarrow{\mu} M)$, wobei $(i \otimes m)\mu := im$.

(3) Zeige, daß $\mathrm{H}_k(G; R) \simeq \mathrm{Kern}(I^{\otimes(k-1)} \otimes_{RG} I \xrightarrow{\mu} I^{\otimes(k-1)})$ für $k \geqslant 1$, wobei die Tensorpotenz mit $\otimes := \otimes_R$ zu bilden sei.

Aufgabe 52 (§2) Sei R ein Hauptidealbereich. Bezeichne proj-R die Kategorie der endlich erzeugten projektiven R-Moduln. Wir unterschlagen an einigen Stellen die Notation von R als Index. Seien $P \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}(\text{proj-}R)$ und $M \in \mathrm{Ob}\,R\text{-Mod}$. Sei $\mathrm{Z}(P)$ der Komplex mit $(\mathrm{Z}(P))_k = \mathrm{Z}_k(P)$ und $d = 0$ stets. Sei $\mathrm{B}(P)$ der Komplex mit $(\mathrm{B}(P))_k = \mathrm{B}_k(P)$ und $d = 0$ stets.

(1) Wir haben eine kurz exakte Sequenz von Komplexen $\mathrm{Z}(P) \longrightarrow P \longrightarrow \mathrm{B}(P)[1]$.

(2) Für $k \in \mathbf{Z}$ haben wir eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Z}_k(P) \otimes M & \longrightarrow & \mathrm{H}_k(P \otimes M) & \longrightarrow & \mathrm{B}_{k-1}(P) \otimes M & \xrightarrow{\partial_k} \\ \mathrm{Z}_{k-1}(P) \otimes M & \longrightarrow & \mathrm{H}_{k-1}(P \otimes M) & \longrightarrow & \mathrm{B}_{k-2}(P) \otimes M & , \end{array}$$

in welcher $(x_k d \otimes m)\partial_k = x_k d \otimes m$ für $x_k \in P_k$ und $m \in M$.

(3) Für $k \in \mathbf{Z}$ haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(\mathrm{H}_{k-1}(P), M) \longrightarrow \mathrm{B}_{k-1}(P) \otimes M \longrightarrow \mathrm{Z}_{k-1}(P) \otimes M \longrightarrow \mathrm{H}_{k-1}(P) \otimes M \longrightarrow 0 .$$

(4) Für $k \in \mathbf{Z}$ haben wir eine split kurz exakte Sequenz

$$\mathrm{H}_k(P) \otimes M \rightarrowtail \mathrm{H}_k(P \otimes M) \twoheadrightarrow \mathrm{Tor}_1(\mathrm{H}_{k-1}(P), M) .$$

(5) Analog, für $k \in \mathbf{Z}$ haben wir eine split kurz exakte Sequenz

$$\mathrm{Ext}^1(\mathrm{H}_{k-1}(P), M) \rightarrowtail \mathrm{H}^k((P, M)) \twoheadrightarrow (\mathrm{H}_k(P), M) .$$

Aufgabe 53 (§2.5.5.2.3) Sei G eine Gruppe. Sei $H \leqslant G$ von endlichem Index. Sei $g \in G$. Berechne das Bild von g unter $G^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\mathrm{Tr}\downarrow_H^G} H^{\mathrm{ab}}$ mit dem Lemma aus §2.5.5.2.3.

(1) $G = \mathcal{S}_3$, $H = \langle(1, 2, 3)\rangle$, $g = (1, 2)$.

(2) $G = \mathcal{S}_4$, $H = \langle(1, 2, 3, 4), (1, 3)\rangle$, $g = (1, 2)$.

Aufgabe 54 (§2, Aufgabe 52) Sei R ein Hauptidealbereich. Sei G eine endliche Gruppe mit $|G| \neq 0$ in R. Sei M ein RG-Modul, auf welchem jedes Element von G identisch operiere. Sei $k \geqslant 1$. Zeige die Existenz der split kurz exakten Sequenzen in (1-4) mittels Aufgabe 52.

(0) Sei T ein endlich erzeugter R-Torsionsmodul. Berechne, daß

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ext}^1_R(T,M) & \simeq & T \otimes_R M \\ \mathrm{Tor}^R_1(T,M) & \simeq & {}_R(T,M)\ . \end{array}$$

(1) $\mathrm{H}_{k+1}(G;R) \otimes_R M \longrightarrow \mathrm{H}_{k+1}(G,M;R) \longrightarrow {}_R(\mathrm{H}_k(G;R),M)$.

(2) $\mathrm{H}^{k-1}(G;R) \otimes_R M \longrightarrow \mathrm{H}^{k-1}(G,M;R) \longrightarrow {}_R(\mathrm{H}^k(G;R),M)$.

(3) $\mathrm{H}_k(G;R) \otimes_R M \longrightarrow \mathrm{H}^{k+1}(G,M;R) \longrightarrow {}_R(\mathrm{H}_{k+1}(G;R),M)$.

(4) $\mathrm{H}^k(G;R) \otimes_R M \longrightarrow \mathrm{H}_{k-1}(G,M;R) \longrightarrow {}_R(\mathrm{H}^{k-1}(G;R),M)$.

(5) Sei $R = \mathbf{Z}$. Zeige unter Verwendung von $\mathrm{H}_1(G) \simeq G^{\mathrm{ab}}$ erneut, daß $\mathrm{H}^1(G,M) \simeq {}_{(\mathrm{AbGruppen})}(G^{\mathrm{ab}},M)$; vgl. Aufgabe 49.(4).

(6) Sei $R = \mathbf{Z}$. Zeige, daß $\mathrm{H}_k(G) \simeq \mathrm{H}^k(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq \mathrm{H}^{k+1}(G)$.
Insbesondere ist $\mathrm{H}^2(G) \simeq G^{\mathrm{ab}}$.

(7) Ist M ein endlich erzeugter R-Torsionsmodul, so ist $\mathrm{H}_k(G,M;R) \simeq \mathrm{H}^k(G,M;R)$.

Aufgabe 55 (§2.5.5.3) Gibt es eine einfache Gruppe der Ordnung 306 ?

Beantworte dies mit einer Betrachtung

(1) der 3-Sylowgruppen;

(2) der 17-Sylowgruppen.

Aufgabe 56 (§2.5.5.3) Sei G eine endliche Gruppe ungerader Ordnung, deren Ordnung $|G| = \prod_{p \text{ prim}} p^{\mathrm{v}_p(|G|)}$ die Bedingung $\mathrm{v}_p(|G|) \leqslant 2$ für alle p prim erfüllt; i.e. sei G von *kubusfreier* Ordnung.

Zeige, daß G auflösbar ist. Zeige genauer, daß G eine Subnormalreihe

$$1 \;=\; G_0 \;\lhd\; G_1 \;\lhd\; \cdots \;\lhd\; G_{k-1} \;\lhd\; G_k \;=\; G$$

besitzt mit $[G_i : G_{i-1}]$ prim für $i \in [1,k]$, und mit $[G_i : G_{i-1}] \leqslant [G_{i-1} : G_{i-2}]$ für $i \in [2,k]$.

(Hinweis: Sind die Sylowgruppen abelsch? Sei p der kleinste Primteiler von $|G|$, und betrachte den Index einer p-Sylowgruppe in ihrem Normalisator unter der Annahme, es gebe keinen Normalteiler von Index p in G. Dann Induktion über $|G|$.)

Aufgabe 57 (§2.5.5.3) Sei $p > 0$ eine Primzahl. Sei K eine p'-*Gruppe;* i.e. eine endliche Gruppe von Ordnung teilerfremd zu p. Sei M ein als Menge endlicher $\mathbf{Z}_{(p)}K$-Modul. Es habe M keinen Teilmodul, der als Untergruppe von Index p ist. Dann ist $M^K = 0$.

(Hinweis: M ist eine endliche abelsche p-Gruppe. Gibt es in $M \rtimes K$ einen Normalteiler von Index p?)

Aufgabe 58 (§2.4, §2.5.6) Sei $p \geqslant 3$ eine Primzahl. Für unsere Zwecke ist es günstig, $\mathcal{S}_p$ auf der Menge $[0, p-1]$ operieren zu lassen.

(1) Zeige, daß $P := \langle (0, 1, \ldots, p-1) \rangle$ eine p-Sylowgruppe von $\mathcal{S}_p$ ist. Berechne $N := \mathrm{N}_{\mathcal{S}_p}(P)$.

(2) Sei allgemein G eine Gruppe, $H \leqslant G$ eine Untergruppe und R ein kommutativer Ring. Zeige, daß $\mathrm{H}^*(G; R) \xrightarrow{\mathrm{Res}\downharpoonright^G_H} \mathrm{H}^*(H; R)$ ein *Morphismus graduierter R-Algebren* ist; i.e. ein Morphismus von R-Algebren, der homogene Elemente in homogene Elemente gleichen Grades abbildet.

(3) Wir verwenden die Bezeichnungen von Aufgabe 41. So etwa ist $\mathrm{H}^*(P; \mathbf{F}_p) \simeq \mathbf{F}_p[X, Y]/(Y^2)$, wobei X Grad 2 und Y Grad 1 haben. Verwende diesen Isomorphismus als Identifikation. Bestimme ${}^nX$ und ${}^nY$ für Erzeuger n von N.

(4) Berechne den Cohomologiering $\mathrm{H}^*(\mathcal{S}_p; \mathbf{F}_p)$ als graduierte $\mathbf{F}_p$-Algebra.

(5) Berechne unter Zuhilfenahme von (4) den Cohomologiering $\mathrm{H}^*(\mathcal{S}_{p+1}; \mathbf{F}_p)$ als graduierte $\mathbf{F}_p$-Algebra.

(Hinweis: [**3,** p. 68]; Korollar aus §2.5.6 mit $G = \mathcal{S}_p$).

Aufgabe 59 (§2.5.6) Sei G eine Gruppe. Seien $H,\ K \leqslant G$ Untergruppen von endlichem Index. Sei R ein kommutativer Ring. Sei M ein RK-Modul. Sei N ein RH-Modul. Zeige oder widerlege.

(1) Es ist $M\upharpoonright^G_K\downharpoonright^G_H \;\simeq\; \bigoplus_{g \in H\backslash G/K} ({}^gM)\downharpoonright^{{}^gK}_{{}^gK\cap H}\upharpoonright^H_{{}^gK\cap H}$ als RH-Moduln.

(2) Sei $K = H$. Es ist $M\upharpoonright^G_H \otimes_R N\upharpoonright^G_H \;\simeq\; (M \otimes_R N)\upharpoonright^G_H$ als RG-Moduln.

(3) Für $k \geqslant 0$ ist $\mathrm{Tor}_k^{RG}(M\upharpoonright^G_K, N\upharpoonright^G_H) \;\simeq\; \bigoplus_{g \in H\backslash G/K} \mathrm{Tor}_k^{R({}^gK\cap H)}\big(({}^gM)\downharpoonright^{{}^gK}_{{}^gK\cap H}, N\downharpoonright^H_{{}^gK\cap H}\big)$ als R-Moduln.

Aufgabe 60 (§3.1) Sei (Mengen*) die Kategorie der *punktierten Mengen,* die als Objekte Paare (X, x) hat, wobei X eine Menge ist und $x \in X$, und die als Morphismen $(X, x) \xrightarrow{f} (X', x')$ Mengenabbildungen $X \xrightarrow{f} X'$ hat, für die $xf = x'$. Eine Sequenz $(X', x') \xrightarrow{f'} (X, x) \xrightarrow{f''} (X'', x'')$ heiße *exakt bei* (X, x), wenn $(X')f' = f''^{-}(\{x''\})$. Wir schreiben $(X, x) = 1$, falls $X = \{x\}$.

Seien A und G Gruppen. Sei $G \xrightarrow{\varphi} (\mathrm{Aut}_{(\text{Gruppen})}\, A)^\circ$ ein Gruppenmorphismus. Es heiße $A = (A, \varphi)$ eine *G-Gruppe.* Schreibe $(a)(g\varphi) := {}^g a$ für $a \in A$ und $g \in G$. Ein *G-Gruppenmorphismus* $A \xrightarrow{f} A'$ ist ein Gruppenmorphismus, für den stets $({}^g a)f = {}^g(af)$ ist. Die Kategorie der G-Gruppen werde (G-Gruppen) geschrieben. Eine Sequenz $A' \xrightarrow{f'} A \xrightarrow{f''} A''$ von G-Gruppenmorphismen heißt *kurz exakt,* falls sie als Sequenz von Gruppenmorphismen kurz exakt ist, i.e. falls f' injektiv, falls f'' surjektiv ist, und falls $(A)f' = f''^{-}(\{1\})$.

Sei $\mathrm{H}^0(G, A) = (\{a \in A \,:\, {}^g a = a \text{ für alle } g \in G\},\ 1)$.

Sei $\mathrm{Z}^1(G, A) := \{G \xrightarrow{\partial} A \,:\, (gh)\partial = {}^g(h\partial) \cdot (g\partial) \text{ für alle } g,\, h \in G\}$. Darauf definieren wir eine Äquivalenzrelation durch $\partial' \sim \partial$, falls es ein $a \in A$ gibt mit $g\partial' = {}^g a(g\partial)a^-$ für alle $g \in G$. Die Äquivalenzklasse von $\partial \in \mathrm{Z}^1(G, A)$ werde $[\partial]$ geschrieben. Umgekehrt ist für $a \in A$ und $\partial \in \mathrm{Z}^1(G, A)$ die Abbildung $G \longrightarrow A,\ g \longmapsto {}^g a(g\partial)a^-$, wieder in $\mathrm{Z}^1(G, A)$. Sei $G \xrightarrow{\partial_1} A,\ g \longmapsto 1$.

Sei $\mathrm{H}^1(G, A) := (\mathrm{Z}^1(G, A)/\!\sim,\ [\partial_1])$.

(1) Gib Funktoren $\mathrm{H}^i(G, -)$ von (G-Gruppen) nach (Mengen*) an für $i \in \{0, 1\}$. Sei $A' \xrightarrow{f'} A \xrightarrow{f''} A''$ eine kurz exakte Sequenz von G-Gruppen. Gib einen Verbindungsmorphismus δ so an, daß die Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}^0(G, A') \xrightarrow{\mathrm{H}^0(G,f')} \mathrm{H}^0(G, A) \xrightarrow{\mathrm{H}^0(G,f'')} \mathrm{H}^0(G, A'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(G, A') \xrightarrow{\mathrm{H}^1(G,f')} \mathrm{H}^1(G, A) \xrightarrow{\mathrm{H}^1(G,f'')} \mathrm{H}^1(G, A'')$$

an jeder Stelle exakt wird.

(2) Sei $n \geqslant 1$. Sei $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung von Körpern mit Galoisgruppe G. Durch ${}^\sigma S := (s_{i,j}\sigma^-)_{i,j}$ wenn $S = (s_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(L)$ und $\sigma \in G$ wird $\mathrm{GL}_n(L)$ zu einer G-Gruppe. Zeige, daß $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{GL}_n(L)) = 1$ und $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{SL}_n(L)) = 1$. (Für $n = 1$ ist ersteres 'Hilbert 90', i.e. der Satz Nr. 90 in Hilberts *Zahlbericht*. Hinweis: [**20,** X.1].)

(3) Sei $A \in K^{n\times n}$ symmetrisch. Sei $\mathrm{O}_L(A) := \{S \in \mathrm{GL}_n(L) \,:\, SAS^{\mathrm{t}} = A\}$. Auf den symmetrischen Matrizen in $K^{n\times n}$ sei $\sim_K$ resp. $\sim_L$ definiert durch $B \sim_K B'$ resp. $B \sim_L B'$ genau dann, wenn es ein S in $\mathrm{GL}_n(K)$ resp. in $\mathrm{GL}_n(L)$ gibt mit $B' = SBS^{\mathrm{t}}$. Sei die Äquivalenzklasse von B mit $[B]_K$ resp. $[B]_L$ bezeichnet. Sei

$$\mathrm{Fib}_{L|K}(A) \ :=\ \Big(\big\{[B]_K \,:\, B \in K^{n\times n} \text{ symmetrisch, } [B]_L = [A]_L\big\},\ [A]_K\Big)$$

die Faser (engl. fibre) von $[A]_L$. Zeige, daß $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{O}_L(A))$ und $\mathrm{Fib}_{L|K}(A)$ als punktierte Mengen isomorph sind. (Hinweis: $[B]_K$ mit $A = TBT^{\mathrm{t}}$ auf $\sigma \longmapsto {}^\sigma T \cdot T^-$; für umgekehrte Richtung gewinne mit (2) aus ∂ ein $U \in \mathrm{GL}_n(L)$ und bilde auf $[U^- A (U^-)^{\mathrm{t}}]_K$ ab.)

Aufgabe 61 (§3.1, Aufgabe 60)

(1) Sei $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{C}|\mathbf{R})$. Zeige, daß $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{O}_{\mathbf{C}}(\mathrm{E}_n))$ genau $n+1$ Elemente enthält. (Hinweis: Verwende den Sylvesterschen Trägheitssatz.)

(2) Sei $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung von Körpern mit Galoisgruppe G. Schreibe $K^* := \mathrm{GL}_1(K)$ etc. Auf $\{-1,+1\} \leqslant L^*$ operiert jedes Element von G identisch. Zeige, daß $\mathrm{H}^1\big(G, \{-1,+1\}\big)$ als punktierte Menge isomorph ist zu $\Big(\big(K^* \cap (L^*)^2\big)/(K^*)^2,\ 1\Big)$.

Aufgabe 62 (§3.1.2, §3.1.3) Sei G eine Gruppe. Sei $N \trianglelefteq G$.

Berechne $\mathrm{Aut}(G,N)/\,\mathrm{Inn}(G,N)$ direkt. Vergleiche mit $\mathrm{H}^1(G/N, \mathrm{Z}(N))$. Ist die kurz exakte Sequenz $N \hookrightarrow G \longrightarrow G/N$ autostarr?

(1) Seien $G = \mathcal{S}_3$ und $N = \langle(1,2,3)\rangle$.

(2) Seien $G = \mathcal{S}_4$ und $N = \langle(1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4)\rangle$.

(3) Seien $G = D_8 = \langle(1,2,3,4),\ (1,3)\rangle \leqslant \mathcal{S}_4$ und $N = \langle(1,2,3,4)\rangle$.

(Hinweis: $\mathrm{H}^1(G/N, \mathrm{Z}(N))$ aus Beispiel aus §3.1.2.)

Aufgabe 63 (§3.1.2, §3.1.3) Sei G eine Gruppe, sei M ein $\mathbf{Z}G$-Modul. Schreibe $H := M \rtimes G$. Zeige, daß jedes Komplement zu M in H von der Form $G\sigma$ ist für ein $\sigma \in \mathrm{Aut}(H,M)$.

(Hinweis: Verkette die Korrespondenz von $\mathrm{Aut}(H,M)$ zu Z^1 mit der Korrespondenz von Z^1 zu den Komplementen.)

Aufgabe 64 (§2.5.5.3) Sei G eine endliche Gruppe. Sei p ein Primteiler von $|G|$. Sei H eine abelsche p-Sylowgruppe von N von Breite r. Sei N der Normalisator von H in G.

(1) Ist $H \leqslant \mathrm{Z}(N)$, so gibt es einen surjektiven Gruppenmorphismus von G auf H. (Hinweis: Ein Lemma in §2.5.5.3.)

(2) Ist $H \leqslant \mathrm{Z}(N)$, so ist $G \simeq M \rtimes H$ für ein $M \trianglelefteq G$. Dies ist ein Satz von Burnside.

(3) Sei p der kleinste Primteiler von G. Ist $r = 1$, so ist $H \leqslant \mathrm{Z}(N)$. Ist $r = 2$ und $p \geqslant 3$, so ist $H \leqslant \mathrm{Z}(N)$. In beiden Fällen ist H also ein Komplement in G. (Hinweis: Warum operiert N/H in beiden Fällen trivial auf H?)

Aufgabe 65 (§3.1.3, §3.2.1) Sei $p > 0$ prim.

(1) Sei M ein als Menge endlicher (additiv geschriebener) $\mathbf{Z}C_p$-Rechtsmodul. Es ist $|\mathrm{H}^1(C_p\,, M)| = |\mathrm{H}^k(C_p\,, M)|$ für alle $k \geqslant 1$.

(2) Es enthält $\operatorname{Aut} D_8$ ein Element, welches in $\operatorname{Out} D_8$ die Ordnung 2 hat, und welches auf $\mathrm{Z}(D_8)$ zur Identität einschränkt.

(3) Sei $N \longrightarrow G \longrightarrow H$ eine kurz exakte Sequenz von Gruppen. Diese definiert einen Morphismus $H \longrightarrow \operatorname{Out} N$. Seien $N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} H$ und $N \xrightarrow{\iota'} G' \xrightarrow{\pi'} H$ zwei kurz exakte Sequenzen von Gruppen, die denselben Morphismus $H \longrightarrow \operatorname{Out} N$ liefern. Diese definieren ein Element in $\mathrm{H}^2(H, \mathrm{Z}(N))$. Dieses verschwindet genau dann, wenn es einen Isomorphismus $G \xrightarrow[\sim]{\vartheta} G'$ mit $\iota\vartheta = \iota'$ und $\vartheta\pi' = \pi$ gibt.

(4) Sei P eine p-Gruppe. Ist $U < P$, so ist $U < \mathrm{N}_P(U)$. Ist U eine maximale echte Untergruppe von P, so ist U ein Normalteiler von Index p.

(5) Sei M ein (additiv geschriebener) $\mathbf{Z}C_p$-Modul von Ordnung $|M| = p^r$ für ein $r \geqslant 1$ derart, daß $[M : M^{C_p}] = p$, und derart, daß M als abelsche Gruppe nicht zyklisch ist. Ist $\mathrm{H}^2(C_p, M) = 0$, so ist $|M| = 4$.

(6) Sei P eine nichtabelsche p-Gruppe. Zeige, daß es ein Element in $\operatorname{Aut} P$ gibt, dessen Bild in $\operatorname{Out} P$ die Ordnung p hat, und welches auf $\mathrm{Z}(P)$ zur Identität einschränkt. Dies ist ein Satz von Gaschütz [**9**]. Insbesondere zeigt dieser, daß $|\operatorname{Out} P| \neq 1$; genauer, daß $p \,|\, |\operatorname{Out} P|$.

Hinweise zu Aufgabe 65. Wir folgen im wesentlichen Schmid [**19**].

(1) Verwende Aufgabe 38.

(2) Vgl. Aufgabe 62.(3).

(3) Wähle für beide Erweiterungen dieselbe mengentheoretische Hebung $H \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Aut} N$. Wähle eine mengentheoretische Coretraktion $H \xrightarrow{s} G$ zu π so, daß diese φ induziert. Analog $H \xrightarrow{s'} G'$. Setze

$$\begin{array}{rcl} H \times H & \xrightarrow{f} & \mathrm{Z}(N) \\ (h, \tilde{h}) & \longmapsto & (h,\tilde{h})f \;:=\; \big((hs)(\tilde{h}s)((h\tilde{h})s)^-\big)\iota^- \big((hs')(\tilde{h}s')((h\tilde{h})s')^-\big)^- \iota'^- \,, \end{array}$$

wobei ι^- und ι'^- inverse partiell definierte Abbildungen seien. Zeige, daß bei fest gewähltem φ die beiden Erweiterungen f in $\mathrm{H}^2(H, \mathrm{Z}(N))$ eindeutig bestimmen. Ist f nun inner via einer Abbildung $u : H \longrightarrow \mathrm{Z}(N)$, so setze $(n\iota \cdot hs)\vartheta := (hu \cdot n)\iota' \cdot hs'$. Ist umgekehrt ein ϑ gegeben, so wähle s' passend zu s.

(4) Induktion nach $|P|$. Unterschreide die Fälle $\mathrm{Z}(P) \leqslant U$ (verwende Induktionsvoraussetzung) und $\mathrm{Z}(P) \not\leqslant U$ (verwende $\mathrm{Z}(P)U \leqslant \mathrm{N}_P(U)$).

(5) Verwende Aufgabe 38, um $\mathrm{H}^2(C_p, M) = 0$ als Gleichheit von M^{C_p} zum Bild eines Differentials zu interpretieren. Zeige, daß M^{C_p}/pM^{C_p} eindimensional ist. Folgere, daß $M^{C_p}[p]$ eindimensional ist, im Gegensatz zu $M[p]$. Verwende ein $m \in M[p] \smallsetminus M^{C_p}[p]$, um auf $|M| = p^2$ zu schließen. Da $C_p = \langle c \rangle$ auf M/M^{C_p} aus Ordnungsgründen trivial operiert, können wir $mc = m + m'$ mit einem $m' \in M^{C_p}$ schreiben. Da m unter einem Differential nicht verschwinden darf, und da wir dieses unter Zuhilfenahme von $mc = m + m'$ berechnen können, folgt durch Betrachtung des Resultats dieser Rechnung schließlich $p = 2$.

(6) Sei das Gegenteil angenommen. Sei P ein Gegenbeispiel minimaler Ordnung. Sei Q ein Normalteiler von P von Index p, welcher $\mathrm{Z}(P)$ enthält. Falls möglich, wähle Q nichtabelsch. Wäre $\mathrm{Z}(Q) < \mathrm{C}_P(Q)$, so wäre $P = Q\mathrm{C}_P(Q)$, $\mathrm{C}_P(Q)/\mathrm{Z}(Q)$ zyklisch, $\mathrm{C}_P(Q)$ abelsch, und also $\mathrm{C}_P(Q) \leqslant \mathrm{Z}(P)$, im Widerspruch zu $\mathrm{Z}(P) \leqslant \mathrm{Z}(Q)$. Wäre $\mathrm{H}^1(P/Q, \mathrm{Z}(Q)) \neq 1$, so gäbe es nach §3.1.3 ein $\alpha \in \mathrm{Aut}(P,Q)/\operatorname{Inn}(P,Q)$ nichttrivial, und damit auch eines von Ordnung p. Wegen $\mathrm{C}_P(Q) = \mathrm{Z}(Q)$ wäre α nicht durch Konjugation mit einem Element aus P gegeben, und P wäre kein Gegenbeispiel, Widerspruch. Mit (1) ist $\mathrm{H}^2(P/Q, \mathrm{Z}(Q)) = 1$. Mit Aufgabe 49.(4) kann man $\mathrm{Z}(P) = \mathrm{Z}(Q)$ ausschließen.

Falls Q nichtabelsch ist, so betrachte die Operation von P auf $\operatorname{Out} Q$ via Konjugation mit inneren Automorphismen von P, eingeschränkt nach Q. Sei U die Untergruppe von $\operatorname{Out} Q$, die von Elementen repräsentiert wird, die trivial nach $\mathrm{Z}(Q)$ einschränken. Wegen der Minimalität von P enthält U ein Element der Ordnung p. Repräsentiere $\gamma \in \operatorname{Aut} Q$ einen nichttrivialen Fixpunkt von P auf U. Dank $\mathrm{H}^2(P/Q, \mathrm{Z}(Q)) = 1$ können wir mit (3) γ zu einem Automorphismus δ von P heben. Die Ordnung des Bildes von δ in $\operatorname{Out} P$ ist durch p teilbar, also o.E. gleich p. Da ferner $\delta|_{\mathrm{Z}(P)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Z}(P)}$, so daß P kein Gegenbeispiel gewesen sein kann.

Falls Q abelsch ist, so gibt es mit §3.2.1 ein Komplement K zu Q in P. Sei R als maximale $\mathrm{Z}(P)K$ enthaltende echte Untergruppe von P gewählt. Da R die gleichen Voraussetzungen wie Q erfüllt, können wir durch Wiederholung dieser Wahl annehmen, daß sowohl Q als auch R nichtzyklisch ist. Es ist $Q \cap R = \mathrm{Z}(P)$, und also $[Q : Q^K] = p$. Dank $\mathrm{H}^2(K, Q) = 1$ folgt mit (5), daß $|Q| = 4$, und also $P \simeq D_8$. Mit (2) erhalten wir einen Widerspruch.

Aufgabe 66 (§3.2.1) Sei $p \geqslant 3$ prim.

(1) Sei $n \geqslant 2$. Sei $a \in \mathbf{Z}$. Ist $a^p \equiv_{p^n} 1$, so ist $a \equiv_{p^{n-1}} 1$.

(2) Sei $n \geqslant 3$. Seien $C_{p^{n-1}} = \langle c \rangle$ und $C_p = \langle d \rangle$ geschrieben. Zeige, daß $c \longmapsto c^{1+p^{n-2}}$ einen Automorphismus α von Ordnung p von $C_{p^{n-1}}$ definiert. Sei das semidirekte Produkt $C_{p^{n-1}} \rtimes_\alpha C_p$ via $d \longmapsto \alpha$ definiert. Zeige, daß ein beliebiges semidirektes Produkt der Form $C_{p^{n-1}} \rtimes C_p$ zu genau einer der beiden Gruppen $C_{p^{n-1}} \rtimes_\alpha C_p$ und $C_{p^{n-1}} \times C_p$ isomorph ist.

(3) Sei $n \geqslant 3$. Sei P eine Gruppe von Ordnung p^n, die eine zyklische Untergruppe von Index p besitzt. Zeige, daß P isomorph ist zu genau einer der Gruppen C_{p^n}, $C_{p^{n-1}} \times C_p$ und $C_{p^{n-1}} \rtimes_\alpha C_p$.

(4) Sei P eine p-Gruppe, welche genau eine Untergruppe von Ordnung p besitzt. Zeige, daß P zyklisch ist. Dies ist ein Satz von Burnside.

(Hinweis: Betrachte Gegenbeispiel minimaler Ordnung. Sei Q ein Normalteiler von Index p in P; cf. Aufgabe 65.(4). Verwende (3).)

Aufgabe 67 (§3.2.1) Sei

$$(*) \qquad N \longrightarrow G \longrightarrow H$$

eine kurz exakte Sequenz von Gruppen mit N und H abelsch. Es definiert diese Sequenz eine $\mathbf{Z}H$-Modulstruktur auf N. Sei diese trivial, i.e. operiere jedes Element von H als Identität auf N. Sei ferner vorausgesetzt, daß $(*)$ keine semidirekte Erweiterung ist (diesenfalls wäre $G \simeq N \times H$). Zeige oder widerlege.

(1) Es ist G abelsch.

(2) Es ist G nichtabelsch.

Aufgabe 68 (§2.5.5.3) Sei G eine einfache Gruppe der Ordnung 168.

Zeige, daß $G \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$ $(:= \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)/\mathrm{Z}(\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7))$). (Hinweis: [**21,** 7.6].)

Aufgabe 69 (§2.5.4, §3.2.1; vgl. §3.2.2) Sei G eine endliche Gruppe. Sei $N \trianglelefteq G$ ein abelscher Normalteiler. Sei $N \leqslant H \leqslant G$ derart, daß $|N|$ und $[G:H]$ teilerfremd sind.

Zeige, daß N genau dann ein Komplement in G hat, wenn N ein Komplement in H hat. Dies ist ein Theorem von Gaschütz.

Aufgabe 70 (§4.3)

(1) Sei R ein Ring. Sei X ein punktweise split und endlich filtrierter Komplex von R-Moduln. Sei $\mathrm{E} = \mathrm{E}(X)$ seine Spektralsequenz. Sei $k \geqslant 1$. Sei

$$\mathrm{H}^m(X(\alpha/\alpha-1)) \;=\; 0$$

für alle $m \in \mathbf{Z}$ und alle $\alpha \in \mathbf{Z}$ mit $m+\alpha \in [1, k-1]$. Seien $\alpha,\,\delta \,\in\, \bar{\mathbf{Z}}_\infty$ und $\beta,\,\gamma \,\in\, \mathbf{Z}$ mit $\delta^{-1} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \alpha^{+1}$ gegeben. Zeige, daß

$$\mathrm{E}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)^{+m} \;=\; 0$$

falls $0 \leqslant m+\beta \leqslant m+\gamma \leqslant k-1$.

(2) Seien R, S, T Ringe. Seien $R\text{-Mod} \xrightarrow{F} S\text{-Mod} \xrightarrow{G} T\text{-Mod}$ linksexakte Funktoren. Sei X ein (F,G)-azyklisch auflösbarer R-Modul. Sei $k \geqslant 1$. Sei $(\mathrm{R}^\ell F)(X) = 0$ für $\ell \in [1, k-1]$. Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow (\mathrm{R}^k G)(\mathrm{R}^0 F)(X) \longrightarrow \big(\mathrm{R}^k(G\circ F)\big)(X) \longrightarrow (\mathrm{R}^0 G)(\mathrm{R}^k F)(X) \longrightarrow (\mathrm{R}^{k+1} G)(\mathrm{R}^0 F)(X) \longrightarrow \big(\mathrm{R}^{k+1}(G\circ F)\big)(X)$$

Vgl. [**17,** XI.§11, Ex. 3]; vgl. zweites Korollar in §4.3.

(3) Sei $p > 0$ prim. Sei P eine p-Gruppe. Sei M ein $\mathbf{Z}P$-Modul (additiv geschrieben). Sei $|M| = p^r$ für ein $r \geqslant 0$. Sei $\mathrm{H}^1(P, M) = 0$. Zeige, daß $\mathrm{H}^k(Q, M{\downarrow_Q}) = 0$ für alle $Q \leqslant P$ und alle $k \geqslant 1$. Dies ist ein Satz von Gaschütz. Vgl. [**13,** III, Satz 19.5]. (Hinweis: Mit Aufgabe 65.(4) wird die Fünftermsequenz anwendbar, um $\mathrm{H}^1(Q, M{\downarrow_Q}) \;=\; 0$ zu zeigen. Wende dann (2) und Induktion über $|P|$ an, um $\mathrm{H}^k(P, M) = 0$ zu folgern.)

Aufgabe 71 (§4.1.5) Sei R ein Ring. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus punktweise split und endlich filtierter Komplexe von R-Moduln. Es bezeichnet $\mathrm{E}(X) \xrightarrow{\mathrm{E}(f)} \mathrm{E}(Y)$ den induzierten Morphismus auf den Spektralsequenzen. Schreibe $\alpha \mathrel{\dot{<}} \beta$ für $\alpha,\, \beta \in \bar{\mathbf{Z}}_\infty$, falls $\alpha < \beta$ oder $\alpha = \beta \in \{\infty^{+k} \;:\; k \in \mathbf{Z}\} \cup \{-\infty^{+k} \;:\; k \in \mathbf{Z}\}$.

Sei $\mathrm{E}(\alpha + 1/\alpha - 1/\!\!/\alpha/\alpha - 2)^{+k}(f)$ ein Isomorphismus für alle $\alpha \in \mathbf{Z}$ und alle $k \in \mathbf{Z}$.

Zeige, daß $\mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\gamma/\alpha)^{+k}(f)$ ein Isomorphismus ist für alle $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \bar{\mathbf{Z}}_\infty$ mit $\delta^{-1} \leqslant \alpha \mathrel{\dot{<}} \beta \leqslant \gamma \mathrel{\dot{<}} \delta \leqslant \alpha^{+1}$; cf. Korollar aus §4.1.5.

(Hinweis: Verwende Fundamentalsequenz für eine Induktion, die zunächst $\mathrm{E}(\gamma/\beta - 1/\!\!/\beta/\alpha)^{+k}(f)$ isomorph für $-\infty < \alpha < \beta - 1 < \beta < \gamma < +\infty$ und $k \in \mathbf{Z}$ zeigt.)

Wir schreiben noch

$$\dot{\bar{\mathbf{Z}}}_\infty^{\#\#} \;:=\; \{\delta/\beta/\!\!/\gamma/\alpha \in \bar{\mathbf{Z}}_\infty^{\#\#} \;:\; \delta^{-1} \leqslant \alpha \mathrel{\dot{<}} \beta \leqslant \gamma \mathrel{\dot{<}} \delta \leqslant \alpha^{+1}\}\,.$$

Schreibe

$$\dot{\mathrm{E}}(X) \;:=\; \mathrm{E}(X)|_{\dot{\bar{\mathbf{Z}}}_\infty^{\#\#}} \;\in\; [\![\dot{\bar{\mathbf{Z}}}_\infty^{\#\#},\, R\text{-Mod}\,]\!]$$

für die Einschränkung; analog für die Morphismen. Es heiße $\dot{\mathrm{E}}(X)$ die *eigentliche Spektralsequenz* von X.

Die Aufgabe kann also auch wie folgt formuliert werden. Zeige, daß aus $\mathrm{E}(\alpha + 1/\alpha - 1/\!\!/\alpha/\alpha - 2)^{+k}(f)$ Isomorphismus für alle $\alpha \in \mathbf{Z}$ und alle $k \in \mathbf{Z}$ folgt, daß der induzierte Morphismus auf den eigentlichen Spektralsequenzen $\dot{\mathrm{E}}(X) \xrightarrow{\dot{\mathrm{E}}(f)} \dot{\mathrm{E}}(Y)$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 72 (§4.3) Sei R ein Ring. Eine kurz exakte Sequenz von Komplexen $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$ in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$ heiße *rein kurz exakt*, wenn in ihrer Homologiesequenz alle Verbindungsmorphismen verschwinden. Ein Monomorphismus $X' \xrightarrow{i} X$ von Komplexen heiße *rein*, falls er via Cokerns zu einer rein kurz exakten Sequenz ergänzbar ist. Dual, ein Epimorphismus $X \xrightarrow{p} X''$ von Komplexen heiße *rein*, falls er via Kerns zu einer rein kurz exakten Sequenz ergänzbar ist. Ein Morphismus $X \longrightarrow Y$ von Komplexen heiße *rein*, wenn er Komposition von einem reinen Epimorphismus, gefolgt von einem reinen Monomorphismus ist.

Vgl. [**17,** XII.11].

Um Doppelbezeichnungen mit δ als Differential und als Element von $\bar{\mathbf{Z}}_\infty$ zu vermeiden, schreiben wir hier vertikale Differentiale als ∂; dieser Buchstabe stehe hier also nicht für das Kronecker-Delta.

(1) Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$ eine kurz exakte Sequenz von Komplexen. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen.

   (a) Es ist $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$ rein kurz exakt.

(b) Es ist $\mathrm{B}^k X' \xrightarrow{\mathrm{B}^k i} \mathrm{B}^k X \xrightarrow{\mathrm{B}^k p} \mathrm{B}^k X''$ kurz exakt für alle $k \in \mathbf{Z}$.

(c) Es ist $\mathrm{Z}^k X \xrightarrow{\mathrm{Z}^k p} \mathrm{Z}^k X''$ epimorph für alle $k \in \mathbf{Z}$.

(2) Sei $X' \longrightarrow X \longrightarrow X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$. Sei X'' azyklisch. Zeige, daß $X' \longrightarrow X \longrightarrow X''$ rein kurz exakt ist.

(3) Sei $X' \xrightarrow{i} X$ ein Monomorphismus von Komplexen. Zeige, daß i genau dann rein monomorph ist, wenn das kommutative Viereck $(\mathrm{B}^k X',\, X'^k,\, \mathrm{B}^k X,\, X^k)$ ein Pullback ist für alle $k \in \mathbf{Z}$. Dual, sei $X \xrightarrow{p} X''$ ein Epimorphismus von Komplexen. Zeige, daß p genau dann rein epimorph ist, wenn das kommutative Viereck $(X^{k-1},\, \mathrm{B}^k X,\, X''^{k-1},\, \mathrm{B}^k X'')$ ein Pushout ist für alle $k \in \mathbf{Z}$.

(4) (i) Sei

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ X' \arrow[u, "x"] \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[u, "y"'] \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Viereck in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$.

Ist es punktweise ein Pushout, und ist x rein monomorph, so zeige, daß auch y rein monomorph ist. Ist dazuhin f' rein epimorph, so zeige, daß auch f rein epimorph ist.

Ist es punktweise ein Pullback, und ist y rein epimorph, so zeige, daß auch x rein epimorph ist. Ist dazuhin f rein monomorph, so zeige, daß auch f' rein monomorph ist.

(ii) Sei

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X'' \arrow[d, "f''"'] \\ Y' \arrow[r] & Y \arrow[r] & Y'' \end{tikzcd}$$

ein Morphismus kurz exakter Sequenzen in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$. Sind f' und f'' rein monomorph, so auch f. Sind f' und f'' rein epimorph, so auch f.

(5) Sei $I \in \operatorname{Ob}\mathrm{C}(R\text{-Inj})$ split; vgl. eingangs §4.3. Zeige, daß der Homfunktor $(-, I)$ rein kurz exakte Sequenzen von Komplexen in kurz exakte Sequenzen von Moduln überführt. Man sagt auch, I sei *relativ injektiv.*

Relativ injektiv, da injektiv nur relativ der rein kurz exakten Sequenzen. Injektive sind stets relativ injektiv. Daher redet man auch nicht von “rein Injektiven”, da dies die umgekehrte Implikation nahelegte.

(6) Sei $X \in \mathrm{C}(R\text{-Mod})$. Eine *relativ injektive Auflösung* von X sei ein Komplex $I \in \mathrm{C}^+(\mathrm{C}(R\text{-Mod}))$, welcher sich wie folgt als Aneinanderfügung rein kurz exakter Sequenzen in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$ schreiben läßt.

$$X \rightarrowtail I^0 \twoheadrightarrow \mathrm{B}^1 I \rightarrowtail I^1 \twoheadrightarrow \mathrm{B}^2 I \rightarrowtail I^2 \twoheadrightarrow \mathrm{B}^3 I \rightarrowtail \cdots$$

Ein solcher Komplex von Komplexen kann als Doppelkomplex aufgefaßt werden.

Zeige, daß eine relativ injektive Auflösung von X dasselbe ist wie eine Cartan-Eilenberg-Auflösung von X.

Insbesondere folgt mit dem Lemma in §4.3, daß es für jeden Komplex $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(R\text{-Mod})$ einen reinen Monomorphismus $X \longrightarrow I$ in einen spaltenden Komplex $I \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(R\text{-Inj})$ gibt.

(7) Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$ eine rein kurz exakte Sequenz. Sei I' eine relativ injektive Auflösung von X', sei I'' eine relativ injektive Auflösung von X''. Zeige, daß es eine punktweise split kurz exakte Sequenz von Doppelkomplexen $I' \longrightarrow I \longrightarrow I''$ in $\mathrm{C}^+(\mathrm{C}(R\text{-Inj}))$ gibt, welche unter $\mathrm{H}^0\left((-)^{*,-}\right)$ auf $X' \longrightarrow X \longrightarrow X''$ abgebildet wird, und in welcher auch I eine relativ injektive Auflösung von X ist. (Hinweis: Genauso wie in §1.5.5.)

(8) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$. Sei I resp. J eine relativ injektive Auflösung von X resp. Y. Zeige, daß es einen Morphismus $I \xrightarrow{\hat{f}} J$ in $\mathrm{C}^+(\mathrm{C}(R\text{-Mod}))$ gibt mit $\mathrm{H}^0\left(\hat{f}^{*,-}\right) = f$. Es heißt $\hat{f}$ dann eine *Cartan-Eilenberg-Auflösung* von f; cf. (6). (Hinweis: Genauso wie für gewöhnliche Komplexe.)

(9) Sei $\mathrm{K}(\mathrm{C}(R\text{-Mod}))$ die Homotopiekategorie der additiven Kategorie $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$; cf. §1.5.1.

Sei $\mathrm{K}^+(\mathrm{C}(R\text{-Mod})) \subseteq \mathrm{K}(\mathrm{C}(R\text{-Mod}))$ die volle Teilkategorie der Komplexe mit Werten in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$, deren Einträge an Position i verschwinden, falls $i < 0$.; cf. §1.6.2.3.

Sei $\mathrm{K}^{+,\mathrm{CE}}(\mathrm{C}(R\text{-Inj})) \subseteq \mathrm{K}^+(\mathrm{C}(R\text{-Mod}))$ die volle Teilkategorie der Cartan-Eilenberg-Auflösungen, i.e. der relativ injektiven Auflösungen; cf. (6).

Zeige, daß die nullte Homologie bezüglich der vertikalen Differentiale

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{C}(\mathrm{C}(R\text{-Mod})) & \xrightarrow{\mathrm{H}^0\left((-)^{*,-}\right)} & \mathrm{C}(R\text{-Mod}) \\ X & \longmapsto & \mathrm{H}^0(X^{*,-}) \end{array}$$

einen Funktor $\mathrm{K}(\mathrm{C}(R\text{-Mod})) \xrightarrow{\mathrm{H}^0\left((-)^{*,-}\right)} \mathrm{C}(R\text{-Mod})$ induziert, welcher zu einer Äquivalenz

$$\mathrm{K}^{+,\mathrm{CE}}(\mathrm{C}(R\text{-Inj})) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{H}^0\left((-)^{*,-}\right)} \mathrm{C}(R\text{-Mod})$$

einschränkt. (Hinweis: Wie im Satz aus §1.5.4.)

(10) Ein *horizontal split azyklischer* Doppelkomplex in $\mathrm{CC}(R\text{-Mod})$ sei darin ein Dop-

pelkomplex isomorph zu einem der Form

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & T^{i+1,j} \oplus T^{i+1,j+1} \arrow[u] \arrow[rr, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & & T^{i+1,j+1} \oplus T^{i+1,j+2} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & T^{i,j} \oplus T^{i,j+1} \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} \partial & 0 \\ 0 & \partial \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[rr, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & & T^{i,j+1} \oplus T^{i,j+2} \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} \partial & 0 \\ 0 & \partial \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Ein *vertikal split azyklischer* Doppelkomplex in CC(R-Mod) sei darin ein Doppelkomplex isomorph zu einem der Form

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & T^{i+1,j} \oplus T^{i+2,j} \arrow[u] \arrow[rr, "\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)"] & & T^{i+1,j+1} \oplus T^{i+2,j+1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & T^{i,j} \oplus T^{i+1,j} \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[rr, "\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)"] & & T^{i,j+1} \oplus T^{i+1,j+1} \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Sei $\mathrm{CC}_{\mathrm{sp\,az}}(R\text{-Mod})$ die kleinste volle additive Teilkategorie von CC(R-Mod), die alle darin liegenden horizontal und alle vertikal split azyklischen Doppelkomplexe enthält. In anderen Worten, ein Objekt in $\mathrm{CC}_{\mathrm{sp\,az}}(R\text{-Mod})$ ist isomorph zu einer direkten Summe aus einem horizontal split azyklischen und einem vertikal split azyklischen Doppelkomplex in CC(R-Mod). Sei

$$\mathrm{KK}(R\text{-Mod}) \;:=\; \mathrm{CC}(R\text{-Mod})/\mathrm{CC}_{\mathrm{sp\,az}}(R\text{-Mod})$$

die *Homotopiekategorie* der Doppelkomplexe mit Einträgen in R-Mod.

Ein Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ in CC(R-Mod) heiße ein *Doppelhomotopismus,* wenn er in KK(R-Mod) einen Isomorphismus repräsentiert.

> "Doppel" soll hierbei nur daran erinnern, daß f ein Morphismus von Doppelkomplexen ist.

Sei $I \xrightarrow{f} J$ ein Morphismus in $\mathrm{CC}(R\text{-Mod})$.

(i) Zeige, daß $I \xrightarrow{f} J$ genau dann über einen horizontal split azyklischen Doppelkomplex in $\mathrm{CC}(R\text{-Mod})$ faktorisiert, wenn es für $k, \ell \in \mathbf{Z}$ Morphismen $I^{k,\ell} \xrightarrow{h} J^{k,\ell-1}$ gibt, für die $hd + dh = f$ und $\partial h = h\partial$ stets.

(ii) Zeige, daß $I \xrightarrow{f} J$ genau dann über einen vertikal split azyklischen Doppelkomplex in $\mathrm{CC}(R\text{-Mod})$ faktorisiert, wenn es für $k, \ell \in \mathbf{Z}$ Morphismen $I^{k,\ell} \xrightarrow{\chi} J^{k-1,\ell}$ gibt, für die $\chi\partial + \partial\chi = f$ und $d\chi = \chi d$ stets.

(iii) Zeige, daß $I \xrightarrow{f} J$ genau dann in $\mathrm{KK}(R\text{-Mod})$ verschwindet, wenn es für $k, \ell \in \mathbf{Z}$ Morphismen $I^{k,\ell} \xrightarrow{h} J^{k,\ell-1}$ und $I^{k,\ell} \xrightarrow{\chi} J^{k-1,\ell}$ gibt, für die $\partial h = h\partial$, sowie $d\chi = \chi d$ und $(hd + dh) + (\chi\partial + \partial\chi) = 0$ stets.

(Hinweis: Aus Symmetriegründen genügt es, (i) zu zeigen. Cf. Aufgabe 16.)

(11) Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ additive Kategorien. Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein voller und dichter additiver Funktor. Seien $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ und $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}$ volle additive Teilkategorien derart, daß $F\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Sei für alle $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$ ein $M \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ existent mit $FM \simeq N$; i.e. sei die Einschränkung von F zu einem Funktor von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ dicht. Faktorisiere ferner jeder Morphismus in $\mathcal{A}$, der unter F auf den Nullmorphismus abgebildet wird, über ein Objekt aus $\mathcal{M}$.

Zeige, daß der induzierte Funktor

$$\mathcal{A}/\mathcal{M} \xrightarrow{\bar{F}} \mathcal{B}/\mathcal{N}$$

eine Äquivalenz ist.

(12) Schreibe

$$\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod}) \;:=\; \mathrm{C}^{+}(\mathrm{C}(R\text{-Mod}))$$

für die volle Teilkategorie von $\mathrm{CC}(R\text{-Mod})$ von Doppelkomplexen, die in den Zeilenpositionen < 0 nur Nulleinträge haben.

Sei $\mathrm{KK}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ das volle Bild von $\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ in $\mathrm{KK}(R\text{-Mod})$.

Sei $\mathrm{KK}^{\llcorner,\mathrm{CE}}(R\text{-Inj}) \subseteq \mathrm{KK}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ die volle Teilkategorie der Cartan-Eilenberg-Auflösungen.

Zeige, daß die nullte Homologie bezüglich der vertikalen Differentiale

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CC}(R\text{-Inj}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^0\left((-)^{*,-}\right)} & \mathrm{C}(R\text{-Mod}) \\ J & \longmapsto & \mathrm{H}^0(J^{*,-}) \end{array}$$

einen Funktor $\mathrm{KK}(R\text{-Inj}) \xrightarrow{\mathrm{H}^0\left((-)^{*,-}\right)} \mathrm{K}(R\text{-Mod})$ induziert, welcher zu einer Äquivalenz

$$\mathrm{KK}^{\llcorner,\mathrm{CE}}(R\text{-Inj}) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{H}^0\left((-)^{*,-}\right)} \mathrm{K}(R\text{-Mod})$$

einschränkt; cf. [**7,** XVII.§1, Prop. 1.2].

Insbesondere sind zwei Cartan-Eilenberg-Auflösungen in $\mathrm{CC}(R\text{-Inj})$ ein und desselben Komplexes $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}(R\text{-Mod})$ isomorph in $\mathrm{KK}^{\perp,\mathrm{CE}}(R\text{-Inj})$, oder, äquivalent hierzu, isomorph in $\mathrm{KK}(R\text{-Mod})$.

Aufgabe 73 (§4.3) Sei R ein Ring.

(1) Sei $X \xrightarrow{f} X'$ ein Morphismus in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$. Zeige, daß es einen split azyklischen Komplex A in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$ und einen Morphismus $X \xrightarrow{a} A$ so gibt, daß $X \xrightarrow{(f\;a)} X' \oplus A$ punktweise split monomorph ist. Ist $X^i = 0$ für $i \leqslant 0$, so können wir $A \in \mathrm{C}^+(R\text{-Mod})$ wählen. (Hinweis: Aufgabe 16.)

(2) Sei $I \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}^+(R\text{-Inj})$.

 (i) Zeige, daß jeder Morphismus von einem azyklischen Komplex X in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$ nach I in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$ den Nullmorphismus repräsentiert.

 (ii) Ist I azyklisch, so zeige, daß I split azyklisch ist.

(3) Sei $L' \longrightarrow L \longrightarrow L''$ eine punktweise split kurz exakte Sequenz in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$. Sei L'' split azyklisch. Zeige, daß diese Sequenz isomorph zu

$$L' \xrightarrow{(1\,0)} L' \oplus L'' \xrightarrow{\binom{0}{1}} L''$$

ist, und zwar vermittels eines Diagrammisomorphismus, der auf dem ersten und dem dritten Term eine Identität stehen hat.

(4) Sei $I \xrightarrow{f} I'$ ein Quasiisomorphismus in $\mathrm{C}^+(R\text{-Inj})$. Zeige, daß f ein Homotopismus ist. (Hinweis: Mit (1) dürfen wir annehmen, daß f punktweise split monomorph ist. Wende nun (2) auf den Cokern von f an, und dann (3).)

(5) Sei

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[d, "y"] \\ X' \arrow[r, "s'"] & Y' \end{tikzcd}$$

ein punktweise genommener Pushout in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$. Seien s punktweise split monomorph und quasiisomorph. Zeige, daß dann auch s' punktweise split monomorph und quasiisomorph ist. (Hinweis: Trage Cokerne ein, beachte Aufgabe 18.(5).)

(6) Sei $X \xrightarrow{s} Y$ ein Quasiisomorphismus in $\mathrm{C}^+(R\text{-Mod})$. Sei $X \xrightarrow{t} I$ ein Quasiisomorphismus mit $I \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}^+(R\text{-Inj})$. Zeige, daß es einen Quasiisomorphismus $Y \xrightarrow{u} I$ so gibt, daß das Dreieck

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & Y \arrow[dl, "u"] \\ I & \end{tikzcd}$$

in K(R-Mod) kommutiert.
(Hinweis: Bilde Pushout und löse diesen nochmals auf.)

Aufgabe 74 (§4.3) Sei R ein Ring. Ein Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ in C(R-Mod) heiße *zeilenweiser Homotopismus,* falls der Morphismus von Komplexen $X^{k,*} \xrightarrow{f^{k,*}} Y^{k,*}$ ein Homotopismus ist für alle $k \in \mathbf{Z}$. Er heiße *zeilenweiser Quasiisomorphismus,* falls der Morphismus von Komplexen $X^{k,*} \xrightarrow{f^{k,*}} Y^{k,*}$ ein Quasiisomorphismus ist für alle $k \in \mathbf{Z}$. Ferner heiße X *zeilenweise split azyklisch,* wenn $X^{k,*}$ split azyklisch ist für alle $k \in \mathbf{Z}$.

Ein zeilenweiser Homotopismus ist insbesondere ein zeilenweiser Quasiisomorphismus.

Zeilenweise Homotopismen sind nicht mit Doppelhomotopismen zu verwechseln; cf. Aufgabe 72.(10).

(1) Ist $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(R\text{-Mod})$ azyklisch, und $J \in \operatorname{Ob} \mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Inj})$ eine Cartan-Eilenberg-Auflösung von X, so zeige, daß J in KK(R-Mod) isomorph zu einer zeilenweise split azyklischen Cartan-Eilenberg-Auflösung ist. Warum genügt es zu zeigen, daß eine zeilenweise split azyklische Cartan-Eilenberg-Auflösung von X existiert?

(2) Sei $X \xrightarrow{f} X'$ ein Quasiisomorphismus in C(R-Mod). Sei J resp. J' eine Cartan-Eilenberg-Auflösung von X resp. X'. Sei $J \xrightarrow{\hat{f}} J'$ eine Cartan-Eilenberg-Auflösung von $X \xrightarrow{f} X'$; cf. Aufgabe 72.(8).

Zeige, daß sich $J \xrightarrow{\hat{f}} J'$ als Komposition von Doppelhomotopismen und von zeilenweisen Homotopismen schreiben läßt.

Aufgabe 75 (§4.3) Wir erinnern zunächst an die Definition

$$\dot{\bar{\mathbf{Z}}}_\infty^{\#\#} \;:=\; \{\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha \in \bar{\mathbf{Z}}_\infty^{\#\#} \;:\; \delta^{-1} \leqslant \alpha \mathrel{\dot{<}} \beta \leqslant \gamma \mathrel{\dot{<}} \delta \leqslant \alpha^{+1}\}\;.$$

aus Aufgabe 71.

Sei R ein Ring. Ist Y ein punktweise split und endlich filtrierter Komplex von R-Moduln, und ist E(Y) seine Spektralsequenz, so erinnern wir an die Schreibweise

$$\dot{\mathrm{E}} \;=\; \dot{\mathrm{E}}(Y) \;:=\; \mathrm{E}(Y)|_{\dot{\bar{\mathbf{Z}}}_\infty^{\#\#}} \;\in\; [\![\dot{\bar{\mathbf{Z}}}_\infty^{\#\#},\, R\text{-Mod}\,]\!]$$

für die eigentliche Spektralsequenz von Y; cf. loc. cit. Analog entstehen die *eigentlichen ersten Spektralsequenzen* $\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}$ und $\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{II}}$ eines Doppelkomplexes durch Einschränken von $\bar{\mathbf{Z}}_\infty^{\#\#}$ nach $\dot{\bar{\mathbf{Z}}}_\infty^{\#\#}$.

Sei $\mathrm{KK}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ das volle Bild von $\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ in KK(R-Mod). Analog, sei $\mathrm{KK}^{\llcorner}(R\text{-Inj})$ das volle Bild von $\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Inj})$ in KK(R-Inj).

(1) Zeige, daß

$$\mathrm{KK}^{\llcorner}(R\text{-Mod}) \;=\; \mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod}) \,\big/ \big(\mathrm{CC}_{\mathrm{sp\,az}}(R\text{-Mod}) \cap \mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})\big) \quad ;$$

cf. Aufgabe 72.(10).

(2) Sei $\delta^{-1} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \alpha^{+1}$ in $\bar{\mathbf{Z}}_\infty$. Zeige, daß ein zeilenweiser Quasiisomorphismus $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ unter dem Funktor $\mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\delta/\beta/\!\!/\gamma/\alpha)$ einen Isomorphismus liefert.

(3) Zeige, daß der Funktor $\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}$, der von $\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ nach $\llbracket \dot{\bar{\mathbf{Z}}}{}_\infty^{\#\#},\, R\text{-Mod} \rrbracket$ läuft, über $\mathrm{KK}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ faktorisiert.

(4) Zeige, daß der Totalkomplexfunktor $\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod}) \xrightarrow{\mathrm{t}} \mathrm{C}^{+}(R\text{-Mod})$ einen Totalkomplexfunktor $\mathrm{KK}^{\llcorner}(R\text{-Mod}) \xrightarrow{\mathrm{t}} \mathrm{K}^{+}(R\text{-Mod})$ induziert, welcher mißbräuchlicherweise denselben Namen trage.

Aufgabe 76 (§4.3) Seien R, S und T Ringe. Gegeben seien ferner linksexakte additive Funktoren $R\text{-Mod} \xrightarrow{F} S\text{-Mod} \xrightarrow{G} T\text{-Mod}$. Die *eigentliche Grothendieck-Spektralsequenz* $\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}$ entstehe aus der Grothendieck-Spektralsequenz $\mathrm{E}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}$ durch Einschränken von $\bar{\mathbf{Z}}_\infty^{\#\#}$ nach $\dot{\bar{\mathbf{Z}}}{}_\infty^{\#\#}$.

Sei $R\text{-Mod}_{(F,G)\text{-zul.}}$ die volle Teilkategorie der (F,G)-azyklisch auflösbaren R-Moduln in R-Mod.

(1) Konstruiere einen Funktor

$$R\text{-Mod}_{(F,G)\text{-zul.}} \xrightarrow{\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}} \llbracket \dot{\bar{\mathbf{Z}}}{}_\infty^{\#\#},\, T\text{-Mod} \rrbracket\,,$$

der in sinnvoller Weise die in §4.3 beschriebene Abbildung auf den Objekten fortsetzt, das Bilddiagramm eingeschränkt von $\bar{\mathbf{Z}}_\infty^{\#\#}$ nach $\dot{\bar{\mathbf{Z}}}{}_\infty^{\#\#}$. Sinnvoll heiße, so, daß zumindest die nachfolgenden Teilaufgaben $(3,4)$ lösbar sind.

(2) Zeige, daß $\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}(X)$ bis auf Isomorphie von der Wahl der Auflösungen A und J in §4.3 unabhängig ist.

(3) Sei $k \geqslant 0$. Zeige, daß

$$\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}(\infty/-\infty/\!\!/\infty/-\infty)^{+k} \;\simeq\; \mathrm{R}^k(G \circ F)$$

als Funktoren von $R\text{-Mod}_{(F,G)\text{-zul.}}$ nach T-Mod.

(4) Sei $k \geqslant 0$. Sei $\alpha \in [0,k]$. Zeige, daß

$$\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}(-\alpha+1/-\alpha-1/\!\!/-\alpha/-\alpha-2)^{+k} \;\simeq\; (\mathrm{R}^{\alpha}G) \circ (\mathrm{R}^{k-\alpha}F)$$

als Funktoren von $R\text{-Mod}_{(F,G)\text{-zul.}}$ nach T-Mod.

(5) Seien X und X' zwei (F,G)-azyklisch auflösbare R-Moduln. Sei $X \xrightarrow{f} X'$ eine R-lineare Abbildung, für welche $(\mathrm{R}^k F)(f)$ für alle $k \geqslant 0$ isomorph ist. Zeige, daß $(\mathrm{R}^k(G \circ F))(f)$ ein Isomorphismus ist für alle $k \geqslant 0$; einmal unter Zuhilfenahme eines Spektralsequenzargumentes, und einmal direkt unter Verwendung der Konstruktion zu (1).

(6) Zeige oder widerlege. Seien X und X' zwei (F,G)-azyklisch auflösbare R-Moduln, sei $k \geqslant 0$. Sei $X \xrightarrow{f} X'$ eine R-lineare Abbildung, für welche $(\mathrm{R}^k F)(f)$ isomorph ist. Dann ist $(\mathrm{R}^k(G \circ F))(f)$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 77 (§4.3) Seien R, R', S und T Ringe. Sei $R\text{-Mod} \times R'\text{-Mod} \xrightarrow{F} S\text{-Mod}$ ein biadditiver Funktor. Sei $S\text{-Mod} \xrightarrow{G} T\text{-Mod}$ ein additiver Funktor. Sei $X \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod}$. Sei $X' \in \mathrm{Ob}\, R'\text{-Mod}$.

Es sollen folgende Eigenschaften gelten.

(a) Es ist $F(-,X') : R\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-Mod}$ linksexakt.

(a′) Es ist $F(X,-) : R'\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-Mod}$ linksexakt.

(b) Es ist G linksexakt.

(c) Es hat X eine $(F(-,X'),G)$-azyklische Auflösung $A \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{C}^+(R\text{-Mod})$.

(c′) Es hat X' eine $(F(X,-),G)$-azyklische Auflösung $A' \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{C}^+(R'\text{-Mod})$.

(d) Das Bild des Quasiisomorphismus Konz $X \longrightarrow A$ unter $F(-,A'^k)$ ist ein Quasiisomorphismus für alle $k \geqslant 0$.

(d′) Das Bild des Quasiisomorphismus Konz $X' \longrightarrow A'$ unter $F(A^k,-)$ ist ein Quasiisomorphismus für alle $k \geqslant 0$.

Zeige, daß die eigentlichen Grothendieck-Spektralsequenzen $\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{F(X,-),G}(X')$ und $\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{F(-,X'),G}(X)$ isomorph sind in $[\![\dot{\mathbf{Z}}^{\#\#}_\infty, T\text{-Mod}]\!]$.

Aufgabe 78 (§4.3) Seien R, S, S' und T Ringe. Sei $R\text{-Mod} \xrightarrow{F} S'\text{-Mod}$ ein additiver Funktor. Sei $S\text{-Mod} \times S'\text{-Mod} \xrightarrow{G} T\text{-Mod}$ ein biadditiver Funktor. Sei $X \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod}$. Sei $Y \in \mathrm{Ob}\, S\text{-Mod}$. Sei $B \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{C}^+(S\text{-Inj})$ eine injektive Auflösung von Y.

Es sollen folgende Eigenschaften gelten.

(a) Es ist F linksexakt.

(b) Es ist $G(Y,-)$ linksexakt.

(c) Es hat X eine $(F, G(Y,-))$-azyklische Auflösung $A \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{C}^+(R\text{-Mod})$.

(d) Es ist $G(B^k, -)$ ein exakter Funktor für alle $k \geqslant 0$.

(e) Ist $I' \in \operatorname{Ob} S'$-Inj, dann ist $G(-, I')$ exakt.

Zeige, daß die eigentliche Grothendieck-Spektralsequenz $\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{F,G(Y,-)}(X)$ und die eigentliche erste Spektralsequenz $\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}\big(G(B, FA)\big)$ isomorph sind in $[\![\dot{\mathbf{Z}}^{\#\#}_{\infty}, T\text{-Mod}]\!]$.

(Hinweis: Reduziere via Aufgabe 71. Verwende in offensichtlicher Weise zu definierende Tripelkomplexe, wie z.B. $G(B, J')$ mit einer Cartan-Eilenberg-Auflösung J'.)

Aufgabe 79 (§4.3; cf. [5, Th. 3.4]) Seien R, S und T Ringe.

Seien $R\text{-Mod} \xrightarrow{F} S\text{-Mod} \xrightarrow{G} T\text{-Mod}$ linksexakte additive Funktoren. Sei $X \in R$-Mod ein (F, G)-azyklisch auflösbarer Modul. Sei $A \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}^+(R\text{-Mod})$ eine (F, G)-azyklische Auflösung von X.

Sei $B \in \operatorname{Ob} \mathrm{CC}^{\llcorner}(S\text{-Mod})$ ein Doppelkomplex mit folgenden Eigenschaften.

(a) Es ist $\mathrm{H}^0(B^{*,-}) = FA$ und $\mathrm{H}^k(B^{*,-}) = 0$ für $k \geqslant 1$.

(b) Der durch vertikale Differentiale gegebene Morphismus $B^{k,*} \longrightarrow B^{k+1,*}$ von Komplexen ist rein für alle $k \geqslant 0$.

(c) Das Objekt $\mathrm{B}^{\ell}(B^{k,*})$ ist G-azyklisch für alle $k,\ \ell, \geqslant\ 0$.

(d) Das Objekt $\mathrm{Z}^{\ell}(B^{k,*})$ ist G-azyklisch für alle $k,\ \ell, \geqslant\ 0$.

Zeige, daß die eigentliche Grothendieck-Spektralsequenz $\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{F,G}(X)$ isomorph ist zur eigentlichen ersten Spektralsequenz $\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GB)$ in $[\![\dot{\mathbf{Z}}^{\#\#}_{\infty}, T\text{-Mod}]\!]$.

(Hinweis: G führt eine kurz exakte Sequenz mit G-azyklischem Kern in eine kurz exakte Sequenz über.)

> Wir dürfen demnach auch im zweiten Schritt der Definition der Grothendieck-Spektralsequenz azyklische statt injektiver Moduln verwenden.

Aufgabe 80 (§4.4.2; cf. [5, Th. 3.5]) Sei R ein kommutativer Ring. Sei G eine endliche Gruppe. Sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Sei M ein RG-Gitter. Schreibe auch $\bar{G} := G/N$ und $\bar{g} := gN$ für $g \in G$.

Betrachte den Doppelkomplex $D = D^{-,=} := {}_{R\bar{G}}\big((\mathrm{Bar}_{\bar{G};R})_- \,,\; {}_{RN}((\mathrm{Bar}_{G;R})_=, M)\big)$.

Zeige, daß die eigentliche Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralsequenz $\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{LHS}}_{G,N;R}(M)$ isomorph ist zur ersten eigentlichen Spektralsequenz $\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(D)$ des Doppelkomplexes D.

(Hinweis: Aufgaben 77 und 78. Wie dies bisher auch schon Usus war, darf die entgegengesetzte Kategorie einer Modulkategorie wie eine Modulkategorie behandelt werden, da die verwendeten Argumente alle dualisierbar sind.)

Aufgabe 81 (§4.2.3) Sei R ein Ring. Sei $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$. Seine horizontalen Differentiale schreiben wir d, seine vertikalen δ. Wir wollen die exakte Fünftermsequenz der ersten Filtrierung $\mathrm{t_I}X$ des Totalkomplexes $\mathrm{t}X$ von X direkt herleiten, und a posteriori die Übereinstimmung mit der theoretisch gegebenen Fünftermsequenz herleiten; cf. zweites Lemma in §4.2.3. Insbesondere wollen wir so die Abbildungen der Sequenz aus loc. cit. repräsentantenweiseweise angeben.

Ein Element in $\mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(X^{-,*})$ wir repräsentiert von einem Element $x \in X^{1,0}$ mit $xd = 0$ und $x\delta = 0$.

Ein Element in $\mathrm{H}^1(\mathrm{t}X)$ wird repräsentiert von einem Element $(y, x) \in X^{0,1} \oplus X^{1,0}$ mit $(y, x)\left(\begin{smallmatrix} d & \delta & 0 \\ 0 & -d & -\delta \end{smallmatrix}\right) = 0$.

Ein Element in $\mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(X^{-,*})$ wird repräsentiert von einem Element $y \in X^{0,1}$ mit $yd = 0$ und $y\delta = ud$ für ein $u \in X^{1,0}$.

Ein Element in $\mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(X^{-,*})$ wir repräsentiert von einem Element $z \in X^{2,0}$ mit $zd = 0$ und $z\delta = 0$.

Ein Element in $\mathrm{H}^2(\mathrm{t}X)$ wird repräsentiert von einem Element $(v, w, z) \in X^{0,2} \oplus X^{1,1} \oplus X^{2,0}$ mit $(v, w, z)\left(\begin{smallmatrix} d & \delta & 0 & 0 \\ 0 & -d & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & d & \delta \end{smallmatrix}\right) = 0$.

Wir wollen wie folgt Abbildungen repräsentantenweise definieren.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(X^{-,*}) & \xrightarrow{f_1} & \mathrm{H}^1(\mathrm{t}X) \\ x & \longmapsto & (0, x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^1(\mathrm{t}X) & \xrightarrow{f_2} & \mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(X^{-,*}) \\ (y, x) & \longmapsto & y \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(X^{-,*}) & \xrightarrow{f_3} & \mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(X^{-,*}) \\ y & \longmapsto & -u\delta, \text{ wobei } y\delta = ud \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(X^{-,*}) & \xrightarrow{f_4} & \mathrm{H}^2(\mathrm{t}X) \\ z & \longmapsto & (0, 0, z) \end{array}$$

(1) Zeige die Wohldefiniertheit der Abbildungen f_1, f_2, f_3 und f_4.

(2) Zeige die Exaktheit der Sequenz

$$(*)\quad 0 \longrightarrow \mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(X^{-,*}) \xrightarrow{f_1} \mathrm{H}^1(\mathrm{t}X) \xrightarrow{f_2} \mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(X^{-,*}) \xrightarrow{f_3} \mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(X^{-,*}) \xrightarrow{f_4} \mathrm{H}^2(\mathrm{t}X)$$

an jeder Stelle.

(3) Zeige die Übereinstimmung der Sequenz $(*)$ mit der ersten Fünftermsequenz aus dem zweiten Lemma in §4.2.3.

Aufgabe 82 (§2.5.3) Sei G eine Gruppe. Sei $H \leqslant G$ eine Untergruppe von endlichem Index; i.e. $[G : H] < \infty$. Sei $RG \xrightarrow{\alpha} RH$ eine wie in §2.5.3 definierte RH-lineare Abbildung; i.e. sei für ein gewähltes, die Eins enthaltendes Repräsentantensystem von ${}_H\backslash G$ die Abbildung α dadurch bestimmt, daß alle dessen Repräsentanten auf 1 abgebildet werden.

Wir haben sich gegenseitig in $\mathrm{K}(RH\text{-Mod})$ invertierende Morphismen von Komplexen

$$\begin{array}{rcccl} & (\mathrm{Bar}_{G;R})\rfloor_H & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Bar}_{H;R} & \\ g_{[0,m]} & = \; g_0 \otimes \cdots \otimes g_m & \longmapsto & g_{[0,m]}\alpha & = \; g_0\alpha \otimes \cdots \otimes g_m\alpha \end{array}$$

und, vermöge der Inklusion $RH \hookrightarrow RG$,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Bar}_{H;R} & \longrightarrow & (\mathrm{Bar}_{G;R})\rfloor_H \\ h_{[0,m]} & \longmapsto & h_{[0,m]} \end{array}$$

Deren Komposition bezeichnen wir wieder mit $(\mathrm{Bar}_{G;R})\rfloor_H \xrightarrow{\alpha} (\mathrm{Bar}_{G;R})\rfloor_H$. Finde eine konkrete RH-lineare Homotopie für $1 - \alpha$; i.e. gib RH-lineare Abbildungen $RG^{\otimes(m+1)} \xrightarrow{\chi} RG^{\otimes(m+2)}$ für $m \geqslant 0$ so an, daß

$$\chi d + d\chi \;=\; 1 - \alpha \;:\; RG^{\otimes(m+1)} \longrightarrow RG^{\otimes(m+1)}$$

für $m \geqslant 1$, und

$$\chi d \;=\; 1 - \alpha \;:\; RG^{\otimes 1} \longrightarrow RG^{\otimes 1}\,.$$

Aufgabe 83 (§4.4.2) Sei G eine endliche Gruppe. Sei $N \trianglelefteq G$. Schreibe $\bar{G} := G/N$ und $\bar{g} := gN$ für $g \in G$. Sei R ein kommutativer Ring. Sei M ein RG-Gitter.

Sei ein Repräsentantensystem in G für die Nebenklassen modulo N gewählt, welches die 1 enthalte. Wir erinnern an die diesbezüglich definierte RN-lineare Abbildung $RG \xrightarrow{\alpha} RN$, welche allen Elementen dieses Repräsentantensystems die 1 zuordnet. Diese Abbildung wird in den Lösungen eine Rolle spielen.

Eckige Klammern um Gruppenelemente resp. um Paare von Gruppenelementen sollen in dieser Aufgabe zur Kenntlichmachung der Argumente von 1- und 2-Cozykeln und weiterer Abbildungen mit Werten in M dienen.

(1) Es ist ${}_{RN}(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)$ ein Komplex von $R\bar{G}$-Moduln; cf. Lösung zu Aufgabe 80, dortiger Funktor U. Infolgedessen erhalten M^N und $\mathrm{H}^1(N, M)$ ($:= \mathrm{H}^1(N, M\rfloor_N)$) über einen Strukturtransport ebenfalls jeweils die Struktur eines $R\bar{G}$-Moduls. Beschreibe diese element- resp. repräsentantenweise. (Hinweis: Ein 1-Cozykel γ sollte unter Multiplikation mit $\bar{x} \in \bar{G}$ modulo 1-Coränder auf $[n] \longmapsto x \cdot [n^x]\gamma$ kommen.)

(2) Es ist $\mathrm{t}(\mathrm{Bar}_{\bar{G};R} \otimes_R \mathrm{Bar}_{G;R})$ eine projektive Auflösung von R. Gib Isomorphismen zwischen $\mathrm{Bar}_{G;R}$ nach $\mathrm{t}(\mathrm{Bar}_{\bar{G};R} \otimes_R \mathrm{Bar}_{G;R})$ in $\mathrm{K}(RG\text{-Mod})$ an, die unter H_0 auf die Identität auf R abgebildet werden.

(3) Wir haben den Doppelkomplex

$$D \;=\; D^{-,=} \;:=\; {}_{R\bar{G}}\big((\mathrm{Bar}_{\bar{G};R})_- \,,\; {}_{RN}((\mathrm{Bar}_{G;R})_=, M)\big)$$

wie in Aufgabe 80. Via $G \longrightarrow \bar{G}$ ist $\mathrm{Bar}_{\bar{G};R}$ auch ein Komplex von RG-Moduln. Somit haben wir auch den Doppelkomplex

$$\tilde{D} \;=\; \tilde{D}^{-,=} \;:=\; {}_{RG}\big((\mathrm{Bar}_{\bar{G};R})_- \otimes_R ((\mathrm{Bar}_{G;R})_= \,, M\big) \;.$$

Zeige, daß $D \simeq \tilde{D}$ in $\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$.

(4) Sei $\tilde{D}$ der Doppelkomplex aus (3). Für die Darstellung von Elementen aus $\mathrm{H}^i\mathrm{H}^j(\tilde{D}^{-,*})$ resp. aus $\mathrm{H}^i(\mathrm{t}\tilde{D})$ für gewisse $i,\, j \geqslant 0$ verwenden wir Repräsentanten wie in Aufgabe 81.

(i) Ein Element in $\mathrm{H}^1(\bar{G}, M^N)$ werde repräsentiert durch einen 1-Cozykel $\bar{G} \xrightarrow{\gamma} M$, $\bar{g} \longmapsto [g]\gamma$ mit Werten in M^N. I.e. es gelte $[n]\gamma = 0$ für $n \in N$ und

$$g \cdot [h]\gamma - [gh]\gamma + [g]\gamma \;=\; 0$$

für $g,\, h \in G$. Beachte, daß dann auch $[gn]\gamma = [g]\gamma + g \cdot [n]\gamma = [g]\gamma$ und $n[g]\gamma = [ng]\gamma - n[\gamma] = [g]\gamma$ für $g \in G$ und $n \in N$ ist.

Gib sich gegenseitig invertierende R-lineare Isomorphismen zwischen $\mathrm{H}^1(\bar{G}, M^N)$ und $\mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(\tilde{D}^{-,*})$ repräsentantenweise an.

(ii) Ein Element in $\mathrm{H}^1(G, M)$ werde repräsentiert durch einen 1-Cozykel $G \xrightarrow{\gamma} M$, $g \longmapsto [g]\gamma$. I.e. es gelte

$$g \cdot [h]\gamma - [gh]\gamma + [g]\gamma \;=\; 0$$

für $g,\, h \in G$.

Gib sich gegenseitig invertierende R-lineare Isomorphismen zwischen $\mathrm{H}^1(G, M)$ und $\mathrm{H}^1(\mathrm{t}\tilde{D})$ repräsentantenweise an.

(iii) Ein Element in $\mathrm{H}^1(N, M)^{\bar{G}}$ werde repräsentiert durch von G fixierten 1-Cozykel $N \xrightarrow{\gamma} M$; cf. (1). I.e. es gelte

$$n \cdot [n']\gamma - [nn']\gamma + [n]\gamma \;=\; 0$$

für $n,\, n' \in G$; ferner gebe es eine Abbildung $G \xrightarrow{t} M$, $g \longmapsto [g]t$ mit

$$g \cdot [n^g]\gamma - [n]\gamma \;=\; n \cdot [g]t - [g]t$$

für alle $g \in G$ und alle $n \in N$.

Gib sich gegenseitig invertierende R-lineare Isomorphismen zwischen $\mathrm{H}^1(N, M)^{\bar{G}}$ und $\mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(\tilde{D}^{-,*})$ repräsentantenweise an.

(iv) Ein Element in $\mathrm{H}^2(\bar{G}, M^N)$ werde repräsentiert durch einen 2-Cozykel $\bar{G} \times \bar{G} \xrightarrow{\eta} M$, $(\bar{g}, \bar{h}) \longmapsto [g,h]\eta$ mit Werten in M^N. I.e. es gelte

$$g \cdot [h,k]\eta - [gh,k]\eta + [g,hk]\eta - [g,h]\eta \;=\; 0$$

für alle $g, h, k \in G$, und ferner $[ng, n'g']\eta = [g,g']\eta = n \cdot [g,g']\eta$ für alle $g, g' \in G$ und alle $n, n' \in N$.

Gib sich gegenseitig invertierende R-lineare Isomorphismen zwischen $\mathrm{H}^2(\bar{G}, M^N)$ und $\mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(\tilde{D}^{-,*})$ repräsentantenweise an.

(v) Ein Element in $\mathrm{H}^2(G, M)$ werde repräsentiert durch einen 2-Cozykel $G \times G \xrightarrow{\eta} M$, $(g,h) \longmapsto [g,h]\eta$. I.e. es gelte

$$g \cdot [h,k]\eta - [gh,k]\eta + [g,hk]\eta - [g,h]\eta \;=\; 0$$

für alle $g, h, k \in G$.

Gib sich gegenseitig invertierende R-lineare Isomorphismen zwischen $\mathrm{H}^2(G, M)$ und $\mathrm{H}^2(\mathrm{t}\tilde{D})$ repräsentantenweise an.

(5) Verwende die Beschreibungen der Isomorphismen aus (4) für eine isomorphe Ersetzung der exakten Sequenz aus Aufgabe 80.(2), um so eine repräsentantenweise Beschreibung der Fünftermsequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(\bar{G}, M^N) \xrightarrow{f_1'} \mathrm{H}^1(G, M) \xrightarrow{f_2'} \mathrm{H}^1(N, M)^{\bar{G}} \xrightarrow{f_3'} \mathrm{H}^2(\bar{G}, M^N) \xrightarrow{f_4'} \mathrm{H}^2(G, M)$$

aus Aufgabe 80.(2) zu erhalten. Zeige im einzelnen folgende Abbildungsvorschriften.

(i) Zeige

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^1(\bar{G}, M^N) & \xrightarrow{f_1'} & \mathrm{H}^1(G, M) \\ \gamma & \longmapsto & ([g] \longmapsto [g]\gamma) \end{array}$$

Dies ist, formal gesprochen, die Komposition von γ mit $G \longrightarrow \bar{G}$ von links und mit $M^N \hookrightarrow M$ von rechts.

(ii) Zeige

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^1(G, M) & \xrightarrow{f_2'} & \mathrm{H}^1(N, M)^{\bar{G}} \\ \gamma & \longmapsto & \gamma|_N \end{array}$$

(iii) Zeige zunächst, daß es ein $G \xrightarrow{t} M$ mit

$$g \cdot [n^g]\gamma - [n]\gamma \;=\; n \cdot [g]t - [g]t \;=\; (n-1) \cdot [g]t$$

und mit

$$[gn]t \;=\; [g]t + g \cdot [n]\gamma$$

für alle $g \in G$ und alle n gibt. Zeige nun die mittels eines solchen t gebildete Vorschrift

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^1(N, M)^{\bar{G}} & \xrightarrow{f_3'} & \mathrm{H}^2(\bar{G}, M^N) \\ \gamma & \longmapsto & \big([\bar{g}, \bar{h}] \longmapsto -g \cdot [h]t + [gh]t - [g]t\big) \end{array}$$

(iv) Zeige

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^2(\bar{G}, M^N) & \xrightarrow{f_4'} & \mathrm{H}^2(G, M) \\ \eta & \longmapsto & ([g,h] \longmapsto -[g,h]\eta) \end{array}$$

Dies ist, formal gesprochen, die negierte Komposition von η mit $G \times G \longrightarrow \bar{G} \times \bar{G}$ von links und mit $M^N \hookrightarrow M$ von rechts.

Somit haben wir eine Fünftermsequenz wie im zweiten Korollar zu §4.4 repräsentantenweise beschrieben. Ob dies die Beschreibung ist, die auch aus der Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralsequenz (also der aus der Grothendieckschen abgeleiteten) resultiert, wissen wir nicht. Zu vermuten ist es, evtl. bis auf Vorzeichen, schon. Wir wissen aber, daß die hier in Aufgabe 83 beschriebene Fünftermsequenz zur in §4.4 beschriebenen isomorph ist, da alle Terme zur jeweiligen eigentlichen Spektralsequenz gehören (vgl. Aufgabe 71, §4.2.3, §4.2.1.3), und wir somit Aufgabe 80 anwenden können. Das ausstehende Problem ist, die Kompatibilität des Isomorphismus aus Aufgabe 80 mit den interpretierenden Isomorphismen von den Spektralsequenztermen zu den 5 Cohomologiegruppen überprüfen zu müssen. Dazu müßte der Isomorphismus aus Aufgabe 80 auf den involvierten Spektralsequenztermen elementweise nachvollzogen werden.

Aufgabe 84 (§4.4.2) Sei G eine Gruppe, nicht notwendig endlich. Sei $N \trianglelefteq G$. Schreibe $\bar{G} := G/N$ und $\bar{g} := gN$ für $g \in G$. Sei R ein kommutativer Ring.

(1) Zeige, daß der Funktor

$$\begin{array}{rcl} RG\text{-Mod} & \xrightarrow{F} & R\bar{G}\text{-Mod} \\ X & \longmapsto & X^N \end{array}$$

rechtsadjungiert zu

$$\begin{array}{rcl} R\bar{G}\text{-Mod} & \xrightarrow{\dot{F}} & RG\text{-Mod} \\ Y & \longmapsto & Y \end{array}$$

ist, wobei ein $R\bar{G}$-Modul Y via $G \longrightarrow \bar{G}$ als RG-Modul aufgefaßt werde.

Verifiziere ferner, daß $\dot{F}$ exakt ist.

(2) Seien S und T Ringe. Seien

$$S\text{-Mod} \underset{V}{\overset{U}{\rightleftarrows}} T\text{-Mod}$$

Funktoren mit $V \dashv U$, d.h. V linksadjungiert zu U; und mit V exakt. Sei I ein injektiver S-Modul. Zeige, daß UI ein injektiver T-Modul ist.

(3) Sei F wie in (1) und $F' := (-)^{\bar{G}} : R\bar{G}\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$. Sei X ein beliebiger RG-Modul. Zeige, daß X ein (F, F')-azyklisch auflösbarer Modul ist. Zeige genauer, daß jede injektive Auflösung von X eine (F, F')-azyklische Auflösung ist.

Aufgabe 85 (§4.4.2) Sei G eine endliche Gruppe. Sei $N \trianglelefteq G$. Schreibe $\bar{G} := G/N$ und $\bar{g} := gN$ für $g \in G$. Sei R ein kommutativer Ring. Sei M ein RG-Gitter. Schreibe $RG\text{-Mod} \xrightarrow{F} R\bar{G}\text{-Mod}$, $X \longmapsto X^N$ und $R\bar{G} \xrightarrow{F'} R\text{-Mod}$, $Y \longmapsto Y^{\bar{G}}$.

Sind X und Y zwei RG-Moduln, so ist auf ${}_{RN}(X, Y)$ durch $(x)(\bar{g} \cdot f) := g((g^{-}x)f)$ für $f \in {}_{RN}(X, Y)$, $\bar{g} \in \bar{G}$ und $x \in X$ eine $R\bar{G}$-Modulstruktur definiert; cf. Lösung zu Aufgabe 80.

(1) Sei X ein RG-Modul. Zeige, daß X^N und ${}_{RN}(R, X)$ als $R\bar{G}$-Moduln isomorph sind.

(2) Seien A und A' zwei F-azyklische Auflösungen von M. Zeige, daß ${}_{RN}(R, A)$ und ${}_{RN}(R, A')$ in $\mathrm{K}(R\bar{G}\text{-Mod})$ isomorph sind. Insbesondere kann der $R\bar{G}$-Modul $\mathrm{H}^i(N, M)$ bis auf Isomorphie mit einer beliebig gewählten F-azyklischen Auflösung berechnet werden; cf. §4.4.2.

(3) Sei I eine injektive Auflösung von M. Sei P eine projektive Auflösung von R. Zeige, daß es Quasiisomorphismen

$$ {}_{RN}(P, M) \longleftarrow \mathrm{t}\,{}_{RN}(P, I) \longrightarrow {}_{RN}(R, I) $$

von Komplexen von $R\bar{G}$-Moduln gibt.

Aufgabe 86 (§4.4.2) Sei $n \geqslant 1$. Sei m ein Teiler von n. Schreibe $n = m \cdot d$. Sei $C_n = \langle c \rangle$. Dann ist darin $C_m = \langle c^d \rangle$ eine Untergruppe. Schreibe $\bar{c} := cC_m$. Es ist $C_d = \langle \bar{c} \rangle$ ein Quotient von C_n.

(1) Sei $k \geqslant 0$. Berechne $\mathrm{H}^k(C_m)$ als $\mathbf{Z}C_d$-Modul. (Hinweis: Verwende Aufgabe 45.)

(2) Berechne $\mathrm{H}^0(C_d, \mathrm{H}^2(C_m))$, $\mathrm{H}^1(C_d, \mathrm{H}^1(C_m))$ und $\mathrm{H}^2(C_d, \mathrm{H}^0(C_m))$.

(3) Sei $\mathrm{E} = \mathrm{E}^{\mathrm{LHS}}_{C_n, C_m; \mathbf{Z}}(\mathbf{Z})$ die zugehörige Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralsequenz. Zeige vermittels der Überlegungen im ersten Beispiel von §4.4.2 und mittels (2), daß

$$ \begin{array}{rcl} \mathrm{E}(\infty/-1/\!\!/0/-\infty)^{+2} & \simeq & \mathrm{H}^0(C_d, \mathrm{H}^2(C_m)) \\ \mathrm{E}(\infty/-2/\!\!/-1/-\infty)^{+2} & \simeq & \mathrm{H}^1(C_d, \mathrm{H}^1(C_m)) \\ \mathrm{E}(\infty/-3/\!\!/-2/-\infty)^{+2} & \simeq & \mathrm{H}^2(C_d, \mathrm{H}^0(C_m))\,. \end{array} $$

(4) Bestätige die Resultate in (2) und (3) vermittels einer direkten Berechnung der Terme von E unter Zuhilfenahme eines geeigneten Doppelkomplexes.
(Hinweis: Aufgabe 80, Aufgabe 83.(3), periodische Auflösungen. Matrixrechnungen pars pro toto für $d = 3$ durchführen.)

Aufgabe 87 (§1.6.1) Sei R ein Ring. Betrachte die Funktoren

$$ \begin{array}{rcl} [\![\Delta_1,\, R\text{-Mod}\,]\!] & \longrightarrow & R\text{-Mod} \\ (X \longrightarrow Y) & \overset{\mathrm{Kern}}{\longmapsto} & \mathrm{Kern}(X \longrightarrow Y) \\ (X \longrightarrow Y) & \overset{\mathrm{Cokern}}{\longmapsto} & \mathrm{Cokern}(X \longrightarrow Y)\,. \end{array} $$

(1) Zeige, daß $[\![\Delta_1,\ R\text{-Mod}]\!]$ äquivalent zu $\left(\begin{smallmatrix} R & 0 \\ R & R \end{smallmatrix}\right)$-Mod ist. (Hinweis: Vgl. Aufgabe 23.)

(2) Beschreibe die injektiven Objekte in $[\![\Delta_1,\ R\text{-Mod}]\!]$.

(3) Zeige, daß Kern linksexakt ist. Bestimme R^0 Kern.

(4) Bestimme R^i Kern für $i \geqslant 2$.

(5) Zeige, daß R^1 Kern $\simeq$ Cokern.

Aufgabe 88 (§4.1.3.4) Sei R ein Ring. Sei X ein punktweise split und endlich filtrierter Komplex von R-Moduln. Sei $\mathrm{E} = \mathrm{E}(X)$ seine Spektralsequenz. Sei $r \geqslant 1$.

(1) Schreibe $\mathrm{D}_r^{i,j} := \mathrm{E}(-i/-\infty /\!\!/ -i-r+1/-\infty)^{+i+j}$. Sei das r-te *Masseydreieck* gegeben durch das Diagramm

$$\mathrm{D}_r^{i,j} \longrightarrow \mathrm{D}_r^{i-1,j+1} \longrightarrow \mathrm{E}_r^{i+r-2,j-r+2} \longrightarrow \mathrm{D}_r^{i+r-1,j-r+2} \longrightarrow \mathrm{D}_r^{i+r-2,j-r+3}$$

wobei die Morphismen aus E stammen.

Zeige, daß das Masseydreieck als azyklischer Komplex aufgefaßt werden kann.

Zeige, daß das Bild von $\mathrm{D}_r^{i,j} \longrightarrow \mathrm{D}_r^{i-1,j+1}$ darin gleich $\mathrm{D}_{r+1}^{i-1,j+1}$ ist.

(2) Schreibe $\tilde{\mathrm{D}}_r^{i,j} := \mathrm{E}(\infty/-i-1 /\!\!/ \infty/-i-r)^{+i+j}$. Sei das r-te *alternative Masseydreieck* gegeben durch das Diagramm

$$\tilde{\mathrm{D}}_r^{i,j} \longrightarrow \tilde{\mathrm{D}}_r^{i-1,j+1} \longrightarrow \mathrm{E}_r^{i+r-1,j-r+2} \longrightarrow \tilde{\mathrm{D}}_r^{i+r-1,j-r+2} \longrightarrow \tilde{\mathrm{D}}_r^{i+r-2,j-r+3}$$

wobei die Morphismen aus E stammen.

Zeige, daß das alternative Masseydreieck als azyklischer Komplex aufgefaßt werden kann.

Zeige, daß das Bild von $\tilde{\mathrm{D}}_r^{i,j} \longrightarrow \tilde{\mathrm{D}}_r^{i-1,j+1}$ darin gleich $\tilde{\mathrm{D}}_{r+1}^{i-1,j+1}$ ist.

Aufgabe 89 (§4.1.3.4) Sei R ein Ring. Sei X ein punktweise split und endlich filtrierter Komplex von R-Moduln. Sei $\mathrm{E} = \mathrm{E}(X)$ seine Spektralsequenz. Seien

$$\delta^{-1} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \beta' \leqslant \gamma \leqslant \gamma' \leqslant \delta \leqslant \alpha^{+1}$$

in $\bar{\mathbf{Z}}_\infty$ gegeben. Zeige, daß das kommutative Viereck

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha) & \longrightarrow & \mathrm{E}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma'/\alpha) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{E}(\delta/\beta' /\!\!/ \gamma/\alpha) & \longrightarrow & \mathrm{E}(\delta/\beta' /\!\!/ \gamma'/\alpha) \end{array}$$

welches aus Morphismen aus E besteht, sowohl Pullback als auch Pushout ist.

Aufgabe 90 (§4.2.3)

(1) Sei R ein Ring. Sei $P \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}^-(R\text{-Proj})$. Sei $M \in \operatorname{Ob} R\text{-Mod}$. Zeige, daß es eine Spektralsequenz E gibt mit

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{E}(\infty/-\infty/\!\!/\infty/-\infty)^{+k} & \simeq & \mathrm{H}^k\big({}_R(P,M)\big) \\ \mathrm{E}(-\alpha+1/-\alpha-1/\!\!/-\alpha/-\alpha-2)^{+k} & \simeq & \operatorname{Ext}^{\alpha}_R(\mathrm{H}_{k-\alpha}(P),M) \end{array}$$

für $k \geqslant 0$ und $\alpha \in [0,k]$.

(2) Sei R ein kommutativer Ring. Sei G eine Gruppe. Sei $M \in \operatorname{Ob} R\text{-Mod}$, auch als RG-Modul mit trivialer G-Operation aufgefaßt. Zeige, daß es eine Spektralsequenz E gibt mit

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{E}(\infty/-\infty/\!\!/\infty/-\infty)^{+k} & \simeq & \mathrm{H}^k(G,M;R) \\ \mathrm{E}(-\alpha+1/-\alpha-1/\!\!/-\alpha/-\alpha-2)^{+k} & \simeq & \operatorname{Ext}^{\alpha}_R(\mathrm{H}_{k-\alpha}(G;R),M) \end{array}$$

für $k \geqslant 0$ und $\alpha \in [0,k]$.

(3) Spezialisiere (2) zu einem Hauptidealbereich R. Zeige, daß es für $k \geqslant 0$ eine kurz exakte Fundamentalsequenz

$$\operatorname{Ext}^1(\mathrm{H}_k(G;R),M) \longrightarrow \mathrm{H}^{k+1}(G,M;R) \longrightarrow {}_R(\mathrm{H}_{k+1}(G;R),M)$$

gibt. Vgl. Aufgabe 54.(3).

Aufgabe 91 (§1.5.1, Aufgaben 16, 21) Sei R ein Ring.

(1) Sei $X' \longrightarrow X \longrightarrow X''$ eine split kurz exakte Sequenz in R-Mod. Sei $Y' \longrightarrow Y \longrightarrow Y''$ eine kurz exakte Sequenz in R-Mod. Sei i ein Morphismus der ersteren in letztere, sei p ein Morphismus der letzteren in erstere. Sei $ip = 1$. Zeige, daß $X' \longrightarrow X \longrightarrow X''$ split kurz exakt ist.

(2) Sei X ein azyklischer Komplex in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$. Sei Y ein Komplex in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$. Seien $Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} Y$ Morphismen von Komplexen mit $ip = 1$. Zeige, daß Y split azyklisch ist.

(3) Sei $Y \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(R\text{-Mod})$. Zeige, daß Y genau dann in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$ isomorph zu 0 ist, wenn Y split azyklisch ist.

A.2 Lösungen

Aufgabe 1.

- Wir wollen zeigen, daß es sich bei $\mathcal{C}^\circ$ wieder um eine Kategorie handelt.

  Es ist $s_{\mathcal{C}^\circ} \circ i_{\mathcal{C}^\circ} = t_{\mathcal{C}} \circ i_{\mathcal{C}} = 1_{\mathcal{C}_0}$, und genauso $t_{\mathcal{C}^\circ} \circ i_{\mathcal{C}^\circ} = s_{\mathcal{C}} \circ i_{\mathcal{C}} = 1_{\mathcal{C}_0}$.

  Beachte, daß ${}_{\mathcal{C}^\circ}(X,Y) = {}_{\mathcal{C}}(Y,X)$. Kurz gesagt, die entgegengesetzte Kategorie wird durch "Umkehren aller Morphismenrichtungen" erhalten.

  Ferner ist für Objekte X, Y, Z von $\mathcal{C}^\circ$ die Abbildung

  $$\begin{array}{ccccc} {}_{\mathcal{C}^\circ}(X,Y) & \times & {}_{\mathcal{C}^\circ}(Y,Z) & \longrightarrow & {}_{\mathcal{C}^\circ}(X,Z) \\ (f & , & g) & \longmapsto & f \cdot_{\mathcal{C}^\circ} g \end{array}$$

  gegeben durch

  $$\begin{array}{ccccc} {}_{\mathcal{C}}(Y,X) & \times & {}_{\mathcal{C}}(Z,Y) & \longrightarrow & {}_{\mathcal{C}}(Z,X) \\ (f & , & g) & \longmapsto & g \cdot_{\mathcal{C}} f\ . \end{array}$$

  Es folgt für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ in $\mathcal{C}^\circ$, i.e. für $X \xleftarrow{f} Y \xleftarrow{g} Z \xleftarrow{h} W$ in $\mathcal{C}$, die Assoziativität aus

  $$\begin{array}{rcl} (f \cdot_{\mathcal{C}^\circ} g) \cdot_{\mathcal{C}^\circ} h & = & h \cdot_{\mathcal{C}} (g \cdot_{\mathcal{C}} f) \\ & = & (h \cdot_{\mathcal{C}} g) \cdot_{\mathcal{C}} f \\ & = & f \cdot_{\mathcal{C}^\circ} (g \cdot_{\mathcal{C}^\circ} h)\ . \end{array}$$

  Beachte, daß wegen $i_{\mathcal{C}^\circ} = i_{\mathcal{C}}$ der Morphismus $Y \xrightarrow{1_Y} Y$ sowohl in $\mathcal{C}$ als auch in $\mathcal{C}^\circ$ die Identität auf Y darstellt. Daher folgt für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}^\circ$, i.e. für $X \xleftarrow{f} Y \xleftarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}$,

  $$\begin{array}{rcl} f \cdot_{\mathcal{C}^\circ} 1_Y & = & 1_Y \cdot_{\mathcal{C}} f \\ & = & f\ , \\ 1_Y \cdot_{\mathcal{C}^\circ} g & = & g \cdot_{\mathcal{C}} 1_Y \\ & = & g\ . \end{array}$$

  Somit ist $\mathcal{C}^\circ$ eine Kategorie.

- Da $\mathcal{C}^\circ$ aus $\mathcal{C}$ durch Vertauschen der Rolle von Start- und Zielobjekt und durch entsprechendes Vertauschen der Kompositionsreihenfolge hervorgeht, stellt zweimaliges jeweiliges Vertauschen die ursprüngliche Kategorie wieder her. Es ist also $(\mathcal{C}^\circ)^\circ = \mathcal{C}$.

- Wir behaupten, daß der Begriff des Epimorphismus dual zum Begriff des Monomorphismus ist.

  Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}^\circ$ gegeben. Wir behaupten, daß $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}^\circ$ genau dann ein Epimorphismus ist, wenn $X \xleftarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}$ ein Monomorphismus ist.

  Sei $X \xrightarrow{f} Y \overset{t}{\underset{t'}{\rightrightarrows}} T$ in $\mathcal{C}^\circ$ gegeben, i.e. $X \xleftarrow{f} Y \overset{t}{\underset{t'}{\leftleftarrows}} T$ in $\mathcal{C}$.

  Aus $f \cdot_{\mathcal{C}^\circ} t = f \cdot_{\mathcal{C}^\circ} t'$ folgern zu können, daß $t = t'$ ist nach Definition von $(\cdot_{\mathcal{C}'})$ aber äquivalent dazu, aus $t \cdot_{\mathcal{C}} f = t' \cdot_{\mathcal{C}} f$ folgern zu können, daß $t = t'$. Damit ist f in $\mathcal{C}^\circ$ ein Epimorphismus genau dann, wenn f in $\mathcal{C}$ ein Monomorphismus ist, wie behauptet.

- Wir behaupten, daß der Begriff des Isomorphismus ein selbstdualer Begriff ist.

  Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}^\circ$ gegeben, d.h. $X \xleftarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}$. Es gibt genau dann ein $Y \xrightarrow{g} X$ in $\mathcal{C}^\circ$ mit $f \cdot_{\mathcal{C}^\circ} g = 1_X$ und $g \cdot_{\mathcal{C}^\circ} f = 1_Y$, wenn es zu $X \xleftarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}$ ein $Y \xleftarrow{g} X$ in $\mathcal{C}$ mit $g \cdot_{\mathcal{C}} f = 1_X$ und $f \cdot_{\mathcal{C}} g = 1_Y$ gibt – nämlich dasselbe g.

- Wir behaupten, daß der Begriff des initialen Objekts dual zu dem des terminalen Objekts ist.

  Sei $X \in \mathcal{C}_0$. Es ist X genau dann initial in $\mathcal{C}^\circ$, wenn $\#_{\mathcal{C}^\circ}(X,Y) = 1$ für alle $Y \in (\mathcal{C}^\circ)_0$ ist. Wegen $(\mathcal{C}^\circ)_0 = \mathcal{C}_0$ und wegen ${}_{\mathcal{C}^\circ}(X,Y) = {}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ ist dies äquivalent dazu, daß $\#_{\mathcal{C}}(Y,X) = 1$ für alle $Y \in \mathcal{C}_0$ ist, i.e. dazu, daß X ein terminales Objekt in $\mathcal{C}$ ist.

- Wir behaupten, daß der Begriff des Nullobjekts selbstdual ist.

  Sei $X \in \mathcal{C}_0$. Es ist nach vorstehender Überlegung X genau dann initial und terminal in $\mathcal{C}^\circ$, wenn es terminal und initial in $\mathcal{C}$ ist.

Aufgabe 2.

(1) Die Aussage ist richtig. Denn sei $fg = 1_X$, und seien $T \overset{t}{\underset{t'}{\rightrightarrows}} X$ mit $tf = t'f$ gegeben. Dann folgt $t = tfg = t'fg = t'$.

(2) Die Aussage ist falsch. Sei z.B. $\mathcal{C} = \mathbf{Z}$-Mod, und sei $(X \xrightarrow{f} Y) = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$. Die f zugrundeliegende Abbildung ist injektiv. Also folgt aus $T \overset{t}{\underset{t'}{\rightrightarrows}} X$ mit $tf = t'f$, d.h. aus $(m)tf = (m)t'f$ für alle $m \in T$, daß $(m)t = (m)t'$, und also, daß $t = t'$. Somit ist f monomorph. Dahingegen ist ${}_{\mathbf{Z}\text{-Mod}}(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \{0,1\} \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, und keiner der beiden Morphismen in die Gegenrichtung ist eine Retraktion zu f. Somit ist f keine Coretraktion.

(3) Die Aussage ist richtig. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ monomorph, und gebe es ein $X \xleftarrow{g} Y$ mit $gf = 1_Y$. Dann ist $fgf = f$, und wegen f monomorph auch $fg = 1_X$.

(4) Die Aussage ist falsch. Sei z.B. $\mathcal{C} = $ (Ringe), und sei $(X \xrightarrow{f} Y) = (\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Q})$ die Inklusionsabbildung, die z nach $\frac{z}{1}$ schickt. Da die zugrundeliegende Abbildung injektiv ist, liegt ein Monomorphismus vor (vgl. das Argument zu (2)). Wir behaupten, daß ein Epimorphismus vorliegt. Seien $\mathbf{Q} \overset{t}{\underset{t'}{\rightrightarrows}} T$ zwei Ringmorphismen, und sei $ft = ft'$; in anderen Worten, sei $t|_{\mathbf{Z}} = t'|_{\mathbf{Z}}$. Sei $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$. Wir haben zu zeigen, daß $(\frac{a}{b})t = (\frac{a}{b})t'$. Zunächst ist nach Voraussetzung $(\frac{a}{1})t = (\frac{a}{1})t'$, so daß es zu zeigen genügt, daß $(\frac{1}{b})t = (\frac{1}{b})t'$. Nun ist aber

$$(\tfrac{1}{b})t \;=\; (\tfrac{1}{b})t(\tfrac{b}{1})t'(\tfrac{1}{b})t' \;=\; (\tfrac{1}{b})t(\tfrac{b}{1})t(\tfrac{1}{b})t' \;=\; (\tfrac{1}{b})t'\ .$$

(5) Die Aussage ist richtig. Denn sei $T \overset{t}{\underset{t'}{\rightrightarrows}} X$ mit $tf = t'f$ gegeben. Es folgt $tfg = t'fg$, und wegen fg monomorph in der Tat, daß $t = t'$.

Aufgabe 3.

(1) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung von Mengen. Wir wollen für f folgende Implikationen zeigen.

$$\text{monomorph} \Longrightarrow \text{injektiv} \Longrightarrow \text{Coretraktion} \Longrightarrow \text{monomorph}$$

Coretraktion $\Longrightarrow$ monomorph. Siehe 2 (1).

Monomorph $\Longrightarrow$ injektiv. Seien $x,\, x' \in X$ mit $(x)f = (x')f$ gegeben. Sei $T = \{m\}$ eine einelementige Menge, und sei $(m)t := x$ und $(m)t' := x'$. Da $(m)tf = (x)f = (x')f = (m)t'f$, ist $tf = t'f$, und daher $t = t'$ wegen f monomorph. Dies bedeutet aber gerade, daß $x = m(t) = (m)t' = x'$.

Injektiv $\Longrightarrow$ Coretraktion. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ injektiv. Wir wollen eine Abbildung $Y \xrightarrow{g} X$ konstruieren mit $fg = 1_X$. Sei $x_0 \in X$ beliebig gewählt. Sei

$$\begin{array}{ccl} Y & \xrightarrow{g} & X \\ y & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{falls } (x)f = y \\ x_0 & \text{falls } y \notin (X)f\ . \end{cases} \end{array}$$

(2) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung von Mengen. Wir wollen für f folgende Implikationen zeigen.

$$\text{epimorph} \Longrightarrow \text{surjektiv} \Longrightarrow \text{Retraktion} \Longrightarrow \text{epimorph}$$

Retraktion $\Longrightarrow$ epimorph. Dual zu 2 (1).

Epimorph $\Longrightarrow$ surjektiv. Sei $Y \xrightarrow{t} \{0,1\}$ dadurch erklärt, daß $(y)t = 0$ stets. Sei $Y \xrightarrow{t'} \{0,1\}$ dadurch erklärt, daß $(y)t' = 0$, falls $y \in (X)f$, und $(y)t' = 1$ sonst. Nun ist $ft = ft'$, also, wegen f epimorph, auch $t = t'$, was aber gerade besagt, daß $Y \smallsetminus (X)f = \emptyset$.

Surjektiv $\Longrightarrow$ Retraktion. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ surjektiv. Wir wollen eine Abbildung $Y \xrightarrow{g} X$ konstruieren mit $gf = 1_Y$. Dazu wählen wir für jedes $y \in Y$ aus der nichtleeren Menge $f^{-1}(\{y\})$ ein Element $g(y)$ aus, unter Verwendung des Auswahlaxioms.

(3) Ist die zugrundeliegende Abbildung injektiv, so ist der Morphismus monomorph, wie man durch Einsetzen von Elementen sieht. Zu zeigen bleibt die umgekehrte Richtung. Sei also $X \xrightarrow{f} Y$ ein Monomorphismus von R-Moduln. Wir wollen zeigen, daß f injektiv ist. Sei K der Kern von f, sei $K \xrightarrow{i} X$ seine Inklusion nach X, und sei $K \xrightarrow{0} X$ die Nullabbildung. Dann ist $if = 0 = 0f$, und also, wegen f monomorph, $i = 0$, d.h. $K = 0$.

(4) Ist die zugrundeliegende Abbildung surjektiv, so ist der Morphismus epimorph, wie man durch Einsetzen von Elementen sieht. Zu zeigen bleibt die umgekehrte Richtung. Sei also $X \xrightarrow{f} Y$ ein Epimorphismus von R-Moduln. Wir wollen zeigen, daß f surjektiv ist. Sei $C := Y/(X)f$ der Cokern von f, sei $Y \xrightarrow{n} C$ die Restklassenabbildung, und sei $Y \xrightarrow{0} C$ die Nullabbildung. Es ist $fn = 0 = f0$, und also, wegen f epimorph, $n = 0$, d.h. $C = 0$.

(5) Ist die zugrundeliegende Abbildung surjektiv, so ist der Morphismus epimorph, wie man durch Einsetzen von Elementen sieht. Zu zeigen bleibt die umgekehrte Richtung. Wir folgen der Anleitung in [**18,** p. 21, Ex. 5]. Sei $G \xrightarrow{f} H$ ein epimorpher Gruppenmorphismus. Schreibe $M := (G)f$ für sein Bild.

Ist $[H : M] = 1$, so ist f surjektiv und wir sind fertig.

Ist $[H : M] = 2$, so ist $M \trianglelefteq H$. Komposition von f mit der trivialen Abbildung nach H/M und mit der Restklassenabbildung nach H/M zeigt, daß f nicht epimorph sein kann, und die Fallvoraussetzung hat einen Widerspruch zur Folge.

Bleibt der Fall, in welchem $[H : M] \geqslant 3$ ist, zu betrachten. Bezeichne $\mathcal{S}_H$ die Gruppe der Bijektionen von H auf sich, mit der Komposition $\sigma\rho$ als Multiplikation von $\sigma,\, \rho \in \mathcal{S}_H$.

Sei $H \xrightarrow{c} \mathcal{S}_H$ der Gruppenmorphismus, der h auf die Bijektion $H \longrightarrow H,\ x \longmapsto xh$ schickt (Cayley-Injektion).

Definieren wir nun ein $\sigma \in \mathcal{S}_H$ wie folgt. Seien $a,\, b \in H$ mit $\#\{M, aM, bM\} = 3$. Setze

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\sigma} & H \\ h & \longmapsto & \begin{cases} ba^{-1}h & \text{für } h \in aM \\ ab^{-1}h & \text{für } h \in bM \\ h & \text{für } h \in M \smallsetminus (Ma \cup Mb)\,. \end{cases} \end{array}$$

Es hat σ die Ordnung 2. Sei nun $H \xrightarrow{c^\sigma} \mathcal{S}_H$ der Gruppenmorphismus, der h auf die Bijektion $\sigma(x \longmapsto xh)\sigma$ schickt.

Wir behaupten, daß $fc^\sigma = fc$, und wegen f epimorph dann also $c^\sigma = c$. Sei $m \in M$. Wir haben zu zeigen, daß $mc^\sigma = mc$. Sei $x \in H$. Wir haben zu zeigen, daß $x(mc^\sigma) = x(mc)$. Nun aber ist

$$x(mc^\sigma) \;=\; x\sigma(x \longmapsto xm)\sigma = (x\sigma)m\sigma\;,$$

wohingegen

$$x(mc) \;=\; xm\,.$$

Zu zeigen ist also, daß $(x\sigma)m = (xm)\sigma$. Da aber x und xm in derselben Linksnebenklasse modulo M liegen, multipliziert σ dasselbe Element zu x wie zu xm von links dazu, und die beiden Elemente stimmen in der Tat überein.

Nun bildet c aber $a \in H$ auf $(x \longmapsto xa)$ ab, wohingegen c^σ das Element $a \in H$ auf $\sigma(x \longmapsto xa)\sigma$ schickt. Die Bijektion $(a)c \in \mathcal{S}_H$ schickt demgemäß 1_H auf a, während die Bijektion $(a)c^\sigma \in \mathcal{S}_H$ das Element 1_H auf $((1_H)\sigma \cdot a)\sigma = (a)\sigma = b$ schickt. Da $a \neq b$ ist also $(a)c \neq (a)c^\sigma$, daher $c \neq c^\sigma$, und die Fallvoraussetzung endet in einem Widerspruch.

Aufgabe 4.

(1) "Das" terminale Objekt in (Mengen) ist durch "die" einelementige Menge $\{*\}$ gegeben (es ist nur bis auf eindeutigen Isomorphismus bestimmt), das initiale Objekt durch die leere Menge $\emptyset$. Da initiales und terminales Objekt nicht isomorph sind, gibt es kein Nullobjekt.

(2) Das initiale Objekt ist der Ring $\mathbf{Z}$, da die Abbildungsvorschrift $1_{\mathbf{Z}} \longmapsto 1_R$ stets einen Ringmorphismus von $\mathbf{Z}$ in einen beliebigen Ring R definiert, und 1_R auch das einzige mögliche Bild von $1_{\mathbf{Z}}$ ist. Das terminale Objekt ist der Nullring $0 = \{0\} = \{1\}$. Da initiales und terminales Objekt nicht isomorph sind, gibt es kein Nullobjekt.

(3) Das Nullobjekt in R-Mod ist durch den Nullmodul $0 = \{0\}$ gegeben.

Aufgabe 5.

(1) Sei $X \xrightarrow{f} R^n$ ein Epimorphismus in R-Mod. Wir haben für die Projektivität von R eine Coretraktion g zu f zu konstruieren. Sei $x_i \in X$ gewählt mit $(x)f = e_i$ für $i \in [1,n]$, wobei $(e_i)_i$ die Standardbasis von R^n über R sei. Setze $(e_i)g := x_i$. Dies definiert einen Morphismus $R^n \xrightarrow{g} X$ vermöge $(\sum r_i e_i)g = \sum r_i x_i$ für $r_i \in R$, und es ist wegen stets $(e_i)gf = (x_i)f = e_i$ auch $gf = 1$.

(2) Sei V ein Vektorraum über k.

Wir haben zu zeigen, daß jeder Epimorphismus $W \xrightarrow{f} V$ eine Retraktion ist. Sei $(x_i)_{i\in I}$ eine Basis von V. Sei $(y_i)_{i\in I}$ mit $y_i \in W$ derart, daß $y_i f = x_i$ stets. Definiere $V \xrightarrow{g} W$ vermöge $(x_i)g := y_i$ für alle $i \in I$. Dann ist wegen $(x_i)gf = (y_i)f = x_i$ stets auch $gf = 1$, wie verlangt.

Wir haben zu zeigen, daß jeder Monomorphismus $V \xrightarrow{f} W$ eine Coretraktion ist. Sei $(x_i)_{i\in I}$ eine Basis von V, und sei $(x_i f)_{i\in I} \sqcup (y_j)_{j\in J}$ (Konkatenation der Tupel, das Resultat ist also indiziert über $I \sqcup J$) eine Basisergänzung von $(x_i f)_{i\in I}$. Definiere $W \xrightarrow{g} V$ über $(x_i f)g := x_i$ für alle $i \in I$ und $y_j g := 0$ für alle $j \in J$. Dann ist in der Tat $fg = 1$.

(3) Sei $Q \xrightarrow{f} X$ ein Monomorphismus in R-Mod. Wir haben zu zeigen, daß er eine Coretraktion ist. Wir identifizieren Q mit Qf und sehen $Q \hookrightarrow X$ als Teilmodul. Betrachte die Menge

$$\mathcal{F} \;:=\; \{(Y,g) \;:\; Q \subseteq Y \subseteq X \text{ Teilmodul, } Y \xrightarrow{g} Q \text{ Morphismus mit } g|_Q = 1_Q\}$$

von Faktorisierungen. Es ist $\mathcal{F}$ ein Poset vermöge $(Y,g) \leqslant (Y',g')$ genau dann, wenn $Y \subseteq Y'$ und $g'|_Y = g$.

Wir behaupten, daß $\mathcal{F}$ zorngeordnet ist, i.e. daß jede Kette ein maximales Element enthält. Sei I eine totalgeordnete Menge und $((Y_i,g_i))_{i\in I}$ eine Kette in $\mathcal{F}$, i.e. $i \leqslant i'$ impliziert $(Y_i,g_i) \leqslant (Y_{i'},g_{i'})$ stets. Wir müssen zeigen, daß diese Kette eine obere Schranke besitzt. Sei $Y := \bigcup_i Y_i$. Sei $Y \xrightarrow{g} Q$

definiert durch $yg := yg_i$, falls $y \in Y_i$. Das ist wohldefiniert, da zum einen ein i mit $y \in Y_i$ existiert, und da zum anderen für $y \in Y_i \subseteq Y_{i'}$ auch $yg_i = y(g_{i'}|_{Y_i}) = yg_{i'}$ ist.

Mit dem Lemma von Zorn existiert also ein maximales Element (Y, g) in $\mathcal{F}$. Wir müssen zeigen, daß $Y = X$ ist. Angenommen, es gebe ein $x \in X \smallsetminus Y$. Wir wollen $Y + Rx \xrightarrow{g'} Q$ mit $(Y, g) < (Y + Rx, g')$ konstruieren, i.e. mit $g'|_Y = g$. Sei, unter Verwendung der Hauptidealbereichseigenschaft von R, $a \in R$ so, daß

$$Ra \;=\; \{r \in R \;:\; rx \in Y\}\;.$$

Ist $a = 0$, so ist $Y \cap Rx = 0$, also $Y \oplus Rx$ direkt, und es existiert ein g' wie verlangt, indem wir $g'|_Y := g$ und $g'|_{Rx} := 0$ setzen.

Ist $a \neq 0$, so beachten wir zunächst, daß $ax \in Y$, und wir also $q := (ax)g \in Q$ bilden können. Sei $q' \in Q$ mit $aq' = q$, unter Verwendung der Divisibilität von Q. Wir behaupten, daß

$$\begin{array}{rcl} Y + Rx & \xrightarrow{g'} & Q \\ y + rx & \longmapsto & yg + rq' \end{array}$$

für $y \in Y$ und $r \in R$ wohldefiniert ist, und dann auch R-linear. Sei $y + rx = y' + r'x$ mit $y,\, y' \in Y$ und $r,\, r' \in R$. Dann ist $(y - y') = (r' - r)x$, und also $r' - r = as$ für ein $s \in S$. Somit wird

$$\begin{array}{rcl} (yg + rq') - (y'g + r'q') & = & (y - y')g - (r' - r)q' \\ & = & (y - y')g - asq' \\ & = & (y - y')g - sq \\ & = & (y - y')g - s((ax)g) \\ & = & ((y - y') - sax)g \\ & = & ((y - y') - (r' - r)x)g \\ & = & 0\;. \end{array}$$

Somit ist $Y + Rx \xrightarrow{g'} Q$ wohldefiniert, und insgesamt $(Y, g) < (Y + Rx, g')$ konstruiert, im Widerspruch zur Maximalität von (Y, g).

Aufgabe 6.

(1) Wir behaupten, daß $G \times H$, zusammen mit $\pi_G : (g, h) \longmapsto g$ und $\pi_H : (g, h) \longmapsto h$, das Produkt $G \prod H$ von G und H darstellt.

Seien Gruppenmorphismen $T \xrightarrow{s} G$ und $T \xrightarrow{t} G$ gegeben. Setze $T \xrightarrow{u} G \times H,\ x \longmapsto (xs, xt)$. Dies ist ein Gruppenmorphismus, er erfüllt $u\pi_G = s$ und $u\pi_H = t$, und er ist hierfür die einzige mögliche Wahl.

(2) Wir konstruieren wie folgt eine Gruppe $G * H$, genannt das *freie Produkt* von G und H. Sei $(F, \cdot)$ die freie Gruppe auf der Menge $G \sqcup H$. Sei

$$G * H \;:=\; F/\langle g_1 \cdot g_2 = g_1 g_2,\ h_1 \cdot h_2 = h_1 h_2 \;:\; g_1,\, g_2 \,\in\, G,\ h_1,\, h_2 \,\in\, H\rangle^F\;.$$

Seien $G \xrightarrow{\iota_G} G * H,\ g \longmapsto g,\ H \xrightarrow{\iota_H} G * H,\ h \longmapsto h$, was wegen der $G * H$ definierenden Relationen Gruppenmorphismen sind.

Wir behaupten, daß $G * H$, zusammen mit ι_G und ι_H, das Coprodukt $G \coprod H$ von G und H darstellt. Seien dazu Gruppenmorphismen $G \xrightarrow{s} T$ und $H \xrightarrow{t} T$ gegeben. Setze zunächst $F \xrightarrow{v} T$, $g \longmapsto gs$ für $g \in G \subseteq F$, $h \longmapsto ht$ für $h \in H \subseteq F$. Der Relator $(g_1 g_2) \cdot g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}$ mit $g_1,\, g_2 \,\in\, G$ wird unter v definitionsgemäß abgebildet auf

$$(g_1 g_2)s\ (g_2^{-1})s\ (g_1^{-1})s\;,$$

was aber wegen s Gruppenmorphismus dasselbe ist wie

$$(g_1 s)(g_2 s)(g_2 s)^{-1}(g_1 s)^{-1} \;=\; 1\,.$$

Genauso verfährt man mit den anderen Relatoren, und erhält eine Faktorisierung

$$(F \xrightarrow{v} T) \;=\; (F \longrightarrow G * H \xrightarrow{u} T)$$

über den Restklassenmorphismus $F \longrightarrow G * H$. Es werden $g\iota_G u = gu = gs$ und $h\iota_H u = hu = ht$ stets, womit $\iota_G u = s$ und $\iota_H u = t$.

Da $G \sqcup H$ die Gruppe F erzeugt, erzeugt das Bild von $G \sqcup H$ in $G * H$ die Gruppe $G * H$. Somit ist ein Morphismus $G * H \longrightarrow T$ schon bestimmt, wenn man ihn auf $G\iota_G$ und $H\iota_H$ festlegt. Daraus ergibt sich die Eindeutigkeit von $G * H \xrightarrow{u} T$ bezüglich $\iota_G u = s$ und $\iota_H u = t$.

Da für $G = H = \mathbf{Z}$ das Produkt $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ abelsch, das Coprodukt $\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$ aber isomorph zu einer freien Gruppe auf 2 Elementen und damit nichtabelsch ist, sind in diesem Fall Produkt und Coprodukt nicht isomorph. Mithin kann (Gruppen) keine additive Kategorie sein.

Aufgabe 7.

(1) Assoziativität kennen wir aus der Vorlesung. Beachte, daß wir, mangels Kenntnis der Kommutativität von $(+)$, den Matrixkalkül bislang nur mit der vorgeschriebenen Summandenreihenfolge verwenden dürfen.

Wir wollen zeigen, daß $X \xrightarrow{0} Y$ ein neutrales Element ist. Es wird

$$\begin{array}{rcl} f + 0 & = & \left(\begin{smallmatrix} f & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \\ & = & f\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \\ & = & f \cdot 1 \\ & = & f\,, \end{array}$$

und dito $0 + f = f$.

Zeigen wir die Kommutativität. Seien $X \overset{f}{\underset{f'}{\rightrightarrows}} Y$ gegeben. Es wird, unter Verwendung der Neutralität der 0,

$$\begin{array}{rcl} f + f' & = & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \\ & = & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \\ & = & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \\ & = & f' + f\,. \end{array}$$

Zeigen wir, daß $f + (-1_X)f = 0$. Es ist

$$f + (-1_X)f \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} f \\ (-1_X)f \end{pmatrix} \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ (-1_X) \end{pmatrix} f \;=\; 0f \;=\; 0\,.$$

(2) Es wird unter Verwendung des Matrixkalküls

$$\begin{array}{rcl} (f + f')(g + g') & = & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} g & g' \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \\ & = & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} fg & f'g \\ fg' & f'g' \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \\ & = & \left(\begin{smallmatrix} fg+fg' & f'g+f'g' \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \\ & = & fg + fg' + f'g + f'g'\,. \end{array}$$

(3) Es ist $(\operatorname{End} X, +)$ mit (1) eine abelsche Gruppe. Es ist nach Definition Kategorie $(\operatorname{End} X, \cdot)$ ein Monoid (d.h. $(\cdot)$ assoziativ, Existenz eines beidseitig neutralen Elements bezüglich $(\cdot)$). Schließlich gilt nach (2) das Distributivgesetz.

Auf diese Weise treten Ringe in der Natur auf.

Aufgabe 8. Sei $P \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ projektiv. Sei $P \xrightarrow[\sim]{(u\ v)} X \oplus Y$. Wir haben zu zeigen, daß X projektiv ist. Sei $T \xrightarrow{f} X$ ein Epimorphismus. Wir haben zu zeigen, daß es sich um eine Retraktion handelt.

Sei $\binom{s}{t} := (u\ v)^{-1}$, i.e. seien $(u\ v)\binom{s}{t} = 1$ und $\binom{s}{t}(u\ v) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Nun ist $T \oplus Y \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}f&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)} X \oplus Y$ ebenfalls ein Epimorphismus (wie alle direkten Summen zweier Epimorphismen), und somit ist $\left(\begin{smallmatrix}f&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\binom{s}{t}$ eine Retraktion. Sei $P \xrightarrow{(a\ b)} T \oplus Y$ eine zugehörige Coretraktion, i.e. sei $afs + bt = 1_P$. Dann ist $s(afs+bt)u \overset{1.}{=} (sa)f \overset{2.}{=} s \cdot 1_P \cdot u = 1_X$, mithin ist sa eine Coretraktion zu f.

Aufgabe 9.

(1) Für $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}$ definieren wir $(-,X) \xrightarrow{(-,f)} (-,Y)$ durch

$$(-,f) \;=\; \Big((X',X) \xrightarrow{(X',f)} (X',Y)\Big)_{X' \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}\,,$$

wobei $(X',f) : s \longmapsto sf$ schickt. Sei $X' \xrightarrow{f'} Y'$ gegeben. Um zu zeigen, daß $(-,f)$ eine Transformation ist, haben wir zu zeigen, daß $(X',f)(f',Y) = (f',X)(Y',f)$ ist. Und in der Tat werden für $X \xrightarrow{s} X'$

$$\begin{array}{rcccl} (s)(X',f)(f',Y) & = & (sf)(f',Y) & = & f'(sf) \\ (s)(f',X)(Y',f) & = & (f's)(Y',f) & = & (f's)f\,, \end{array}$$

was wegen der Assoziativität der Komposition übereinstimmt.

(2) Es ist e wohldefiniert, da $\alpha X : (X,X) \longrightarrow FX$ in der Tat die Identität 1_X auf ein Element in FX abbildet.

Um zu zeigen, daß d wohldefiniert ist, merken wir zunächst an, daß $FX' \xleftarrow{Ff} FX$ in der Tat nach FX' abbildet. Bleibt zu zeigen, daß das angegebene Tupel $(X'd_y)_{X' \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}$ eine Transformation von $(-,X)$ nach F ist. Sei $X' \xrightarrow{f'} Y'$ in $\mathcal{C}$ vorgegeben. Es ist zu zeigen, daß $(f',X)(d_t X') = (d_t Y')(Ff')$ ist. Wir erhalten in der Tat für $Y' \xrightarrow{s} X$

$$\begin{array}{rcccl} (s)(f',X)(d_t X') & = & (f's)(d_t X') & = & (t)(F(f's)) \\ (s)(d_t Y')(Ff') & = & (t)(Fs)(Ff') & = & (t)(F(f's))\,. \end{array}$$

Zeigen wir, daß $ed = 1_{((-,X),F)}$. Sei $\alpha \in ((-,X),F)$, und sei $X' \xrightarrow{f} X$. Wir haben zu zeigen, daß $(f)(\alpha X') = (f)(d_{(\alpha)e} X')$. In der Tat wird

$$(f)(d_{(\alpha)e}X') \;=\; (f)(d_{(1_X)(\alpha X)}X') \;=\; ((1_X)(\alpha X))(Ff) \;=\; (1_X)(f,X)(\alpha X') \;=\; (f)\alpha X'\,.$$

Zeigen wir, daß $de = 1_{FX}$. Sei $t \in FX$. Es ist $(d_t)e = (1_X)(d_t X) = (t)(F1_X) = (t)1_{FX} = t$.

(3) Wir wollen zeigen, daß für alle $X,\, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} (X,Y) & \longrightarrow & ((-,X),(-,Y)) \\ f & \longmapsto & (-,f) \end{array}$$

bijektiv ist. Mit (2) genügt es zu zeigen, daß die Komposition $f \longmapsto (-,f) \longmapsto (-,f)e$ bijektiv ist. Und in der Tat ist $(-,f)e = (1_X)(X,f) = 1_X\, f = f$.

Wir behaupten, daß $(-,=)$ i.a. nicht dicht ist. Sei $G \not\simeq 1$ eine Gruppe, aufgefaßt als Kategorie auf einem Objekt $\{*\}$. Ein Funktor F von G nach (Mengen) korrespondiert zu einer G-Menge, namentlich zu $F(*)$. Die G-Menge, die zu $(-,*)$ korrespondiert, ist $(*,*)$, i.e. G aufgefaßt als G-Menge. Nun gibt es aber auch noch die triviale, einelementige G-Menge, welche zu dieser nicht isomorph ist. Also ist $(-,*)$ nicht dicht.

Aufgabe 10.

(1) Sei $F \dashv G$, i.e. sei $(F(-),=) \xrightarrow[\sim]{\Phi} (-,G(=))$ eine Isotransformation von Funktoren von $\mathcal{C}^\circ \times \mathcal{D}$ nach (Mengen). Schreibe der Übersichtlichkeit halber $\Phi_{X,Y} := \Phi(X,Y)$. Beachte, daß die Transformationseigenschaft für $X' \xrightarrow{f} X$ in $\mathcal{C}$ und $Y \xrightarrow{g} Y'$ in $\mathcal{D}$ gerade besagt, daß

$$\begin{tikzcd}
{}_{\mathcal{D}}(FX,Y) \arrow[r, "\Phi_{X,Y}"] \arrow[d, "(Ff)(-)g"'] & {}_{\mathcal{C}}(X,GY) \arrow[d, "f(-)(Gg)"] \\
{}_{\mathcal{D}}(FX',Y') \arrow[r, "\Phi_{X',Y'}"] & {}_{\mathcal{C}}(X',GY')
\end{tikzcd}$$

kommutiert, i.e. daß für $FX \xrightarrow{s} Y$ stets $((Ff)sg)\Phi_{X',Y'} = f((s)\Phi_{X,Y})(Gg)$ ist.

Für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ setzen wir $\varepsilon X := (1_{FX})\Phi_{X,FX} : X \longrightarrow GFX$. Wir haben zu zeigen, daß $\varepsilon := (\varepsilon X)_{X\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}}$ eine Transformation ist. Sei hierzu $X \xrightarrow{f} X'$ vorgegeben. Wir haben zu zeigen, daß $f(\varepsilon X') = (\varepsilon X)(GFf)$. In der Tat wird

$$\begin{array}{rcl}
f(\varepsilon X') & = & f(1_{FX'})\Phi_{X',FX'} \\
& = & ((Ff)1_{FX'})\Phi_{X,FX'} \\
& = & (1_{FX}(Ff))\Phi_{X,FX'} \\
& = & (1_{FX})\Phi_{X,FX}(GFf) \\
& = & (\varepsilon X)(GFf)\ .
\end{array}$$

Für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ setzen wir $\eta Y := (1_{GY})\Phi^{-1}_{GY,Y} : FGY \longrightarrow Y$. Mit dem dualen Argument zu ε ist auch $\eta := (\eta Y)_{Y\in\operatorname{Ob}\mathcal{D}}$ eine Transformation.

Nun berechnen wir für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$

$$\begin{array}{rcl}
(\varepsilon GY)(G\eta Y) & = & ((1_{FGY})\Phi_{GY,FGY})(G\eta Y) \\
& = & (1_{FGY}(\eta Y))\Phi_{GY,Y} \\
& = & (\eta Y)\Phi_{GY,Y} \\
& = & 1_{GY}\ .
\end{array}$$

Dual ergibt sich auch $(F\varepsilon X)(\eta FX) = 1_{FX}$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

Seien nun umgekehrt ε und η mit stets $(\varepsilon GY)(G\eta Y) = 1_{GY}$ und $(F\varepsilon X)(\eta FX) = 1_{FX}$ vorgegeben.

Für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ und $FX \xrightarrow{s} Y$ in $\mathcal{D}$ setzen wir

$$(s)\Phi_{X,Y} \;:=\; (\varepsilon X)(Gs)\ .$$

Umgekehrt setzen wir für $X \xrightarrow{t} GY$ in $\mathcal{C}$

$$(t)\Phi'_{X,Y} \;:=\; (Ft)(\eta Y)\ .$$

Wir haben zu zeigen, daß sich $\Phi_{X,Y}$ und $\Phi'_{X,Y}$ wechselseitig invertieren (daß also $\Phi'_{X,Y} = \Phi^{-1}_{X,Y}$), und daß $\Phi := (\Phi_{X,Y})_{(X,Y)\in\operatorname{Ob}(\mathcal{C}^\circ\times\mathcal{D})}$ eine Transformation ist.

Zunächst wird

$$\begin{array}{rcl}
((s)\Phi_{X,Y})\Phi'_{X,Y} & = & ((\varepsilon X)(Gs))\Phi'_{X,Y} \\
& = & (F\varepsilon X)(FGs)(\eta Y) \\
& = & (F\varepsilon X)(\eta FX)s \\
& = & s\ .
\end{array}$$

Dual dazu ist auch $((t)\Phi'_{X,Y})\Phi_{X,Y} = t$.

Seien nun $X' \xrightarrow{f} X$ in $\mathcal{C}$, $Y \xrightarrow{g} Y'$ in $\mathcal{D}$ und $FX \xrightarrow{s} Y$ in $\mathcal{D}$ gegeben. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl} ((Ff)sg)\Phi_{X',Y'} & = & (\varepsilon X')(GFf)(Gs)(Gg) \\ & = & f(\varepsilon X)(Gs)(Gg) \\ & = & f((s)\Phi_{X,Y})(Gg)\ . \end{array}$$

(2) Für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ haben wir eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl} {}_{\mathcal{D}}(FX,Y) & \xrightarrow[\sim]{\Phi_{X,Y}} & {}_{\mathcal{C}}(X,GY) \\ s & \longmapsto & (\alpha X)(Gs) \end{array}$$

da αX ein Isomorphismus ist und G voll und treu ist. Wie in der letzten Rechnung unter (1) sieht man, daß $\Phi := (\Phi_{X,Y})_{(X,Y)\in\operatorname{Ob}(\mathcal{C}^\circ\times\mathcal{D})}$ eine Transformation ist, denn hierfür wurde dort nur gebraucht, daß ε eine Transformation ist.

Wie in (1) erhalten wir nun aus Φ die Einheit ε mit

$$\varepsilon X \ := \ (1_{FX})\Phi_{X,FX} \ = \ (\alpha X)(G1_{FX}) \ = \ \alpha X\ ,$$

für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, also $\varepsilon = \alpha$; und

$$\eta Y \ := \ (1_{GY})\Phi^{-1}_{GY,Y}$$

für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, d.h. es ist ηY der wegen G voll und treu wohldefinierte Morphismus $FGY \xrightarrow{\eta Y} Y$, der unter G nach $(\alpha GY)^{-1}$ abgebildet wird. Um nun eine Formel für η zu bekommen, erinnern wir uns an das Argument aus §1.3.2.2, wieso eine Äquivalenz voll und treu ist. Dort findet sich allgemein als Urbild eines Morphismus $GY' \xrightarrow{f} GY$ unter G die Komposition $(Y' \xrightarrow{(\beta Y')^{-1}} FGY' \xrightarrow{Ff} FGY \xrightarrow{\beta Y} Y)$, und speziell als Urbild von $(\alpha GY)^{-1}$ also die gesuchte Formel

$$\eta Y \ = \ (\beta FGY)^{-1}(F\alpha GY)^{-1}(\beta Y)\ .$$

Es sind also weder Φ noch das Paar (ε, η) eindeutig durch F und G bestimmt – sie bestimmen sich nur gegenseitig. In der Tat hätten wir mit $\eta = \beta$ anfangen können, und so i.a. ein anderes Φ und ein anderes ε erhalten.

Aufgabe 11.

(1) Sei $G \xrightarrow{f} H$ ein Gruppenmorphismus. Es ist $G' = \langle [a,b] \ : \ a,b \in G\rangle = \langle a^{-1}b^{-1}ab \ : \ a,b \in G\rangle$. Somit ist $G'f = \langle [af,bf] \ : \ a,b \in G\rangle \leqslant \langle [c,d] \ : \ c,d \in H\rangle = H'$. Dies zeigt, daß der Morphismus

$$\begin{array}{rcl} G^{\mathrm{ab}} = G/G' & \xrightarrow{f^{\mathrm{ab}}} & H/H' = H^{\mathrm{ab}} \\ gG' & \longmapsto & (g)fH' \end{array}$$

ein wohldefinierter Gruppenmorphismus ist.

(2) Wir können mit 10 (1) direkt mit Einheit und Coeinheit anfangen. Wir unterschlagen die Notation des Inklusionsfunktors.

Für G eine Gruppe sei $\varepsilon G : G \longrightarrow G^{\mathrm{ab}}$ die Restklassenabbildung. Ist $G \xrightarrow{f} H$ ein Gruppenmorphismus, so ist nach Definition von f^{ab}

$$(\varepsilon G)(f^{\mathrm{ab}}) \ = \ f(\varepsilon H)\ ,$$

und somit $\varepsilon := (\varepsilon G)_{G\in\operatorname{Ob}(\mathrm{Gruppen})}$ eine Transformation.

Sei ferner für A eine abelsche Gruppe $\eta A : A \longrightarrow A$ die Identität, nach Identifikation von A und A^{ab}.

Für eine abelsche Gruppe A wird $(\varepsilon A)(\eta A) = 1_A$. Für eine beliebige Gruppe G wird $(\varepsilon G)^{\mathrm{ab}}(\eta(G^{\mathrm{ab}})) = 1_{G^{\mathrm{ab}}}$. Somit sind die beiden verlangten Identitäten erfüllt, und $(-)^{\mathrm{ab}}$ in der Tat linksadjungiert zum Inklusionsfunktor der abelschen Gruppen in die Gruppen.

Aufgabe 12. Wir erinnern uns, daß H, aufgefaßt als Kategorie, aus einem einzigen Objekt $*$ besteht, und aus den Morphismen $(*,*) = H$, mit der Komposition gegeben durch die Multiplikation.

Ein Funktor von G nach H ist ein Gruppenmorphismus $G \xrightarrow{a} H$. Seien also zwei Gruppenmorphismen $G \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} H$ gegeben. Eine Transformation von a nach b ist ein Tupel, bestehend aus einem einzigen Element h von H, derart, daß die Bedingung $(ga)h = h(gb)$ für alle $g \in G$ erfüllt ist; i.e. derart, daß $gb = h^{-1}(ga)h$. Ist dies erfüllt, so ist h automatisch eine Isotransformation, mit dem Inversen h^{-1}.

Die Gruppe H operiert via $H \longrightarrow \operatorname{Inn} H \leqslant \operatorname{Aut} H$ auf der Menge ${}_{(\text{Gruppen})}(G,H) = \operatorname{Ob} [\![G,H]\!]$ durch Komposition von rechts. Nennen wir die Bahnen dieser H-Menge *Konjugationsklassen* von Morphismen, so sind die Isoklassen in $[\![G,H]\!]$ gerade die Konjugationsklassen.

Aufgabe 13. Wir vereinbaren, daß $m \in M$, $n \in N$ etc., sollte dies nicht extra spezifiert sein.

(1) Sei

$$M \otimes_R N \;:=\; \frac{\mathbf{Z}\langle M \times N\rangle}{\left(\begin{array}{lcl} (mr,n) - (m,rn) & : & m \in M,\ n \in N,\ r \in R \\ (m+m',n) - (m,n) - (m',n) & : & m,\ m' \in M,\ n \in N \\ (m,n+n') - (m,n) - (m,n') & : & m \in M,\ n,\ n' \in N \end{array}\right)}\,,$$

wobei $\mathbf{Z}\langle M \times N\rangle$ die freie abelsche Gruppe auf der Menge $M \times N$ bezeichne. Werde die Restklasse eines Erzeugers (m,n) in $M \otimes_R N$ mit $m \otimes n$ bezeichnet, und sei

$$\begin{array}{ccccccc} M & \times & N & \xrightarrow{b} & M & \otimes_R & N \\ (m & , & n) & \longmapsto & m & \otimes & n\,. \end{array}$$

Nach Konstruktion ist b R-bilinear.

Unter $m \otimes n$ darf man sich ein "noch nicht ausgewertetes Skalarprodukt" von m und n vorstellen.

Das Bild von b enthält ein $\mathbf{Z}$-lineares Erzeugendensystem von $M \otimes_R N$, was die Eindeutigkeit der $\mathbf{Z}$-linearen Faktorisierung $M \otimes_R N \xrightarrow{\tilde f} A$ einer bilinearen Abbildung $M \times N \xrightarrow{f} A$ in eine abelsche Gruppe A sichert.

Zur Existenz. Die universelle Eigenschaft der freien abelschen Gruppe gibt eine Faktorisierung

$$(M \times N \xrightarrow{f} A) \;=\; (M \times N \hookrightarrow \mathbf{Z}\langle M \times N\rangle \xrightarrow{f'} A)\,.$$

mit einer $\mathbf{Z}$-linearen Abbildung f'. Die universelle Eigenschaft des Quotienten von abelschen Gruppen liefert dann wegen der R-Bilinearität von f die gewünschte Faktorisierung

$$(M\times N \xrightarrow{f} A) \;=\; (M\times N \hookrightarrow \mathbf{Z}\langle M\times N\rangle \longrightarrow M\otimes_R N \xrightarrow{\tilde f} A) \;=\; (M\times N \xrightarrow{b} M\otimes_R N \xrightarrow{\tilde f} A)\,.$$

Diese universelle Eigenschaft von $M \otimes_R N$ wird folgendermaßen zur Konstruktion von $\mathbf{Z}$-linearen Abbildungen aus dem Tensorprodukt verwandt. Es ist

$$\begin{array}{ccccc} M & \otimes_R & N & \xrightarrow{g} & A \\ m & \otimes & n & \longmapsto & (m \otimes n)g \end{array}$$

wohldefiniert, falls g additiv in m und n ist, und falls stets $(mr \otimes n)g = (m \otimes rn)g$ ist. Man "kennt" das Tensorprodukt weniger über die Elemente, die es enthält – $\mathbf{Z}$-Linearkombinationen von *Elementartensoren* der Form $m \otimes n$ – als über diese Eigenschaft. Will man z.B. wissen, daß $m \otimes n \neq m' \otimes n'$, so empfiehlt es sich, eine Abbildung aus dem Tensorprodukt heraus anzugeben, für die sich die Bilder dieser beiden Elementartensoren unterscheiden.

(2) Um zu zeigen, daß $M \otimes_R N$ ein S-Rechtsmodul ist, haben wir zu zeigen, daß für ein $s \in S$ die Abbildung

$$\begin{array}{ccccccc} M & \otimes_R & N & \xrightarrow{(-)s} & M & \otimes_R & N \\ m & \otimes & n & \longmapsto & m & \otimes & ns \end{array}$$

wohldefiniert ist. Die Verträglichkeitseigenschaften dieser Multiplikationsoperation ergeben sich dann aus der R-Bilinearität von $(m, n) \longmapsto m \otimes n$.

Nun ist die fragliche Abbildung additiv in m und n, und ferner ist in der Tat $mr \otimes ns = m \otimes r(ns) = m \otimes (rn)s$ für $r \in R$, unter Verwendung der Bimoduleigenschaft von N.

Mit "usf." ist übrigens gemeint, daß man in der entsprechenden Situation auch auf der linken bzw. auf beiden Seiten eine Moduloperation erhält.

(3) Wir müssen zeigen, daß

$$\begin{array}{ccccccccccc} (M & \otimes_R & N) & \otimes_S & P & \longrightarrow & M & \otimes_R & (N & \otimes_S & P) \\ (m & \otimes & n) & \otimes & p & \longmapsto & m & \otimes & (n & \otimes & p) \end{array}$$

wohldefiniert ist. Mit einem analogen Argument sieht man dann, daß auch die Rückrichtung $(m \otimes n) \otimes p \longleftarrow\!\shortmid\, m \otimes (n \otimes p)$ wohldefiniert ist; diese beiden Abbildungen invertieren sich dann in beiden Richtungen.

Zur verlangten Wohldefiniertheit. Wir definieren zunächst eine Abbildung

$$\begin{array}{ccccccccccc} (M & \otimes_R & N) & \times & P & \longrightarrow & M & \otimes_R & (N & \otimes_S & P) \\ (m & \otimes & n & , & p) & \longmapsto & m & \otimes & (n & \otimes & p)\,. \end{array}$$

Sei $p \in P$ fixiert. Dann ist $m \otimes n \longmapsto m \otimes (n \otimes p)$ wohldefiniert, da additiv in m und n, und da für $r \in R$ gilt, daß $mr \otimes (n \otimes p) = m \otimes r(n \otimes p) = m \otimes (rn \otimes p)$.

Beachte, daß die Definition dieser Abbildung impliziert, daß $(\sum_i m_i \otimes n_i,\, p)$ auf $\sum_i m_i \otimes (n_i \otimes p)$ abgebildet wird.

Nun ist auch die ursprünglich zu betrachtende Abbildung wohldefiniert, da diese in $m \otimes n$ und in p additiv ist, und da wir für $s \in S$ erhalten, daß $m \otimes (ns \otimes p) = m \otimes (n \otimes sp)$.

(4) Für eine S-lineare Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ zwischen S-Linksmoduln definieren wir

$$\begin{array}{ccccccc} N & \otimes_S & X & \xrightarrow{N \otimes_S f} & N & \otimes_S & Y \\ n & \otimes & x & \longmapsto & n & \otimes & xf\,. \end{array}$$

Dies ist wohldefiniert, da additiv in n und x, und da $ns \otimes xf = n \otimes s(xf) = n \otimes (sx)f$ für $s \in S$. Ferner ist diese Abbildung R-linear, da $r(n \otimes x) = rn \otimes xf \longmapsto rn \otimes xf = r(n \otimes xf)$, beidmalig nach Definition der R-Modulstruktur.

Die Funktoreigenschaft von $N \otimes_S -$ folgt unmittelbar.

Für die Additivität dieses Funktors haben wir zu zeigen, daß sich

$$\begin{array}{ccc} (N \otimes_S X) \oplus (N \otimes_S Y) & \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} N \otimes_S \iota_X \\ N \otimes_S \iota_Y \end{smallmatrix}\right)} & N \otimes_S (X \oplus Y) \\ (N \otimes_S X) \oplus (N \otimes_S Y) & \xleftarrow{(\,N \otimes_S \pi_X \;\; N \otimes_S \pi_Y\,)} & N \otimes_S (X \oplus Y) \end{array}$$

gegenseitig invertieren. Es genügt, $\mathbf{Z}$-lineare Erzeuger zu betrachten.

Schicken wir $(n \otimes x, 0) \in (N \otimes_S X) \oplus (N \otimes_S Y)$ durch beide Abbildungen, so erhalten wir zunächst $n \otimes (x, 0)$, und dann wieder $(n \otimes x, 0)$. Analog für $(0, n \otimes y)$.

Schicken wir umgekehrt $n \otimes (x, 0) \in N \otimes_S (X \oplus Y)$ durch beide Abbildungen, so erhalten wir zunächst $(n \otimes x, 0)$, und dann wieder $n \otimes (x, 0)$. Analog für $n \otimes (0, y)$.

Analog ist auch $-\otimes_R N : \text{Mod-}R \longrightarrow \text{Mod-}S$ ein additiver Funktor.

Für einen S-Linksmodul U wird die abelsche Gruppe ${}_R(N,U)$ vermöge $sf : n \longmapsto (ns)f$ für $s \in S$ und $f \in {}_R(N,U)$ zu einem S-Linksmodul, da sf wegen $(rn)(sf) = ((rn)s)f = (r(ns)f) = r((ns)f) = r(n(sf))$ in der Tat eine R-lineare Abbildung ist, und da wegen $n((ss')f) = (n(ss'))f = ((ns)s')f = (ns)(s'f) = n(s(s'f))$ auch $(ss')f = s(s'f)$ ist.

Für die Adjunktion genügt die Angabe von Einheit und Coeinheit.

Für einen S-Linksmodul X sei

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varepsilon X} & {}_R(N, N\otimes_S X) \\ x & \longmapsto & (n \longmapsto n\otimes x)\,. \end{array}$$

Es ist $(x)(\varepsilon X)$ R-linear, es ist εX S-linear, und es ist $(\varepsilon X)\,{}_R(N, N\otimes_S f) = f(\varepsilon Y)$ für eine S-lineare Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$.

Für einen R-Linksmodul U sei

$$\begin{array}{ccccc} N & \otimes_S & {}_R(N,U) & \xrightarrow{\eta U} & U \\ n & \otimes & g & \longmapsto & ng \end{array}$$

Es ist ηU wohldefiniert, da additiv in n und g, und da $(ns)g = n(sg)$ für $s \in S$, und es ist ηU auch R-linear. Ferner ist $(N\otimes_S f)(\eta V) = (\eta U)f$ für eine R-lineare Abbildung $U \xrightarrow{f} V$.

Schließlich werden für $g \in {}_R(N,U)$

$$g \xmapsto{\varepsilon\, {}_R(N,U)} (n \longmapsto n\otimes g) \xmapsto{{}_R(N,\eta U)} (n \longmapsto n\otimes g \longmapsto ng) \;=\; g$$

und für $n'\otimes x \in N\otimes_S X$

$$n'\otimes x \xmapsto{N\otimes_S \varepsilon X} n'\otimes(n \longmapsto n\otimes x) \xmapsto{\eta N\otimes_S X} (n')(n \longmapsto n\otimes x) \;=\; n'\otimes x\,,$$

und wir haben unter Verwendung von 10 (1) die Adjunktion $N\otimes_S - \dashv {}_R(N,-)$ verifiziert.

Es ist auch möglich, und auch nicht aufwendiger, die Adjunktion direkt vermöge der Definition zu überprüfen. Die Bijektion ist gegeben durch

$$\begin{array}{ccc} {}_S(X, {}_R(N,U)) & \longrightarrow & {}_R(N\otimes_S X, U) \\ f & \longmapsto & (n\otimes x \longmapsto (n)((x)f))\,. \end{array}$$

(5) (a) Die Aussage ist falsch. Seien z.B. $R = \mathbf{Q}$, $M = N = \mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}\langle e_1, e_2\rangle$. Es hat wegen der Additivität des Tensorproduktes aus (4) das Tensorprodukt $\mathbf{Q}^2\otimes\mathbf{Q}^2$ die $\mathbf{Q}$-lineare Basis $(e_1\otimes e_1,\, e_1\otimes e_2,\, e_2\otimes e_1,\, e_2\otimes e_2)$ (wozu $\mathbf{Q}^2$ als $\mathbf{Q}$-$\mathbf{Q}$-Bimodul angesehen werde). Im Bild von b liegen genau die Elemente

$$\begin{array}{ll} & \{(u_1e_1+u_2e_2)\otimes(v_1e_1+v_2e_2) \;:\; u_1,\,u_2,\,v_1,\,v_2 \,\in\, \mathbf{Q}\} \\ = & \{(u_1v_1)e_1\otimes e_1 + (u_1v_2)e_1\otimes e_2 + (u_2v_1)e_2\otimes e_1 + (u_2v_2)e_2\otimes e_2 \;:\; u_1,\,u_2,\,v_1,\,v_2 \,\in\, \mathbf{Q}\}\,, \end{array}$$

so daß $w_{1,2}e_1\otimes e_1 + w_{1,2}e_1\otimes e_2 + w_{2,1}e_2\otimes e_1 + w_{2,2}e_2\otimes e_2$ mit $w_{i,j}\in\mathbf{Q}$ nur im Bild von b liegen kann, wenn $w_{1,2}w_{2,1} = w_{1,1}w_{2,2}$ gilt. Insbesondere liegt z.B. $e_1\otimes e_1 + e_1\otimes e_2 + e_2\otimes e_1$ nicht im Bild von b.

(b) Beachte, daß ein k-Vektorraum als k-k-Bimodul aufgefaßt werden kann, und die Fragestellung so einen Sinn erhält.

Die Aussage ist richtig. O.E. ist $M \simeq k^m$ und $N \simeq k^n$ für gewisse $m, n \geqslant 0$, und somit wird mit der Additivität aus (4)

$$k^m \otimes_k k^n \;\simeq\; \left(\bigoplus_{i\in[1,m]} k\right) \otimes_k \left(\bigoplus_{i\in[1,n]} k\right) \;\simeq\; \bigoplus_{i\in[1,m],\, j\in[1,m]} k \otimes_k k\,.$$

Beachtet man noch, daß $R \otimes M \simeq M$ via $r \otimes m \longmapsto rm$ für einen R-Linksmodul M, wobei der Tensorfaktor R als R-R-Bimodul aufgefaßt werde, dann sieht man, daß $k \otimes_k k \simeq k$, und sich somit ein k-Vektorraum der Dimension mn ergibt, wie behauptet.

(c) Die Aussage ist falsch. Sei z.B. $R = \mathbf{Z}$, seien $q > p > 0$ Primzahlen, sei $M = \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ und $N = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Wir haben zu zeigen, daß ein $\mathbf{Z}$-linearer Erzeuger von $M \otimes_R N$ der Form $u \otimes v$ mit $u, v \in \mathbf{Z}$ verschwindet.

Seien $s, t \in \mathbf{Z}$ mit $sq + tp = 1$. Es wird mit $\mathbf{Z}$-Bilinearität

$$u \otimes v \;=\; ((sq+tp)u) \otimes v \;=\; squ \otimes v + tpu \otimes v \;=\; squ \otimes v + u \otimes tpv \;=\; 0 \otimes v + u \otimes 0 = 0\,.$$

Aufgabe 14.

(1) Da $if = 0$ ist, und da i' ein Kern ist, gibt es genau ein $K \xrightarrow{k} K'$ mit $ki' = i$. Bleibt zu zeigen, daß k ein Isomorphismus ist.

Da $i'f = 0$ ist, und da i ein Kern ist, gibt es genau ein $K' \xrightarrow{k'} K$ mit $k'i = i'$. Wir behaupten, daß $kk' = 1_K$, und, symmetrisch dazu, dann auch $k'k = 1_{K'}$ ist. Da $if = 0$, und da i ein Kern ist, gibt es genau einen Morphismus $K \xrightarrow{u} K$ mit $ui = i$. Nun ist aber $1_K i = i$, und auch $kk'i = ki' = i$, also $kk' = u = 1_K$.

Dual ist auch der Cokern bis auf eindeutigen Isomorphismus bestimmt, sofern existent.

(2) Sei $K \xrightarrow{i} X$ ein Kern, sagen wir, von $X \xrightarrow{f} Y$. Seien $T \overset{t}{\underset{t'}{\rightrightarrows}} X$ gegeben mit $ti = t'i$. Dann ist $(t-t')i = 0$, und also insbesondere $((t-t')i)f = 0$. Folglich gibt es genau einen Morphismus $T \xrightarrow{u} K$ mit $ui = (t-t')i$. Da nun auch $0\,i = (t-t')i$, ist $t - t' = u = 0$.

(3) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine R-lineare Abbildung zwischen R-Moduln.

Sei $K_f := \operatorname{Kern} f = \{x \in X \;:\; xf = 0\}$ der Kern von f, und sei $K_f \xrightarrow{i} X$ die Inklusion. Wir behaupten, daß i ein Kern von f ist. In der Tat, ist $T \xrightarrow{t} X$ eine R-lineare Abbildung mit $tf = 0$, so ist das Bild von t in K_f enthalten; in anderen Worten, so faktorisiert t über i. Die Eindeutigkeit folgt aus der Injektivität von i.

Sei $C_f := \operatorname{Cokern} f = Y/\operatorname{Bild}(f) = Y/Xf$, und sei $Y \xrightarrow{p} C_f$, $y \longmapsto y + Xf$ die Restklassenabbildung. Wir behaupten, daß p ein Cokern von f ist. In der Tat, ist $Y \xrightarrow{t} T$ eine R-lineare Abbildung mit $ft = 0$, so ist $t|_{Xf} = 0$, und die Faktorisierung $y + Xf \longmapsto yt$ über p damit wohldefiniert. Die Eindeutigkeit folgt aus der Surjektivität von p.

(4) (i) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$, sei $K \xrightarrow{i} X$ sein Kern, sei $Y \xrightarrow{p} C$ sein Cokern, sei $X \xrightarrow{\bar{f}} I$ der Cokern von i, sei $J \xrightarrow{\dot{f}} Y$ der Kern von j, wobei alle vier als existent vorausgesetzt werden.

Wegen $\bar{f}$ Cokern von i und $if = 0$ gibt es nun ein u mit $\bar{f}u = f$. Da $\bar{f}$ epimorph ist, und da $\bar{f}up = fp = 0$ ist, ist $up = 0$. Wegen $\dot{f}$ Kern von p und $up = 0$ gibt es nun ein w mit $w\dot{f} = u$.

Wir können dieses w wie folgt selbstdual charakterisieren. Es ist $\bar{f}w\dot{f} = \bar{f}u = f$. Und wegen $\bar{f}$ epimorph und $\dot{f}$ monomorph ist w der einzige Morphismus mit $\bar{f}w\dot{f} = f$.

$$\begin{tikzcd}
 & & I \arrow[dd, "w"] \arrow[dr, "u"] & & \\
K \arrow[r, "i"] & X \arrow[ur, "\bar f"] \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[r, "p"] & C \\
 & & J \arrow[ur, "\dot f"'] & &
\end{tikzcd}$$

(ii) Jeder Morphismus in **Z**-free hat mit (3) einen Kern in **Z**-Mod. Nun liegt dieser Kern aber bereits in **Z**-free, ist also a fortiori dort ein Kern.

Für den Cokern brauchen wir folgende Vorbemerkung. Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Seien $X \xrightarrow{f} Y$ und $X' \xrightarrow{f'} Y'$ Morphismen in $\mathcal{A}$ derart, daß es Isomorphismen $X \xrightarrow[\sim]{x} X'$ und $Y' \xrightarrow[\sim]{y} Y'$ mit $xf' = yf$ gibt. Sei ferner angenommen, es existiere ein Cokern p zu f.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"', "\wr"] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "y"', "\wr"] & C \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' &
\end{tikzcd}$$

Dann ist $y^{-1}p$ ein Cokern zu f'. Denn sei $Y' \xrightarrow{t} T$ mit $f't = 0$, dann ist auch $f(yt) = xf't = 0$, so daß es ein $C \xrightarrow{u} T$ gibt mit $pu = yt$, d.h. $(y^{-1}p)u = t$. Die diesbezügliche Eindeutigkeit von u folgt aus der Epimorphie von $y^{-1}p$.

(Kurz: Isomorphe Morphismen haben isomorphe Cokerne, so man Morphismen in $\mathcal{A}$ als Objekte in $[\![\Delta_1, \mathcal{A}]\!]$ auffaßt.)

Damit genügt es mit dem Elementarteilersatz, Morphismen der Form $D := \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_k, 0, \dots, 0)$ zwischen $\mathbf{Z}^n$ und $\mathbf{Z}^m$ zu betrachten, wobei $k \leqslant \min\{m, n\}$, und wobei $d_i \in \mathbf{Z}_{>0}$ mit $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_k$. Wir behaupten, dazu ist

$$\mathbf{Z}^m \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{m-k} \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}^{m-k}$$

ein Cokern. In der Tat, ist $DT = 0$ für ein $T \in \mathbf{Z}^{m \times t}$, so ist $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ T' \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \mathrm{E}_{m-k} \end{smallmatrix}\right) T'$, was die Existenz einer Faktorisierung zeigt. Die Eindeutigkeit folgt aus der Surjektivität.

Der Cokern eines Morphismus in **Z**-free stimmt also im allgemeinen nicht mit dem Cokern desselben Morphismus in **Z**-Mod überein. So z.B. hat $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ den Cokern 0 in **Z**-free, und den Cokern $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ in **Z**-Mod.

Nun ergibt sich der induzierte Morphismus w aus (1) für den Morphismus $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ wegen

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{Z} \arrow[dd, "w"] & & \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, "2"] & & \mathbf{Z} \arrow[r] & 0 \\
 & & \mathbf{Z} \arrow[ur, "1"'] & &
\end{tikzcd}$$

zu $w = (\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z})$, was kein Isomorphismus ist.

(iii) In der Bezeichnungsweise von (i) werden $X \xrightarrow{\bar{f}} I$ zu $X \longrightarrow X/\operatorname{Kern}(f)$, $x \longmapsto x + \operatorname{Kern}(f)$, und $J \xrightarrow{\dot{f}} Y$ zu $\operatorname{Bild}(f) \longrightarrow Y$, $y \longmapsto y$. Somit erhalten wir $X/\operatorname{Kern}(f) \xrightarrow{w} \operatorname{Bild}(f)$, $x + \operatorname{Kern}(f) \longmapsto xf$ wegen der Bedingung $\bar{f}w\dot{f} = f$. Nach dem Homomorphiesatz ist dies ein Isomorphismus.

(5) Sei $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$ mit $(X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'') = 0$ und $(K_g \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} C_f) = 0$ gegeben. Wir wollen zeigen, daß $\operatorname{Bild}(f) = \operatorname{Kern}(g)$ ist. Sei $x \in \operatorname{Bild}(f)$, sei etwa $x = x'f$ für ein $x' \in X'$. Es ist dann $xg = x'fg = 0$, also $x \in \operatorname{Kern}(g)$. Sei umgekehrt $x \in \operatorname{Kern}(g)$. Es ist $xip = 0$, d.h. $x + \operatorname{Bild}(f) = 0 + \operatorname{Bild}(f)$, d.h. $x \in \operatorname{Bild}(f)$.

Sei umgekehrt $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$ mit $\operatorname{Bild}(f) = \operatorname{Kern}(g)$ gegeben. Dann erhalten wir zum einen $(X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'') = 0$ wegen $\operatorname{Bild}(f) \subseteq \operatorname{Kern}(g)$, und zum anderen $(K_g \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} C_f) = 0$ wegen $\operatorname{Bild}(f) \supseteq \operatorname{Kern}(g)$.

Aufgabe 15.

(1) Wir wissen schon, daß es sich bei $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ um eine Kategorie handelt, wobei Morphismen repräsentantenweise komponiert werden.

Da es von jedem gegebenen Objekt in das Nullobjekt 0 von $\mathcal{C}$ genau einen Morphismus in $\mathcal{C}$ gibt, ist dies auch in $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ der Fall; genauso gibt es in $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ auch nur einen Morphismus aus 0 heraus in ein gegebenes Objekt. Damit ist 0 auch ein Nullobjekt in $\mathcal{C}/\mathcal{N}$.

Seien X, Y Objekte von $\mathcal{C}/\mathcal{N}$, i.e. Objekte von $\mathcal{C}$. Wir behaupten, daß $X \oplus Y$, zusammen mit den Restklassen von ι_X und ι_Y, ein Coprodukt von (X, Y) ist. Gegeben zwei Morphismen $X \longrightarrow T$ und $Y \longrightarrow T$, so vererbt sich die Existenz des induzierten Morphismus $X \oplus Y \longrightarrow T$ aus $\mathcal{C}$. Zu zeigen ist nur die Eindeutigkeit.

Mit einer Differenzbildung ist man darauf reduziert, zu zeigen, daß ein Morphismus $X \oplus Y \xrightarrow{\binom{u}{v}} T$ bereits dann in $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ verschwindet, wenn $\iota_X \binom{u}{v} = u$ und $\iota_Y \binom{u}{v} = v$ in $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ verschwinden. Seien also Faktorisierungen

$$\begin{array}{rcl} (X \xrightarrow{u} T) & = & (X \xrightarrow{u'} N \xrightarrow{u''} T) \\ (Y \xrightarrow{v} T) & = & (Y \xrightarrow{v'} M \xrightarrow{v''} T)\,. \end{array}$$

mit Objekten N und M von $\mathcal{N}$ gegeben. Dann aber faktorisiert auch

$$(X \oplus Y \xrightarrow{\binom{u}{v}} T) \; = \; (X \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} u' & 0 \\ 0 & v' \end{pmatrix}} N \oplus M \xrightarrow{\binom{u''}{v''}} T)$$

über das Objekt $N \oplus M$ von $\mathcal{N}$.

Dual folgt, daß $X \oplus Y$, zusammen mit den Restklassen von π_X und π_Y, ein Produkt ist. Die gewünschten Kompositionen $\iota_X \pi_X = 1$, $\iota_X \pi_Y = 0$, $\iota_Y \pi_X = 0$ und $\iota_Y \pi_Y = 1$ vererben sich von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{C}/\mathcal{N}$.

Auf diese Weise haben wir zugleich gezeigt, daß der Restklassenfunktor $\mathcal{C} \xrightarrow{Q} \mathcal{C}/\mathcal{N}$ die in der Definition geforderten Eigenschaften (0, 1, 2) eines additiven Funktors besitzt (wobei wir uns für (2) auf das duale Argument zu (1) stützen).

(2) Sei $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ ein additiver Funktor, für den $FN \simeq 0$ für alle $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$ ist. Wir haben zu zeigen, daß

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}/\mathcal{N} & \xrightarrow{\bar{F}} & \mathcal{D} \\ (X \xrightarrow{f} Y) & \longmapsto & (FX \xrightarrow{Ff} FY) \end{array}$$

ein wohldefinierter Funktor ist. Denn dann ist $F = \bar{F} \circ Q$; und damit ist $\bar{F}$, da Q auf den Morphismen surjektiv ist, auch eindeutig bestimmt. Wegen der in (1) gesehenen Konstruktion der direkten Summe ist $\bar{F}$ dann auch additiv.

Hierzu muß gezeigt werden, daß verschiedene Repräsentanten desselben Morphismus dasselbe Bild in $\mathcal{D}$ erhalten. Verträglichkeit mit Komposition und Identitäten vererbt sich dann aus $\mathcal{C}$.

Wegen der Additivität von F genügt es mit Bildung einer Differenz zu zeigen, daß ein Morphismus der Form $(X \longrightarrow N \longrightarrow Y)$, mit $N \in \mathrm{Ob}\mathcal{N}$, nach Anwendung von F verschwindet. Nun ist aber

$$F(X \longrightarrow N \longrightarrow Y) \;=\; (FX \longrightarrow FN \longrightarrow FY)$$

und $FN \simeq 0$ in $\mathcal{D}$.

Aufgabe 16. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$, der über einen split azyklischen Komplex N faktorisiere. Wir erhalten

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d"] & X^{i-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} s^{i-1} & t^{i-1} \end{pmatrix}"'] & X^{i} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} s^{i} & t^{i} \end{pmatrix}"'] & X^{i+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} s^{i+1} & t^{i+1} \end{pmatrix}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & T^{i-1} \oplus T^{i} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} u^{i-1} \\ v^{i-1} \end{smallmatrix}\right)"'] & T^{i} \oplus T^{i+1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} u^{i} \\ v^{i} \end{smallmatrix}\right)"'] & T^{i+1} \oplus T^{i+2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} u^{i+1} \\ v^{i+1} \end{smallmatrix}\right)"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d"] & Y^{i-1} \arrow[r, "d"] & Y^{i} \arrow[r, "d"] & Y^{i+1} \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Insbesondere sind $ds^i = t^{i-1}$ und $u^i = v^{i-1}d$ stets. Sei $h^i := s^i v^{i-1} : X^i \longrightarrow Y^{i-1}$ für $i \in \mathbf{Z}$. Es wird

$$\begin{array}{rcl}
h^i d + dh^{i+1} & = & s^i v^{i-1} d + ds^{i+1} v^i \\
& = & s^i u^i + t^i v^i \\
& = & \begin{pmatrix} s^i & t^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^i \\ v^i \end{pmatrix} \;.
\end{array}$$

Sei nun umgekehrt $X \xrightarrow{f} Y$ ein nullhomotoper Morphismus in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$, sei also $f^i = h^i d + dh^{i+1}$ stets. Wir können $X \xrightarrow{f} Y$ wie folgt faktorisieren.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d"] & X^{i-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & d \end{pmatrix}"'] & X^{i} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & d \end{pmatrix}"'] & X^{i+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & d \end{pmatrix}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & X^{i-1} \oplus X^{i} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} h^{i-1}d \\ h^{i} \end{smallmatrix}\right)"'] & X^{i} \oplus X^{i+1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} h^{i}d \\ h^{i+1} \end{smallmatrix}\right)"'] & X^{i+1} \oplus X^{i+2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} h^{i+1}d \\ h^{i+2} \end{smallmatrix}\right)"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d"] & Y^{i-1} \arrow[r, "d"] & Y^{i} \arrow[r, "d"] & Y^{i+1} \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 17.

(1) Sei G rechtsadjungiert zu F, $F \dashv G$. Sei $Y \xrightarrow{p} C_f$ ein Cokern von $X \xrightarrow{f} Y$ in R-Mod. Wir wollen zeigen, daß $FY \xrightarrow{Fp} FC_f$ ein Cokern von $FX \xrightarrow{Ff} FY$ in S-Mod ist. Sei hierzu $FY \xrightarrow{t} T$ mit $(Ff)t = 0$ gegeben.

Es werde die Adjunktionsbijektion stets

$$_S(FU, V) \underset{\sim}{\xrightarrow{\Phi}} {_R(U, GV)}$$

geschrieben. Beachte, daß Φ ein Morphismus abelscher Gruppen ist, wie man anhand von Einheit und Coeinheit und der Additivität von F erkennt. In der Tat ist, in den Bezeichnungen von Aufgabe 10, $w\Phi^{-1} = (Fw)(\eta V)$ für einen Morphismus $U \xrightarrow{w} GV$. Und da Φ^{-1} ein Morphismus ist, gilt das auch für Φ.

Es ist $f(t\Phi) = ((Ff)t)\Phi = 0\Phi = 0$. Also gibt es ein $C_f \xrightarrow{u} GT$ mit $pu = t\Phi$. Es wird $(Fp)(u\Phi^{-1}) = (pu)\Phi^{-1} = t$. Für die universelle Eigenschaft des Cokerns bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Es genügt zu zeigen, daß Fp epimorph ist. Sei $(Fp)s = 0$. Dann ist auch $p(s\Phi) = ((Fp)s)\Phi = 0$, und also wegen p epimorph auch $s\Phi = 0$, und folglich $s = 0$.

Somit ist gezeigt, daß aus F rechtsexakt ist, falls F linksadjungiert ist.

Mit den dualen Argumenten sieht man, daß F linksexakt ist, falls F rechtsadjungiert ist.

(2) Wir wollen zeigen, daß $_R(-, M)$ linksexakt ist. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus in R-Mod, und sei $Y \xrightarrow{p} C_f$ ein Cokern von f. Wir müssen zeigen, daß $(Y, M) \xleftarrow{(p,M)} (C_f, M)$ ein Kern von $(X, M) \xleftarrow{(f,M)} (Y, M)$ ist.

Es ist (p, M) injektiv, da p epimorph ist. Gehen wir elementweise vor, und zeigen, daß ein Element, welches von (f, M) annulliert wird, bereits im Bild von (p, M) liegt. Sei also $Y \xrightarrow{m} M$ ein Morphismus mit $m(f, M) = fm = 0$. Dann gibt es wegen p Cokern zu f ein $C_f \xrightarrow{m'} M$ mit $m = pm' = m'(p, M)$, wie zu zeigen.

(3) Es ist $_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, -)$ rechtsadjungiert zu $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} -$.

Die kurz exakte Sequenz $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ wird unter $_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, -)$ zu $0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, das Bild des Cokerns ist also kein Cokern des Bildes. Somit ist der Funktor $_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, -)$ nicht exakt.

Die kurz exakte Sequenz $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ wird unter $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} -$ zu $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, das Bild des Kerns ist also kein Kern des Bildes. Somit ist der Funktor $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} -$ nicht exakt.

Aufgabe 18.

(1) Sei

$$X' \; := \; \mathrm{Kern}\left(\begin{smallmatrix} f \\ -y \end{smallmatrix}\right) \; = \; \{(m, n) \in X \oplus Y' \; : \; mf = ny\} \; \subseteq \; X \oplus Y' \, .$$

Es ist X' ein R-Teilmodul von $X \oplus Y'$. Seien

$$\begin{array}{rcl} X' & \xrightarrow{x} & X \\ (m, n) & \longmapsto & m \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ (m, n) & \longmapsto & n \end{array}$$

erklärt. Dann ist in der Tat $xf = f'y$.

Überprüfen wir die universelle Eigenschaft. Seien $T \xrightarrow{u} X$ und $T \xrightarrow{v} Y'$ mit $uf = vy$ gegeben. Dann können wir

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{w} & X' \\ t & \longmapsto & (tu, tv) \end{array}$$

setzen, was wegen $(tu)f = (tv)y$ wohldefiniert ist, und erhalten $wx = u$ und $wf' = v$. Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit von w. Nach Bilden einer Differenz genügt es zu zeigen, daß aus $wx = 0$ und $wf' = 0$ folgt, daß $w = 0$. Sei $t \in T$. Ist $twf' = 0$ und $twx = 0$, so bedeutet dies gerade, daß die beiden Einträge im Tupel tw verschwinden, wie zu zeigen.

Man kann hierzu auch die universelle Eigenschaft des Kerns heranziehen.

Die Eindeutigkeit des Pullbacks bis auf eindeutige Isomorphie zeigt sich wie folgt. Sei $\tilde{X}'$ ein konkurrierender Pullback. Dann gibt es einen Morphismus von X' nach $\tilde{X}'$ und einen Morphismus von $\tilde{X}'$ nach X', beide kompatibel mit den beiden jeweiligen Morphismen nach X und nach Y'. Die Komposition $X' \longrightarrow \tilde{X}' \longrightarrow X'$ ist also ebenfalls kompatibel mit den beiden Morphismen nach X und nach Y', daher in Konkurrenz zur Identität, und folglich gleich der Identität. Dito die Komposition $\tilde{X}' \longrightarrow X' \longrightarrow \tilde{X}'$.

(2) Sei f monomorph. Wir haben zu zeigen, daß f' monomorph ist. Sei $(m, n) \in X'$ mit $(m, n)f' = n = 0$. Dann ist $mf = ny = 0y = 0$, und also $m = 0$ wegen f monomorph. Insgesamt ist $(m, n) = (0, 0)$, wie zu zeigen.

Man hätte hierfür auch direkt mit der Definition der Monomorphie argumentieren können.

Sei f epimorph. Wir wollen zeigen, daß f' epimorph ist. Sei $n \in Y'$ vorgegeben. Wir müssen ein $m \in X$ so finden, daß $(m, n) \in X'$, da dann in der Tat $(m, n)f' = n$ ist. Wir müssen also ein $m \in X$ so finden, daß $mf = ny$. Dies ist wegen f epimorph aber möglich.

(3) Wir wollen zeigen, daß die Einschränkung von x auf einen Morphismus $K_{f'} \xrightarrow{k} K_f$ ein Isomorphismus ist. Es ist

$$K_{f'} \;=\; \{(m, n) \in X \oplus Y' \;:\; mf = ny,\ (m, n)f' = n = 0\} \;=\; \{(m, 0) \in X \oplus Y' \;:\; mf = 0\}\,.$$

Die Einschränkung von x projiziert nun $(m, 0)$ auf m. Ein inverser Isomorphismus $K_f \longrightarrow K_{f'}$ kann durch $m \longmapsto (m, 0)$ angegeben werden.

Wir wollen zeigen, daß der von y auf $C_{f'} \xrightarrow{c} C_f$ induzierte Morphismus monomorph ist. Sei $n + X'f' \in C_{f'}$ mit $ny + Xf = 0$ gegeben. Wir müssen zeigen, daß $n + X'f' = 0$ ist. Sei also $ny = mf$ für ein $m \in X$. Dann ist $(n, m) \in X'$, und insbesondere $(n, m)f' = m$, was $n + X'f' = 0$ nach sich zieht.

Hieraus folgt nun übrigens auch nochmals (2).

Sei nun umgekehrt ein kommutatives Viereck

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}' \arrow[r, "\tilde{f}'"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y' \arrow[d, "y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

mit einem induzierten Isomorphismus $K_{\tilde{f}'} \longrightarrow K_f$ und einem induzierten Monomorphismus $C_{f'} \longrightarrow C_f$ gegeben.

Mit der universellen Eigenschaft des Pullbacks erhalten wir ein kommutatives Dreieck

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}' \arrow[rr, "\tilde{f}'"] \arrow[dr, "t"'] & & Y'\,. \\ & X' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

Der induzierte Morphismus von $K_{\tilde{f}'} \longrightarrow K_{f'}$ ist ein Isomorphismus, da sich komponiert mit dem Isomorphismus $K_{f'} \longrightarrow K_f$ der Isomorphismus $K_{\tilde{f}'} \longrightarrow K_f$ ergibt, wie man nach Kürzen des Monomorphismus $K_f \rightarrowtail X$ erkennt.

Der induzierte Morphismus auf den Bildern von $\tilde{f}'$ und f', $I_{\tilde{f}'} \longrightarrow I_{f'}$, ist der induzierte Morphismus auf den horizontalen Kernen des kommutativen Vierecks

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_{\tilde{f}'} \arrow[d] \\
X' \arrow[r] & C_{f'} .
\end{tikzcd}$$

Können wir zeigen, daß $C_{\tilde{f}'} \longrightarrow C_{f'}$ isomorph ist, so folgt daher auch $I_{\tilde{f}'} \longrightarrow I_{f'}$ isomorph.

Es ist $C_{\tilde{f}'} \longrightarrow C_{f'}$ epimorph, da er als zweiter zu einem Epimorphismus $X' \longrightarrow C_{f'}$ komponiert. Er ist auch ein Monomorphismus, da er als erster zu einem Monomorphismus $C_{\tilde{f}'} \longrightarrow C_f$ komponiert, wie man nach Kürzen des Epimorphismus $X \longrightarrow C_{\tilde{f}'}$ erkennt. Zusammen ist $C_{\tilde{f}'} \longrightarrow C_{f'}$ isomorph

Somit haben wir einen Morphismus kurz exakter Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
K_{\tilde{f}'} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \tilde{X}' \arrow[r] \arrow[d] & I_{\tilde{f}'} \arrow[d, "\wr"] \\
K_{f'} \arrow[r] & X' \arrow[r] & I_{f'} .
\end{tikzcd}$$

Mit Aufgabe 20.(2) ist also auch der induzierte Morphismus $\tilde{X}' \longrightarrow X'$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist auch das kommutative Viereck $(\tilde{X}', Y', X, Y)$ ein Pullback.

(4) Sei ${}_R(P, -)$ exakt. Sei $X \xrightarrow{f} P$ ein Epimorphismus. Wir müssen zeigen, daß f eine Retraktion ist. Nun ist $(P, -)$ exakt, transformiert also insbesondere die kurz exakte Sequenz

$$K_f \rightarrowtail X \overset{f}{\twoheadrightarrow} P$$

in eine kurz exakte Sequenz

$$(P, K_f) \rightarrowtail (P, X) \overset{(P,f)}{\twoheadrightarrow} (P, P) .$$

Speziell ist (P, f) surjektiv. Sei $y \in (P, X)$ mit $y(P, f) = 1_P$. Das aber heißt gerade, daß $yf = 1_P$, wie verlangt.

Sei umgekehrt P projektiv. Es ist zu zeigen, daß $(P, -)$ kurz exakte Sequenzen in kurz exakte Sequenzen abbildet. Denn dann bringt er insbesondere Monomorphismen in Monomorphismen und Epimorphismen in Epimorphismen. Damit folgt jeweils durch Einsetzen des Bildes, daß er auch Kerne und Cokerne bewahrt.

Mit 17 (1) bildet $(P, -)$ kurz exakte Sequenzen in Sequenzen ab, deren linker Morphismus Kern des rechten ist. Es bleibt also zu zeigen, daß $(P, -)$ Epimorphismen auf Epimorphismen abbildet.

Sei also $X \overset{f}{\twoheadrightarrow} Y$ ein Epimorphismus, und sei $y \in (P, Y)$. Zu zeigen ist, daß es ein $h \in (P, X)$ mit $h(P, f) = hf = y$ gibt.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "y"] \\
X \arrow[r, two heads, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Wir bilden unter Beachtung von (2) den Pullback.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'", "|" marking] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & P \arrow[d, "y"] \\ X \arrow[r, "f", "|" marking] & Y \end{tikzcd}$$

Wegen P projektiv gibt es also einen Morphismus $P \xrightarrow{g'} X'$ mit $g'f' = 1_P$. Mit $h := g'x$ wird $hf = g'xf = g'f'y = y$ wie verlangt.

(5) Überall, wo mit Elementen argumentiert wurde, können wir die Argumente nicht einfach dualisieren.

Die Konstruktion des Pullbacks benutzte nur eine direkte Summe und einen Kern, ist also dualisierbar.

Wir wollen sie trotzdem angeben, dual zu (1). Sei ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "x"'] & Y' \\ X & \end{tikzcd}$$

in R-Mod gegeben. Wir setzen

$$Y \;:=\; \operatorname{Cokern}\left(\begin{smallmatrix} x & -f' \end{smallmatrix}\right) .$$

Seien

$$\begin{aligned} (X \xrightarrow{f} Y) \quad &:= \quad (X \xrightarrow{(1\,0)} X \oplus Y' \longrightarrow \operatorname{Cokern}\left(\begin{smallmatrix} x & -f' \end{smallmatrix}\right)) \\ (Y' \xrightarrow{y} Y) \quad &:= \quad (Y' \xrightarrow{(0\,1)} X \oplus Y' \longrightarrow \operatorname{Cokern}\left(\begin{smallmatrix} x & -f' \end{smallmatrix}\right)) . \end{aligned}$$

In anderen Worten, es bezeichne $X \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f \\ y \end{smallmatrix}\right)} Y$ die Restklassenabbildung in den Cokern.

Dann ist $xf = f'y$, da ein Element $m' \in X'$ unter $xf - f'y$ auf

$$m'xf - m'f'y \;=\; (m'x, 0) - (0, m'f') + \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} x & -f' \end{smallmatrix}\right) \;=\; m'\left(\begin{smallmatrix} x & -f' \end{smallmatrix}\right) + \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} x & -f' \end{smallmatrix}\right) \;=\; 0 + \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} x & -f' \end{smallmatrix}\right)$$

abgebildet wird. Wir erhalten also ein kommutatives Rechteck

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'", "|" marking] \arrow[d, "x"'] & P \arrow[d, "y"] \\ X \arrow[r, "f"', "|" marking] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner", very near end] & Y \end{tikzcd}$$

in welchem der Haken rechts unten den Pushout andeutet.

Zeigen wir die universelle Eigenschaft, diesesmal unter Verwendung des Cokerns. Seien Morphismen $X \xrightarrow{u} T$ und $Y' \xrightarrow{v} T$ mit $xu = f'v$ gegeben. Dann ist $\left(\begin{smallmatrix} x & -f' \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = 0$, und also gibt es eine eindeutige Faktorisierung $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} f \\ y \end{smallmatrix}\right) w$. Die Charakterisierung über diese Kommutativität bedeutet aber gerade die Charakterisierung über die beiden verlangten Kommutativitäten $fw = u$ und $yw = v$. Damit sind Existenz und Eindeutigkeit gesichert.

Die Eindeutigkeit des Pushouts bis auf eindeutige Isomorphie zeigt dual zu der des Pullbacks.

Dual zu (2) wollen wir nun zeigen, daß f' epimorph f epimorph impliziert. Wir argumentieren im Unterschied zu oben einmal nicht mit Elementen. Sei also $ft = 0$. Wir müssen zeigen, daß $t = 0$.

Nun folgt aber aus $f'yt = xft = 0$ wegen f' epimorph, daß $yt = 0$. Da sowohl $yt = 0 = y0$ und $ft = 0 = 0t$, folgt mit der Eindeutigkeit des durch den Pushout Induzierten, daß $t = 0$.

Ebenfalls dual zu (2) wollen wir nun zeigen, daß f' monomorph f monomorph impliziert. Sei $m \in X$ mit $mf = 0$ gegeben. I.e. sei $(m, 0) \in \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} x & -f' \end{smallmatrix}\right)$. Sei also $m' \in X'$ derart, daß $(m'x, -m'f') = (m, 0)$. Dann aber ist $m'f' = 0$, was wegen f' monomorph impliziert, daß $m' = 0$, woraus schließlich $m = m'x = 0$ folgt.

Dual zu (3) wollen wir zeigen, daß der auf den Cokernen induzierte Morphismus $C_{f'} \longrightarrow C_f$ ein Isomorphismus ist. Dazu geben wir einen Umkehrmorphismus an, nämlich

$$\begin{array}{rcl} C_f \;=\; X \oplus Y'/(\operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} x & -f' \end{smallmatrix}\right) + X) & \longrightarrow & Y'/\operatorname{Im} f' \;=\; C_{f'} \\ (m, n') & \longmapsto & n'\,. \end{array}$$

Für die Wohldefiniertheit müssen wir zeigen, daß $\operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} x & -f' \end{smallmatrix}\right) + X$ unter dieser repräsentantenweisen Definition verschwindet. Für X trifft dies zu. Für $(m'x, -m'f')$ für ein $m' \in X'$ ist ebenfalls das Bild $m'f' \in \operatorname{Im} f'$, und damit Null.

Wir haben den Morphismus $(0, n') \longleftarrow\!\!| \; n'$ zu invertieren, der uns in umgekehrter Richtung vorgegeben ist. In der Tat ist $(m, n') \longmapsto n' \longmapsto (0, n')$, und die Differenz $(m, 0)$ ist in X, verschwindet also. Die andere Komposition ist $n' \longmapsto (0, n') \longmapsto n'$, und damit ebenfalls die Identität.

Ebenfalls dual zu (3) wollen wir zeigen, daß auf den Kernen ein Epimorphismus $K_{f'} \longrightarrow K_f$ induziert wird. Sei also $m \in X$ mit $mf' = 0$, i.e. mit $(m, 0) = (m'x, -m'f')$ für ein $m' \in X'$ gegeben. Dann ist $m'x = m$, und $m'f' = 0$, i.e. $m' \in K_{f'}$, und wir haben ein Urbild von m in $K_{f'}$ gefunden.

Die abschließende Aussage von (3) dualisiert sich dazu, daß ein kommutatives Viereck, welches auf den horizontalen Kernen einen induzierten Epimorphismus und auf den horizontalen Cokernen einen Monomorphismus hat, bereits ein Pushout ist. Dies wurde elementfrei gezeigt, so daß sich auch der Beweis dualisiert.

Auch in (4) wurden nur dualisierbare Argumente angeführt, also ist hier nichts mehr zu zeigen. Halten wir nur noch einmal fest, daß I injektiv ist genau dann, wenn $(-, I)$ exakt ist.

Aufgabe 19.

(1) Sei $\prod_{i\in I} M_i$ das cartesische Produkt der Mengen M_i, ausgestattet mit der eintragsweise erklärten R-Modulstruktur, sowie mit den Projektionen π_i auf die Komponenten. Zur universellen Eigenschaft. Ist $(T \xrightarrow{t_i} M_i)_{i\in I}$ ein Tupel von Morphismen, so können wir

$$\begin{array}{rcl} T & \xrightarrow{t} & \prod_{i\in I} M_i \\ x & \longmapsto & (xt_i)_{i\in I} \end{array}$$

setzen. Das ist eine R-lineare Abbildung, die $t\pi_i = t_i$ für $i \in I$ erfüllt. Umgekehrt läßt uns diese Bedingung auch nur diese Wahl für t.

Sei

$$\coprod_{i\in I} M_i := \{(m_i)_{i\in I} \;:\; m_i = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } i \in I\} \;\subseteq\; \prod_{i\in I} M_i\,,$$

zusammen mit den Injektionen $M_j \xrightarrow{\iota_j} \coprod_{i\in I} M_i$, $x \longmapsto (\partial_{i,j}x)_{i\in I}$ (Kroneckerdelta).

Es ist $\coprod_{i\in I} M_i$ ein Teilmodul von $\prod_{i\in I} M_i$, und die Injektionen ι_j sind R-linear. Zur universellen Eigenschaft. Ist $(M_i \xrightarrow{t_i} T)_{i\in I}$ ein Tupel von Morphismen, so können wir

$$\begin{array}{rcl} \coprod_{i\in I} M_i & \xrightarrow{t} & T \\ (m_i)_{i\in I} & \longmapsto & \sum_{i\in I} m_i t_i \end{array}$$

setzen. Dies ist als endliche Summe zu lesen. Es ist t R-linear, und es ist $\iota_i t = t_i$ für $i \in I$. Ferner läßt uns diese Bedinung zusammen mit der verlangten R-Linearität auch keine andere Wahl für t.

Beachte, daß wir auf $\prod_{i\in I} M_i$ keinen von $(t_i)_{i\in I}$ induzierten Morphismus gefunden hätten, da wir nur über endliche Summen verfügen.

(2) Die universelle Eigenschaft des Coproduktes läßt sich gerade als Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} (\coprod_i M_i, T) & \xrightarrow[\sim]{\varphi T} & \prod_i (M_i, T) \\ t & \longmapsto & (\iota_i t)_i \end{array}$$

für jedes $T \in \operatorname{Ob} R\text{-Mod}$ lesen. Definieren wir nun für einen Morphismus $T \xrightarrow{f} T'$ den Bildmorphismus

$$\begin{array}{rcl} \prod_i (M_i, T) & \xrightarrow{\prod_i (M_i, f)} & \prod_i (M_i, T) \\ (t_i)_i & \longmapsto & (t_i f)_i \ , \end{array}$$

so ist wegen $t(\varphi T) \prod_i (M_i, f) = (\iota_i t f)_i = t(\coprod_i M_i, f)(\varphi T')$ das Tupel $(\varphi T)_T$ eine Isotransformation.

Sei nun M_i projektiv für alle $i \in I$, d.h. sei $(M_i, -)$ exakt stets. Dann ist auch $\prod_i (M_i, -)$ exakt stets, da ein Produkt kurz exakter Sequenzen in $\mathbf{Z}$-Mod wieder kurz exakt ist. Mit der eben gezeigten Isotransformation ist also auch $(\coprod_i M_i, -)$ exakt, i.e. $\coprod_i M_i$ prjektiv.

Alle Argumente können dualisiert werden. Wir führen dies trotzdem einmal durch. Die universelle Eigenschaft des Produktes läßt sich gerade als Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} (T, \prod_i M_i) & \xrightarrow[\sim]{\psi T} & \prod_i (T, M_i) \\ t & \longmapsto & (t\pi_i)_i \end{array}$$

für jedes $T \in \operatorname{Ob} R\text{-Mod}$ lesen. Definieren wir nun für einen Morphismus $T \xleftarrow{f} T'$ den Bildmorphismus

$$\begin{array}{rcl} \prod_i (T, M_i) & \xrightarrow{\prod_i (f, M_i)} & \prod_i (T', M_i) \\ (t_i)_i & \longmapsto & (f t_i)_i \ , \end{array}$$

so ist wegen $t(\psi T) \prod_i (f', M_i) = (f t \pi_i)_i = t(f, \prod_i M_i)(\psi T')$ das Tupel $(\psi T)_T$ eine Isotransformation zwischen kontravarianten Funktoren.

Sei nun M_i injektiv für alle $i \in I$, d.h. sei $(-, M_i)$ exakt stets. Dann ist auch $\prod_i (-, M_i)$ exakt stets, da ein Produkt kurz exakter Sequenzen in $\mathbf{Z}$-Mod wieder kurz exakt ist. Mit der eben gezeigten Isotransformation ist also auch $(-, \prod_i M_i)$ exakt, i.e. $\prod_i M_i$ injektiv.

(3) Wir haben einen Epimorphismus

$$\begin{array}{rcl} \coprod_{x\in X} R & \xrightarrow{f} & P \\ (r_x)_x & \longmapsto & \sum_x r_x x \ . \end{array}$$

Mit (1) und wegen $(R, -) \simeq 1_{R\text{-Mod}}$ exakt ist $\coprod_{x\in X} R$ projektiv.

(4) Mit Aufgabe 5.(3) sind $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ injektiv.

Sei $x \in X \setminus \{0\}$.

Ist $\langle x \rangle$ endlich von Ordnung $n \geqslant 2$, so gibt es einen Monomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \langle x \rangle & \longrightarrow & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} =: I_x \\ x & \longmapsto & 1/n \ , \end{array}$$

der sich wegen $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ injektiv zu einem Morphismus $X \xrightarrow{f_x} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ fortsetzen läßt.

Ist dagegen $\langle x\rangle \simeq \mathbf{Z}$, so gibt es einen Monomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \langle x\rangle & \rightarrowtail & \mathbf{Q} =: I_x \\ x & \longmapsto & 1\ , \end{array}$$

der sich wegen $\mathbf{Q}$ injektiv zu einem Morphismus $X \xrightarrow{f_x} \mathbf{Q}$ fortsetzen läßt.

Dies gibt einen Monomorphismus

$$X \overset{(f_x)_x}{\rightarrowtail} \prod_x I_x\ ,$$

und mit (2) ist $\prod_x I_x$ in der Tat injektiv. Die Monomorphie ergibt sich daraus, daß $y(f_x)_x\pi_y = yf_y \neq 0$ für $y \in X \smallsetminus \{0\}$, und also auch $y(f_x)_x \neq 0$.

(5) Sei I ein injektiver $\mathbf{Z}$-Modul und $X|_{\mathbf{Z}} \overset{f}{\rightarrowtail} I$ ein Monomorphismus von $\mathbf{Z}$-Moduln. Interpretieren wir $X|_{\mathbf{Z}} = {}_{\mathbf{Z}}R_R \otimes_R {}_RX$, so erhalten wir per Adjunktion den R-linearen Morphismus

$$\begin{array}{rcl} X & \xrightarrow{\hat{f}} & {}_{\mathbf{Z}}({}_{\mathbf{Z}}R_R,\, {}_{\mathbf{Z}}I) \\ x & \longmapsto & (r \longmapsto (rx)f)\ , \end{array}$$

vgl. Aufgabe 13.(4). Aus $x\hat{f} = 0$ folgt mit $r = 1$, daß $(1x)f = 0$, also wegen f monomorph, daß $x = 0$. Damit ist auch $\hat{f}$ monomorph. Bleibt zu zeigen, daß ${}_{\mathbf{Z}}({}_{\mathbf{Z}}R_R,\, {}_{\mathbf{Z}}I)$ injektiv ist. Mit Adjunktion ist aber

$${}_R(-\ ,\ {}_{\mathbf{Z}}({}_{\mathbf{Z}}R_R,\, {}_{\mathbf{Z}}I)) \ \simeq\ {}_{\mathbf{Z}}({}_{\mathbf{Z}}R_R \otimes_R -\ ,\ I) \ =\ {}_{\mathbf{Z}}((-)|_{\mathbf{Z}}\ ,\ I)\ ,$$

und da sowohl der Einschränkungsfunktor $(-)|_{\mathbf{Z}}$ als auch, nach Voraussetzung an I, der Homfunktor ${}_{\mathbf{Z}}(-, I)$ exakt sind, gilt dies auch für ihr Kompositum.

Aufgabe 20.

(1) Zeigen wir zunächst die Wohldefiniertheit des Verbindungsmorphismus ∂^k. Zunächst ist in der beschriebenen Konstruktion p^k epimorph, also existiert ein Element x mit $xp^k = x''$. Ferner ist $xdp^{k+1} = xp^kd = x''d = 0$, also gibt es genau ein Element $x' \in X'^{k+1}$ mit $x'i^{k+1} = xd$. Wie behauptet ist wegen $x'di^{k+2} = x'i^{k+1}d = xdd = 0$ und i monomorph in der Tat $x'd = 0$.

Bleibt uns, die Unabhängigkeit von den Wahlen zu zeigen. Die R-Linearität ist dann durch naheliegende solche Wahlen einfach zu sehen.

Was die Wahl von x angeht, sei $x \in X^k$ mit $xp^k = 0$ gegeben. Wir wollen zeigen, daß dann $x' \in \mathrm{B}^{k+1}X'$. Es gibt ein $y' \in X'^{k+1}$ mit $y'i^k = x$. Wegen $(y'd)i^{k+1} = y'i^kd = xd$ können wir in der Tat $x' = y'd$ wählen.

Was die Wahl des Repräsentanten x'' angeht, sei $x'' \in \mathrm{B}^kX''$ gegeben. Wir wollen zeigen, daß dann $x' \in \mathrm{B}^{k+1}X'$. Schreibe $x'' = y''d$ für ein $y'' \in X^{k-1}$. Sei $y \in X^{k-1}$ mit $yp^{k-1} = y''$. Wir können $x = yd$ wählen. Nun wird $xd = ydd = 0$, womit sich sogar $x' = 0$ ergibt.

Damit ist ∂^k wohldefiniert. Wir haben die Exaktheit der Sequenz bei H^kX, bei H^kX'' und bei $\mathrm{H}^{k+1}X'$ zu zeigen.

Exaktheit bei H^kX. Zunächst ist $(\mathrm{H}^ki)(\mathrm{H}^kp) = \mathrm{H}^k(ip) = 0$.

Sei nun $x \in \mathrm{Z}^kX$ mit $xp^k \in \mathrm{B}^kX''$. Wir haben zu zeigen, daß es ein $x' \in \mathrm{Z}^kX'$ mit $x'i^k - x \in \mathrm{B}^kX$ gibt. Sei also $xp^k = y''d$ für ein $y'' \in X''^{k-1}$. Sei $y \in X^{k-1}$ mit $yp^{k-1} = y''$. Dann ist $(x - yd)p^k = y''d - ydp^k = y''d - yp^{k-1}d = 0$, und also gibt es ein $x' \in X'^k$ mit $x'i^k = x - yd$. Bleibt zu zeigen, daß $x' \in \mathrm{Z}^kX'$. Es genügt wegen i^{k+1} monomorph zu zeigen, daß $x'di^{k+1}$ verschwindet. Es wird in der Tat $x'di^{k+1} = x'i^kd = (x - yd)d = xd - ydd = 0$.

Exaktheit bei H^kX''. Sei zunächst $x \in \mathrm{Z}^kX$. Wir haben zu zeigen, daß $(xp^k + \mathrm{B}^k)\partial^k$ verschwindet. In der Tat verschwindet bereits das bei der Berechnung des Bildes unter ∂^k auftretende xd.

Sei nun $x'' \in \mathrm{Z}^k X''$ mit $(x'' + \mathrm{B}^k X'')\partial^k = 0$. Wir haben zu zeigen, daß es ein $x \in \mathrm{Z}^k X'$ mit $xp^k - x' \in \mathrm{B}^k X''$ gibt. Sei $\tilde{x} \in X^k$ mit $\tilde{x}p^k = x'$ beliebig gewählt. Wegen $(x'' + \mathrm{B}^k X'')\partial^k = 0$ muß $\tilde{x}d = x'i^{k+1}$ mit einem $x' \in \mathrm{B}^{k+1}X'$ sein. Sei $y \in X'^k$ mit $y'd = x'$. Dann ist $(\tilde{x} - y'i^k)d = \tilde{x}d - y'di^{k+1} = \tilde{x}d - x'i^{k+1} = 0$, also $x := \tilde{x} - y'i^k \in \mathrm{Z}^k X$. In der Tat ist nun sogar $xp^k = (\tilde{x} - y'i^k)p^k = \tilde{x}p^k = x'$.

Exaktheit bei $\mathrm{H}^{k+1}X'$. Sei zunächst $x'' \in \mathrm{Z}^k X''$. Wir haben zu zeigen, daß $(x'' + \mathrm{B}^k X'')\partial^k(\mathrm{H}^{k+1}i)$ verschwindet. Das Bild von $x'' + \mathrm{B}^k X''$ in $\mathrm{Z}^{k+1}X'$ wird durch ein $x' \in \mathrm{Z}^{k+1}X'$ repräsentiert, für welches ein $x \in X^k$ gibt mit $xd = x'i^{k+1}$ und $xp^k = x''$. Da insbesondere $x'i^{k+1} = xd$, verschwindet das Bild in $\mathrm{H}^{k+1}X$ aber wie verlangt.

Sei nun $x' \in \mathrm{Z}^{k+1}X'$ mit $x'i^{k+1} \in \mathrm{B}^{k+1}X$. Wir haben zu zeigen, daß es ein $x'' \in \mathrm{Z}^k X''$ mit $(x'' + \mathrm{B}^k X'')\partial^k = x' + \mathrm{B}^{k+1}X'$ gibt. Sei $x \in X^k$ mit $xd = x'i^{k+1}$. Setze $x'' = xp^k$. Wegen $x''d = xp^k d = xdp^{k+1} = x'i^{k+1}p^{k+1} = 0$ ist in der Tat $x'' \in \mathrm{Z}^k X''$. Nach Konstruktion ∂^k ist aber auch $x' + \mathrm{B}^{k+1}X'$ das Bild von $x'' + \mathrm{B}^k X''$ unter ∂^k.

(2) Betrachte das Diagramm als kurz exakte Sequenz von Komplexen, konzentriert jeweils in den Graden 0 und 1. Wir erhalten nach Voraussetzung $\mathrm{H}^0(X' \xrightarrow{f'} Y') = 0$, $\mathrm{H}^1(X' \xrightarrow{f'} Y') = 0$, $\mathrm{H}^0(X'' \xrightarrow{f''} Y'') = 0$, $\mathrm{H}^1(X'' \xrightarrow{f''} Y'') = 0$. Die lang exakte Homologiesequenz aus (1) hat in den Graden 0 und 1 die Gestalt

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(X \xrightarrow{f} Y) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(X \xrightarrow{f} Y) \longrightarrow 0\,.$$

Es folgen $\mathrm{H}^0(X \xrightarrow{f} Y) = \operatorname{Kern} f = 0$ und $\mathrm{H}^1(X \xrightarrow{f} Y) = \operatorname{Cokern} f = 0$, i.e. es folgt, daß $X \xrightarrow{f} Y$ ein Isomorphismus ist.

(3) Wie in (2) betrachten wir das Diagramm als kurz exakte Sequenz von Komplexen, konzentriert jeweils in den Graden 0 und 1. Es ist $\mathrm{H}^0(X' \xrightarrow{f'} Y') = \operatorname{Kern} f'$ usf.; es ist $\mathrm{H}^1(X' \xrightarrow{f'} Y') = \operatorname{Cokern} f'$ usf. Ferner sind $\mathrm{H}^2(X' \xrightarrow{f'} Y') = 0$ und $\mathrm{H}^{-1}(X'' \xrightarrow{f''} Y'') = 0$. Mit (1) folgt die behauptete exakte Sequenz.

(4) Sei I das Bild von f, und sei $f = \bar{f}\dot{f}$ über I faktorisiert. Wir erhalten zwei kommutative Dreiecke in

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, tail, "\bar{f}"'] \arrow[ddr, "fg"] & \\
I \arrow[d, "\dot{f}"'] \arrow[dr, "\dot{f}g"'] & \\
Y \arrow[r, "g"'] & Z\,.
\end{tikzcd}$$

Der Morphismus kurz exakter Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Kern} f \arrow[r, tail] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & I \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, equal] & Z
\end{tikzcd}$$

liefert mit (3) die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Kern} f \longrightarrow \operatorname{Kern}(fg) \longrightarrow \operatorname{Kern}(\dot{f}g) \longrightarrow 0\,.$$

Der Morphismus kurz exakter Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \operatorname{Cokern} f \arrow[d] \\
Z \arrow[r, equal] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

liefert mit (3) die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Kern}(\dot{f}g) \longrightarrow \mathrm{Kern}\, g \longrightarrow \mathrm{Cokern}\, f \longrightarrow \mathrm{Cokern}(fg) \longrightarrow \mathrm{Cokern}(g) \longrightarrow 0\,.$$

Aneinanderfügen dieser beiden Sequenzen gibt eine exakte Sequenz wie behauptet.

Behandelt man abelsche Kategorien, so geht man in der Regel von (4) über (3) zu (1). Dies ist einer der (Zeit-)Gründe, warum wir auf die Behandlung allgemeiner abelscher Kategorien verzichtet haben.

Aufgabe 21.

(1) Die Aussage ist falsch. In anderen Worten,

$$\begin{tikzcd} R\text{-Mod} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathrm{PRes}"'] & S\text{-Mod} \arrow[d, "\mathrm{PRes}"] \\ \mathrm{K}(R\text{-Mod}) \arrow[r, "\mathrm{K}(F)"] & \mathrm{K}(S\text{-Mod}) \end{tikzcd}$$

ist nicht kommutativ, auch nicht bis auf Isotransformation.

Die Nichtkommutativität dieses Diagramms gibt Anlaß zur Definition der abgeleiteten Funktoren. Denn in der Definition des, sagen wir, Linksabgeleiteten tritt die Komposition $\mathrm{K}(F) \circ \mathrm{PRes}$ auf. Wäre diese isomorph zu $\mathrm{PRes} \circ F$, so wäre $\mathrm{L}_k F = \mathrm{H}_k \circ \mathrm{K}(F) \circ \mathrm{PRes} = \mathrm{H}_k \circ \mathrm{PRes} \circ F \simeq 0$ für $k > 0$.

Nehmen wir also an, die Aussage sei zutreffend im Falle $R = S = \mathbf{Z}$ und $F = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} -$, wobei $p > 0$ prim sei. Dann ist insbesondere für alle $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Z}\text{-Mod}$ auch $\mathrm{K}(F)\mathrm{PRes}X \simeq \mathrm{PRes}FX$, und also auch $\mathrm{H}_1\mathrm{K}(F)\mathrm{PRes}X \simeq \mathrm{H}_1\mathrm{PRes}FX$. Für $X = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ selbst ergibt sich aber

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}_1\mathrm{K}(F)\mathrm{PRes}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) & \simeq & \mathrm{H}_1\mathrm{K}(F)(\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{p} \mathbf{Z}) \\ & \simeq & \mathrm{H}_1(\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \\ & \simeq & \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\,, \end{array}$$

wobei wir die Nullen an den unten indiziert negativen Positionen im Komplex nicht notiert haben. Dahingegen muß per Konstruktion

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}_1\mathrm{PRes}F(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) & \simeq & \mathrm{H}_1\mathrm{PRes}\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \\ & \simeq & \mathrm{H}_1(\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{p} \mathbf{Z}) \\ & \simeq & 0 \end{array}$$

sein. Da $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \not\simeq 0$, erhalten wir den gewünschten Widerspruch.

(2) Die Aussage ist richtig.

Wir zeigen, daß aus i Coretraktion folgt, daß die Sequenz split kurz exakt ist, oder *aufspaltet,* wie man auch sagt. Sei $iu = 1_{X'}$. Wir haben einen Morphismus kurz exakter Sequenzen (i.e. in $[\![\Delta_2, R\text{-Mod}\,]\!]$)

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "(u\ p)"] & X'' \arrow[d, equal] \\ X' \arrow[r, "(1\ 0)"] & X' \oplus X'' \arrow[r, "\binom{0}{1}"] & X'' \end{tikzcd}$$

Mit Aufgabe 20.(2) liegt auch in der Mitte ein Isomorphismus $(u\ p)$ vor.

Wir können auch einen inversen Isomorphismus angeben. Es ist $i(1_X - ui) = 0$, also gibt es ein $X'' \xrightarrow{v} X$ mit $1 - ui = pv$. Damit ist auch $(u\ p)\binom{i}{v} = 1_X$. Somit wissen wir wegen $(u\ p)$ isomorph bereits, daß $\binom{i}{v}\left(\begin{smallmatrix} u & p \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Prüfen wir dies ad hoc nach. Zu zeigen sind $vu = 0$ und $vp = 1$. Ersteres folgt mit $pvu = (1-ui)u = 0$ und p epimorph. Letzteres folgt mit $pvp = (1-ui)p = p$ und p epimorph. Letzteres zeigt auch, daß der Morphismus $X' \oplus X'' \xrightarrow{\binom{i}{v}} X$ in obiges Diagramm eingetragen beide entstehenden Rechtecke kommutieren läßt.

Mit den dualen Argumenten folgt aus p Retraktion, daß die Sequenz (i,p) aufspaltet, i.e. split kurz exakt ist.

Ist umgekehrt (i,p) split kurz exakt, so ist i Coretraktion als in $[\![\Delta_1, R\text{-Mod}]\!]$ zu einer Coretraktion isomorpher Morphismus.

In der Tat, ist allgemein i isomorph zu j vermöge eines kommutativen Rechtecks

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'", "\wr"'] & X \arrow[d, "f", "\wr"'] \\ Y' \arrow[r, "j"] & Y \end{tikzcd},$$

und ist $jt = 1_{Y'}$, dann ist $(iftf'^{-1})f' = ift = f'jt = f'$, und also $iftf'^{-1} = 1$.

Dual dazu ist diesenfalls auch p eine Retraktion.

Aufgabe 22.

(1) Jeder freie Modul ist wegen R projektiv (z.B. da $(R,-) \simeq 1_{R\text{-Mod}}$ exakt, oder wegen Aufgabe 5.(1)) und wegen Aufgabe 19.(2) projektiv.

Ist X direkter Summand eines freien Moduls, so ist X als direkter Summand eines Projektiven selbst projektiv, gemäß Aufgabe 8.

Ist X projektiv, so wählen wir wie in der Lösung zu 19 (3) einen freien Modul F und einen Epimorphismus $F \twoheadrightarrow P$. Da P projektiv ist, ist dieser Epimorphismus eine Retraktion. Ergänzen wir noch den Kern und wenden Aufgabe 21.(2) an, so erkennen wir, daß P ein Summand von F ist.

(2) Sei P ein Summand von R, i.e. sei $P \oplus Q \underset{\sim}{\xrightarrow{\binom{u}{v}}} R$. Sei $\left(\begin{smallmatrix} s & t \end{smallmatrix}\right)$ ein inverser Isomorphismus, i.e. seien $su + tv = 1$ und $\left(\begin{smallmatrix} us & ut \\ vs & vt \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Wir haben einen Ringisomorphismus

$$\begin{array}{rcl} R & \xrightarrow{\sim} & {}_R(R,R) \\ r & \longmapsto & (x \longmapsto xr) \\ 1f & \longleftarrow\!\!| & f\,. \end{array}$$

Sei e das Urbild von su unter diesem Ringisomorphismus, i.e. sei $e := 1su$. Wir haben Morphismen

$$\begin{array}{rcl} Re & \longleftrightarrow & P \\ re & \longmapsto & rs \\ xu & \longleftarrow\!\!| & x \end{array}$$

Hierbei ist $re \longmapsto rs$ wohldefiniert, da $re = 0$ impliziert, daß $0 = res = r(1su)s = rsus = rs$ ist.

Es ist $xu \longleftarrow\!\!| x$ wohldefiniert, da $xue = xu(1su) = xusu = xu$.

Es ist $re \longmapsto rs \longmapsto rsu = r(1su) = re$, und es ist $x \longmapsto xu = xue \longmapsto xus = x$. Somit invertieren sich die Morphismen gegenseitig.

Ferner ist in der Tat $e^2 = (1su)(1su) = ((1su)1)su = 1susu = 1su = e$.

Aufgabe 23.

(1) Seien $e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$, $e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$ und $e_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$. Schreibe $P_1 = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}\\0\\0 \end{smallmatrix}\right) := Re_1$, $P_2 = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}\\\mathbf{Q}\\0 \end{smallmatrix}\right) := Re_2$ und $P_3 = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}\\\mathbf{Q}\\\mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) := Re_3$. Es ist $R = Re_1 \oplus Re_2 \oplus Re_3$, da die Summe dieser Teilmoduln R ergibt, und da $Re_i \cap (Re_j + Re_k) = 0$ für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Gegeben ein R-Modul M, so definieren wir sein Annullatorideal vermöge $\operatorname{Ann}_R M := \{r \in R \,:\, rm = 0 \text{ für alle } m \in M\}$. Ist $M \xrightarrow[\sim]{f} N$ ein Epimorphismus von R-Moduln, so folgt aus $r \in \operatorname{Ann}_R M$, daß $r(mf) = (rm)f = 0$ für alle $m \in M$, und also, wegen f surjektiv, $r \in \operatorname{Ann}_R N$, insgesamt also $\operatorname{Ann}_R M \subseteq \operatorname{Ann}_R N$. Folglich haben isomorphe R-Moduln dieselben Annullatorideale.

Das Annulatorideal von P_1 ist aber $\operatorname{Ann}_R P_1 = R(e_2 + e_3) = \left(\begin{smallmatrix} 0&\mathbf{Q}&\mathbf{Q}\\0&\mathbf{Q}&\mathbf{Q}\\0&0&\mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$, das Annulatorideal von P_2 ist $\operatorname{Ann}_R P_2 = Re_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&\mathbf{Q}\\0&0&\mathbf{Q}\\0&0&\mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$, und das Annulatorideal von P_3 ist $\operatorname{Ann}_R P_3 = 0$. Also sind P_1, P_2 und P_3 paarweise nichtisomorph.

> Die Nichtisomorphie hätte man auch mittels der unterschiedlichen $\mathbf{Q}$-Dimension sehen können. Die Annullatoridealmethode ist besser, da nichtisomorphe Moduln über einer $\mathbf{Q}$-Algebra manchmal dieselbe Dimension haben.

(2) Wir beschreiben zunächst einen allgemeinen R-Modul M. Als $\mathbf{Q}$-Vektorraum zerfällt M als $M = e_1M \oplus e_2M \oplus e_3M$. Der Ring R ist als $\mathbf{Q}$-Algebra erzeugt von e_1, e_2, e_3, $s_{1,2} := \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$ und $s_{2,3} := \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$.

Sei nun $M \xrightarrow{f} N$ eine R-lineare Abbildung. Diese ist durch drei Komponenten $e_1M \xrightarrow{f_1} e_1N$, $e_2M \xrightarrow{f_2} e_2N$ und $e_3M \xrightarrow{f_3} e_3N$ bestimmt, also $f = \left(\begin{smallmatrix} f_1&0&0\\0&f_2&0\\0&0&f_3 \end{smallmatrix}\right)$, wenn gesehen als $\mathbf{Q}$-lineare Abbildung. Dies folgt aus der Verträglichkeit von f mit e_1, e_2 und e_3.

Schreiben wir die Abbildung, die durch Linksmultiplikation mit $s_{1,2}$ von e_2M nach e_1M geht, als $s_{1,2;M}$ etc., so liefert das Tripel f_1, f_2, f_3 genau dann eine R-lineare Abbildung $M \longrightarrow N$, wenn

$$s_{1,2;M}f_1 \;=\; f_2 s_{1,2;N}\,, \qquad s_{2,3;M}f_2 \;=\; f_3 s_{2,3;N}\,,$$

wie aus der Tatsache folgt, daß $s_{1,2}$ und $s_{2,3}$ auf den jeweils anderen Komponenten von M wie Null operiert, und daraus, daß mit $s_{1,2}$ und $s_{2,3}$ nun alle $\mathbf{Q}$-Algebrenerzeuger berücksichtigt sind.

Eine R-lineare Abbildung von M nach N kann also dargestellt werden durch einen Morphismus in $[\![\Delta_2, \mathbf{Q}\text{-Mod}]\!]$, nämlich

$$\begin{tikzcd} e_3M \arrow[r, "s_{2,3;M}"] \arrow[d, "f_3"] & e_2M \arrow[r, "s_{1,2;M}"] \arrow[d, "f_2"] & e_1M \arrow[d, "f_1"] \\ e_3N \arrow[r, "s_{2,3;N}"] & e_2N \arrow[r, "s_{1,2;N}"] & e_1N\,. \end{tikzcd}$$

Somit erhalten wir einen Funktor

$$\begin{array}{rcl} R\text{-Mod} & \longrightarrow & [\![\Delta_2, \mathbf{Q}\text{-Mod}]\!] \\ M & \longmapsto & (e_3M \xrightarrow{s_{2,3;M}} e_2M \xrightarrow{s_{1,2;M}} e_1M) \\ f & \longmapsto & (f_1, f_2, f_3)\,, \end{array}$$

von dem wir eben geklärt haben, daß er voll ist (jedes mit $s_{1,2}$ und $s_{2,3}$ kommutierende Tripel (f_1, f_2, f_3) gibt einen Morphismus), und daß er treu ist (f läßt sich aus (f_1, f_2, f_3) rekonstruieren).

Er ist auch dicht, da jedes Diagramm $(V_3 \xrightarrow{t_{2,3}} V_2 \xrightarrow{t_{1,2}} V_1)$ in $\mathbf{Q}$-Mod via $M := V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ einen

R-Modul ergibt, wenn wir die Multiplikation mit e_1 als $\begin{pmatrix} 1_{V_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, die Multiplikation mit e_2 als $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{V_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, die die Multiplikation mit e_3 als $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{V_3} \end{pmatrix}$, die Multiplikation mit $s_{1,2}$ als $\begin{pmatrix} 0 & t_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und die Multiplikation mit $s_{2,3}$ als $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ definieren.

Nun sehen wir mit Linearer Algebra, daß $(\mathbf{Q} \xrightarrow{1} \mathbf{Q} \xrightarrow{1} \mathbf{Q})$, $(\mathbf{Q} \xrightarrow{1} \mathbf{Q} \longrightarrow 0)$ und $(\mathbf{Q} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0)$ injektiv sind. In der Tat ist z.B. ein Monomorphismus

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Q} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "f_3"] & \mathbf{Q} \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & 0 \arrow[d, "f_1"] \\ V_3 \arrow[r, "t_{2,3}"] & V_2 \arrow[r, "t_{1,2}"] & V_1 \end{tikzcd} ,$$

i.e. f_1, f_2 und f_3 injektiv, eine Coretraktion. Hierzu wähle man sich zu f_2 eine Retraktion, und ergänzt zu einer Retraktion in $[\![\Delta_2, \mathbf{Q}\text{-Mod}]\!]$.

Nach R-Mod zurückübersetzt, erhalten wir die Moduln $I_3 := P_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} * \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} := P_3/P_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $I_1 = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} := P_3/P_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es sind $\operatorname{Ann}_R I_3 = 0$, $\operatorname{Ann}_R I_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\operatorname{Ann}_R I_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, also sind I_1, I_2 und I_3 paarweise nichtisomorph.

Die Annullatormethode liefert nun auch $P_2 \not\simeq I_2$ und $P_1 \not\simeq I_1$, was aus einer Betrachtung der $\mathbf{Q}$-Dimension noch nicht folgt.

Ein R-Modul heiße *unzerlegbar,* wenn er nur triviale Summanden zuläßt. Es sind P_1, P_2 und P_3 alle unzerlegbaren projektiven R-Moduln, und I_1, I_2 und I_3 alle unzerlegbaren injektiven Moduln. Warum dem so ist, wollen wir hier nicht weiterverfolgen.

Es sind P_1, P_2 und P_3 schon aus $\mathbf{Q}$-Dimensionsgründen keine freien R-Moduln, wohl aber sind sie projektiv.

Gib drei paarweise nichtisomorphe Injektive von R von $\mathbf{Q}$-Dimension $\leqslant 3$ an.

(3) Die Injektiven wurden in (2) quasi schon projektiv aufgelöst. Wir unterschlagen hierzu die Nullobjekte an den unten indiziert negativen Positionen im Komplex. Ferner sollen die auftretenden Indizes nicht die Position im Komplex bezeichnen. Es werden

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{PRes}(I_3) & \simeq & (\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P_3) \\ \operatorname{PRes}(I_2) & \simeq & (\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_3) \\ \operatorname{PRes}(I_1) & \simeq & (\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_3) \, , \end{array}$$

die Isomorphismen in $\mathrm{K}^{-,0}(R\text{-Proj})$ zu lesen.

Lösen wir die Projektiven injektiv auf. Um sich dies herzuleiten, kann man auch $[\![\Delta_2, \mathbf{Q}\text{-Mod}]\!]$ heranziehen. Wir unterschlagen die Nullobjekte an den oben indiziert negativen Positionen im Komplex.

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{IRes}(P_3) & \simeq & (I_3 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots) \\ \operatorname{IRes}(P_2) & \simeq & (I_3 \longrightarrow I_1 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots) \\ \operatorname{IRes}(P_1) & \simeq & (I_3 \longrightarrow I_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots) \end{array}$$

Die Auflösungen haben also alle endlichen Träger. Das ist aber nicht immer der Fall, wie etwa das Beispiel $R = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ und $\operatorname{PRes}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ resp. $\operatorname{IRes}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ zeigt – beachte, daß in $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$-Mod der Modul $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ projektiv und injektiv ist.

Aufgabe 24. Mit Aufgabe 22.(1) ist P ein direkter Summand eines Moduls der Form $\coprod_I R$ für eine Indexmenge I, d.h. es gibt einen weiteren (dann ebenfalls projektiven) R-Rechtsmodul Q mit $P \oplus Q \simeq \coprod_I R$.

Da ein beliebiges Coprodukt von Epimorphismen in abelschen Gruppen epimorph ist, und da $R \otimes_R -$ isomorph zum exakten Vergißfunktor R-Mod $\longrightarrow$ $\mathbf{Z}$-Mod ist, genügt es also zu zeigen, daß $(\coprod_I R)\otimes_R M \simeq \coprod_I (R \otimes_R M)$, natürlich in M. Zeigen wir allgemeiner für ein Tupel $(X_i)_{i\in I}$ von R-Rechtsmoduln, daß

$$\begin{array}{ccccccc} (\coprod_I X_i) & \otimes_R & M & \xrightarrow{fM} & \coprod_I (X_i & \otimes_R & M) \\ (x_i)_i & \otimes & m & \longmapsto & (x_i & \otimes & m)_i \end{array}$$

ein Isomorphismus ist. Natürlichkeit in M, i.e. $(fM)(\coprod_I (X_i \otimes_R u)) = ((\coprod_I X_i) \otimes_R u)(fM')$ für eine R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{u} M'$ ist dann ersichtlich – auf beide Weisen resultiert $(x_i \otimes mu)_i$ als Bild von $(x_i)_i \otimes m$.

Es ist fM ein wohldefinierter Morphismus abelscher Gruppen, da zunächst in $(x_i \otimes m)_i$ alle bis auf endlich viele Einträge verschwinden, sofern dies für $(x_i)_i$ der Fall ist, und da dann noch $(x_i)_i r \otimes m = (x_i r)_i \otimes m$ und $(x_i)_i \otimes rm$ dasselbe Bild besitzen.

In die umgekehrte Richtung induzieren die Morphismen $X_i \otimes_R M \xrightarrow{\iota_i \otimes_R M} (\coprod_I X_i) \otimes_R M$ über die universelle Eigenschaft des Coproduktes einen Morphismus gM.

Um zu sehen, daß $(fM)(gM) = 1$, genügt es, dies auf einem $\mathbf{Z}$-linearen Erzeuger zu testen. Sei also $(x_j \partial_{j,i})_i \otimes m$ (Kronecker-Delta, leicht mißbräuchlich verwandt) gegeben, mit $j \in I$, $x_j \in X_j$ und $m \in M$. Es wird $(x_j \partial_{j,i})_i (fM)(gM) = ((x_j \otimes m)\partial_{j,i})_i (gM) = (x_j \otimes m)\iota_j (gM) = (x_j \partial_{j,i})_i$.

Um zu sehen, daß $gf = 1$, genügt es, $\iota_j gf = \iota_j$ zu zeigen für $j \in I$. Dies genügt es, auf einem $\mathbf{Z}$-linearen Erzeuger zu testen. Sei also $x_j \otimes m$ mit $x_j \in X_j$ und $m \in M$ gegeben. Es wird $(x_j \otimes m)\iota_j (gM)(fM) = (x_j \iota_j \otimes m)(fM) = ((x_j \otimes m)\partial_{j,i})_i = (x_j \otimes m)\iota_j$.

Ein Modul $M \in \operatorname{Ob} \text{Mod-}R$ mit $M \otimes_R -$ exakt heißt auch *flach.* Wir haben also gezeigt, daß projektive Moduln flach sind. Die Umkehrung gilt nicht - z.B. ist $\mathbf{Q}$ flach, aber nicht projektiv über $\mathbf{Z}$. So z.B. ist der Epimorphismus $X := \coprod_{i \geqslant 1} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Q}$, $e_i \longmapsto 1/i$, wobei e_i das i-te Standardbasiselement darstelle, keine Retraktion. Denn wäre f eine Coretraktion, so wäre $1f \neq 0$. Es gäbe also ein Element $m \geqslant 1$ mit $1f \notin mX$, im Widerspruch zu $1f = m((1/m)f) \in mX$.

Aufgabe 25.

(1) Schreibe $R := \mathbf{Z}/p^k$, und beachte, daß jedes Ideal in R von der Form $p^j R$ mit $j \in [0, k]$ ist.

Sei $Q := \mathbf{Z}/p^k$ (als R-Modul). Sei $Q \rightarrowtail X$ ein Monomorphismus in $(\mathbf{Z}/p^k)$-Mod, gelesen als Inklusion eines Teilmoduls. Wie in der Lösung zu Aufgabe 5.(3) definieren wir $\mathcal{F}$ und weisen nach, daß es zorngeordnet ist. Sei $(Y, Y \xrightarrow{g} Q)$ ein maximales Element in $\mathcal{F}$, sei also insbesondere $g|_Q = 1_Q$. Angenommen, es gäbe $x \in X \smallsetminus Y$.

Ist $Rx \cap Y = 0$, so ist die Summe $Rx + Y$ direkt; wir können also g zu $\binom{0}{g}$ fortsetzen und erhalten so einen Widerspruch zur Maximalität.

Ist $Rx \cap Y \neq 0$, so gibt es ein $j \in [1, k-1]$ mit $p^j R = \{r \in R \;:\; rx \in Y\}$, also $p^j Rx = Rx \cap Y$. Sei $q := (p^j x)g \in Q$.

Sei $m \geqslant 0$ minimal mit $p^m x = 0$. Dann ist $m \in [j+1, k-1]$, da X ein $(\mathbf{Z}/p^k)$-Modul ist, und da $p^j x \neq 0$.

Es ist $p^{m-j} q = (p^m x)g = 0$. Folglich ist $q \in p^{k-(m-j)} Q = p^{k-(m-j)}(\mathbf{Z}/p^k)$. Beachte $k - (m-j) \in [j+1, k-1]$. Somit gibt es ein $q' \in Q$ mit $p^j q' = q$.

Wir behaupten, daß

$$\begin{array}{ccc} Y + Rx & \xrightarrow{g'} & Q \\ y + rx & \longmapsto & yg + rq' \end{array}$$

für $y \in Y$ und $r \in R$ wohldefiniert ist, und dann auch R-linear. Das Argument aus der Lösung zu Aufgabe 5.(3) geht mit $a := p^j$ wörtlich durch. Insgesamt $(Y, g) < (Y + Rx, g')$ konstruiert, im Widerspruch zur Maximalität von (Y, g).

(2) Wir lösen injektiv auf. Das Hufeisenlemma liefert

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{Z}/16 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[u] & \mathbf{Z}/16 \oplus \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[u] & \mathbf{Z}/16 \arrow[u] \\
\mathbf{Z}/16 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[u, "4"] & \mathbf{Z}/16 \oplus \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix}4&0\\2&8\end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[u, "8"'] \\
\mathbf{Z}/16 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[u, "4"] & \mathbf{Z}/16 \oplus \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix}4&0\\-1&2\end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[u, "2"'] \\
\mathbf{Z}/16 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[u, "4"] & \mathbf{Z}/16 \oplus \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix}4&0\\2&8\end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[u, "8"'] \\
\mathbf{Z}/16 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[u, "4"] & \mathbf{Z}/16 \oplus \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix}4&0\\-1&2\end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[u, "2"'] \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, "2"] \arrow[u, "4"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "1"] \arrow[u, "(2\,8)"] & \mathbf{Z}/2 \arrow[u, "8"']
\end{tikzcd}$$

Abschneiden der unteren Zeile und Anwenden von $G = {}_{\mathbf{Z}/16}(\mathbf{Z}/4, -)$ ergibt

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[u] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[u] & \mathbf{Z}/4 \arrow[u] \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[u, "0"] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\2&0\end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[u, "0"'] \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[u, "0"] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\-1&2\end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[u, "2"'] \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[u, "0"] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\2&0\end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[u, "0"'] \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[u, "0"] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\-1&2\end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[u, "2"']
\end{tikzcd}$$

Homologienehmen resultiert in der folgenden lang exakten Sequenz der Rechtsabgeleiteten zu G.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \xrightarrow{2} & \mathbf{Z}/4 & \longrightarrow & \cdots & & \\
 & \xrightarrow{2} & \mathbf{Z}/4 & \xrightarrow{1} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z}/2 \\
 & \xrightarrow{2} & \mathbf{Z}/4 & \xrightarrow{1} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z}/2 \\
 & \xrightarrow{2} & \mathbf{Z}/4 & \xrightarrow{1} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z}/2 \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}/4 & \xrightarrow{1} & \mathbf{Z}/4 & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z}/2
\end{array}
$$

Für dieses Ergebnis spielt es übrigens keine Rolle, ob man in $(\mathbf{Z}/8)$-Mod rechnet wie angegeben, oder aber in $(\mathbf{Z}/4)$-Mod.

(3) Wir lösen projektiv auf. Das Hufeisenlemma liefert

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\mathbf{Z}/16 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "4"] & \mathbf{Z}/16 \oplus \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[d, "8"] \\
\mathbf{Z}/16 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "4"] & \mathbf{Z}/16 \oplus \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[d, "2"] \\
\mathbf{Z}/16 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "4"] & \mathbf{Z}/16 \oplus \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[d, "8"] \\
\mathbf{Z}/16 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "4"] & \mathbf{Z}/16 \oplus \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[d, "2"] \\
\mathbf{Z}/16 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "1"] & \mathbf{Z}/16 \oplus \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\binom{2}{1}"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[d, "1"] \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, "2"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "1"] & \mathbf{Z}/2
\end{tikzcd}
$$

Abschneiden der unteren Zeile und Anwenden von $H = {}_{\mathbf{Z}/16}(-, \mathbf{Z}/4)$ ergibt

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[u] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[l, "\binom{1}{0}"'] \arrow[u] & \mathbf{Z}/4 \arrow[l, "(0\,1)"'] \arrow[u] \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[u, "0"] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[l, "\binom{1}{0}"'] \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[l, "(0\,1)"'] \arrow[u, "0"] \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[u, "0"] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[l, "\binom{1}{0}"'] \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[l, "(0\,1)"'] \arrow[u, "2"] \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[u, "0"] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[l, "\binom{1}{0}"'] \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[l, "(0\,1)"'] \arrow[u, "0"] \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[u, "0"] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[l, "\binom{1}{0}"'] \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[l, "(0\,1)"'] \arrow[u, "2"]
\end{tikzcd}$$

Homologienehmen resultiert in der folgenden lang exakten Sequenz der Rechtsabgeleiteten zu H.

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots & \mathbf{Z}/2 \arrow[l] & \arrow[l, "1"'] \\
\mathbf{Z}/4 & \mathbf{Z}/2 \arrow[l, "2"'] & \mathbf{Z}/2 \arrow[l, "0"'] & \arrow[l, "1"'] \\
\mathbf{Z}/4 & \mathbf{Z}/2 \arrow[l, "2"'] & \mathbf{Z}/2 \arrow[l, "0"'] & \arrow[l, "1"'] \\
\mathbf{Z}/4 & \mathbf{Z}/2 \arrow[l, "2"'] & \mathbf{Z}/2 \arrow[l, "0"'] & \arrow[l, "1"'] \\
\mathbf{Z}/4 & \mathbf{Z}/4 \arrow[l, "2"'] & \mathbf{Z}/2 \arrow[l, "2"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Beachte, daß die untere Zeile gerade das Bild unserer kurz exakten Sequenz unter H darstellt.

Aufgabe 26.

(1) Die Aussage ist richtig. Denn als injektive Auflösung dürfen wir $\mathrm{Konz}(I)$ verwenden. Darauf F angewandt, erhalten wir $\mathrm{Konz}(FI)$. Darauf wiederum H^i angewandt ergibt für $i \geqslant 1$ jeweils ein Nullobjekt. Also ist $\mathrm{R}^i FI = 0$ für $i \geqslant 1$.

(2) Die Aussage ist falsch. Seien etwa $R = S = T := \mathbf{Z}/16$. Seien $F := {}_{\mathbf{Z}/8}(\mathbf{Z}/8, -)$ und $G := {}_{\mathbf{Z}/16}(\mathbf{Z}/4, -)$. Seien $i = j := 1$.
Es ist

$$\mathbf{Z}/16 \xrightarrow{4} \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{4} \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{4} \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{4} \cdots$$

eine injektive Auflösung von $\mathbf{Z}/4$. Anwenden von F liefert den Komplex

$$\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{4} \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{4} \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{4} \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{4} \cdots$$

Zunächst liefert nun Anwenden von G auf diesen Komplex den Komplex

$$\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/4 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/4 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/4 \xrightarrow{0} \cdots$$

und also $(\mathrm{R}^{1+1}(G\circ F))(\mathbf{Z}/4)\simeq\mathbf{Z}/4$.
Nun entnehmen wir zunächst $(\mathrm{R}^1F)(\mathbf{Z}/4)\simeq\mathbf{Z}/2$ aus vorstehendem Komplex. Nun ist

$$\mathbf{Z}/16\xrightarrow{2}\mathbf{Z}/16\xrightarrow{8}\mathbf{Z}/16\xrightarrow{2}\mathbf{Z}/16\xrightarrow{8}\cdots$$

eine injektive Auflösung von $\mathbf{Z}/2$. Anwenden von G liefert den Komplex

$$\mathbf{Z}/4\xrightarrow{2}\mathbf{Z}/4\xrightarrow{0}\mathbf{Z}/4\xrightarrow{2}\mathbf{Z}/4\xrightarrow{0}\cdots,$$

und mithin $((\mathrm{R}^1G)\circ(\mathrm{R}^1F))(\mathbf{Z}/4)\simeq(\mathrm{R}^1G)(\mathbf{Z}/2)\simeq\mathbf{Z}/2$.
Insgesamt ist also $((\mathrm{R}^1G)\circ(\mathrm{R}^1F))(\mathbf{Z}/4)\simeq\mathbf{Z}/2\not\simeq\mathbf{Z}/4\simeq(\mathrm{R}^{1+1}(G\circ F))(\mathbf{Z}/4)$, und daher

$$(\mathrm{R}^1G)\circ(\mathrm{R}^1F)\;\not\simeq\;\mathrm{R}^{1+1}(G\circ F)\,.$$

Wie dieser Defekt "repariert" werden kann, kann man dem Vorwort zu Verdiers Dissertation entnehmen (Astérisque 239, S. 6; vgl. auch das Vorwort zu Hartshorne, SLN 20; oder "Catégories dérivées et dualité, travaux de J.-L. Verdier", L. Illusie, Enseign. Math. 36, S. 376, 1990).

(3) Die Aussage ist falsch. Der Lösung zur Aufgabe 24.(2) entnimmt man, in den dortigen Bezeichnungen, daß zwar G linksexakt ist, daß aber R^1G die kurz exakte Sequenz $\mathbf{Z}/4\xrightarrow{2}\mathbf{Z}/8\xrightarrow{1}\mathbf{Z}/2$ auf die Sequenz $\mathbf{Z}/4\xrightarrow{1}\mathbf{Z}/2\xrightarrow{0}\mathbf{Z}/2$ abbildet, die zwar in der Mitte exakt ist, aber links keinen Monomorphismus stehen hat (und rechts keinen Epimorphismus.)

(4) Die Aussage ist falsch. Sei etwa $R=S:=\mathbf{Z}/4$, und sei $F:=\mathbf{Z}/2\otimes_{\mathbf{Z}/4}-$. Es ist F rechtsexakt. Berechnen wir $(\mathrm{R}^iF)(\mathbf{Z}/2)$. Es ist

$$\mathbf{Z}/4\xrightarrow{2}\mathbf{Z}/4\xrightarrow{2}\mathbf{Z}/4\xrightarrow{2}\cdots$$

eine injektive Auflösung von $\mathbf{Z}/2$. Anwendung von F liefert den Komplex

$$\mathbf{Z}/2\xrightarrow{0}\mathbf{Z}/2\xrightarrow{0}\mathbf{Z}/2\xrightarrow{0}\cdots$$

Somit ist $(\mathrm{R}^iF)(\mathbf{Z}/2)\simeq\mathbf{Z}/2$ für alle $i>0$. Die behauptete Aussage ist also sogar für kein $i>0$ zutreffend.

Da aber i.a. $\mathrm{R}^0F\not\simeq F$ für F nicht linksexakt, finden die Rechtsabgeleiteten eines nicht linksexakten Funktors meines Wissens keine Anwendung.
Als duales Beispiel hierfür, sogar mit $\mathrm{L}_0F\simeq 0$, wohingegen F linksexakt und nicht isomorph zu 0 ist, kann man ${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,-):\mathbf{Z}\text{-Mod}\longrightarrow\mathbf{Z}\text{-Mod}$ heranziehen. Läßt man ${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,-)$ eintragsweise auf eine projektive Auflösung einer abelschen Gruppe los, so erhält man den Nullkomplex, da projektive Moduln als Summanden freier Moduln torsionsfrei sind.

Aufgabe 27. Sei R ein Ring. Seien $X,Y\in\operatorname{Ob}R\text{-Mod}$. Sei $F:={}_R(-,X):R\text{-Mod}\longrightarrow\mathbf{Z}\text{-Mod}$. Sei $P:=\mathrm{PRes}Y$.

Wir wollen eine Abbildung Φ von R^1FX nach $\mathrm{ext}^1_R(Y,X)$ konstruieren. Sei dazu $P^1\xrightarrow{z}X$ mit $dz=0$ ein Repräsentant in $\mathrm{Z}^1({}_R(P,X))$ eines Elements von $\mathrm{R}^1FX=\mathrm{H}^1({}_R(P,X))$. Da P exakt bei P_1 ist, ist $P_1\twoheadrightarrow\mathrm{B}_0P$ Cokern von $P_2\xrightarrow{d}P_1$. Da nun $(P_2\xrightarrow{d}P_1\xrightarrow{z}X)=0$, gibt es ein eindeutiges $\mathrm{B}_0P\xrightarrow{z'}X$ mit

$$(P_1\xrightarrow{d}\mathrm{B}_0P\xrightarrow{z'}X)\;=\;(P_1\xrightarrow{z}X)\,.$$

Wir konstruieren nun mithilfe Aufgabe 18.(1,2,3,5) den folgenden Morphismus kurz exakter Sequenzen.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}_0P \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "z'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & P_0 \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d] & Y \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail] & E' \arrow[r, two heads] & Y
\end{tikzcd}$$

wobei wir für E' die Standardkonstruktion des Pushouts verwenden, und wobei der Cokern $E' \twoheadrightarrow Y$ der unteren Sequenz wegen der universellen Eigenschaft des Pushouts auch eindeutig bestimmt ist.

sich als Standardcokern von $X \longrightarrow E'$, komponiert mit dem Inversen des dann eindeutig induzierten Isomorphismus von Y in diesen Cokern, ergibt.

Wir müssen zeigen, daß für einen alternativ gewählten Repräsentanten derselben Homologieklasse die resultierende kurz exakte Sequenz äquivalent zur eben konstruierten ist. Sei also $P_0 \xrightarrow{h} X$ eine R-lineare Abbildung, und sei $z'' := z' + ih$. Sei E'' der mittels z'' anstelle von z' konstruierte Pushout.

Nun ist $E' = P_0 \oplus X/\operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} z' & i \end{smallmatrix}\right)$, mit den Abbildungen $X \rightarrowtail E'$, $x \longmapsto (x,0) + \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} z' & i \end{smallmatrix}\right)$ und $P_0 \longrightarrow E'$, $w \longmapsto (0,w) + \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} z' & i \end{smallmatrix}\right)$.

Genauso ist $E'' = P_0 \oplus X/\operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} z'+ih & i \end{smallmatrix}\right)$, mit den Abbildungen $X \rightarrowtail E'$, $x \longmapsto (x,0) + \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} z'+ih & i \end{smallmatrix}\right)$ und $P_0 \longrightarrow E'$, $w \longmapsto (0,w) + \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} z'+ih & i \end{smallmatrix}\right)$.

Setze nun

$$\begin{array}{rcl} E' & \xrightarrow{f} & E'' \\ (x,w) + \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} z' & i \end{smallmatrix}\right) & \longmapsto & (x+wh, w) + \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} z'+ih & i \end{smallmatrix}\right) \end{array}$$

Da für $b \in \mathrm{B}_0 P$ gilt, daß mit $(bz', bi) \in \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} z' & i \end{smallmatrix}\right)$ auch $(bz' + bih, bi) \in \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} z'+ih & i \end{smallmatrix}\right)$ liegt, ist die Abbildung wohldefiniert.

Mit vertauschten Rollen von z' und z'' erhalten wir in der anderen Richtung

$$\begin{array}{rcl} E'' & \xrightarrow{g} & E'' \\ (x,w) + \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} z'+ih & i \end{smallmatrix}\right) & \longmapsto & (x-wh, w) + \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} z'+ih & i \end{smallmatrix}\right) \end{array} ,$$

und es sind $fg = 1$ und $gf = 1$. Ferner gelten die eingangs verlangten Kommutativitäten. Für das Bild eines $x \in X$ ist das ersichtlich. Ein $w \in P_0$ wird auf $(0,w) + \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} z' & i \end{smallmatrix}\right)$ und weiter mit f auf $(wh, w) + \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} z'+ih & i \end{smallmatrix}\right)$ abgebildet.

Wir behaupten, daß $(E' \xrightarrow[\sim]{f} E'' \twoheadrightarrow Y) = (E' \twoheadrightarrow Y)$. Vorschalten von $X \longrightarrow E'$ gibt auf beiden Seiten 0, wie man anhand eines Elementes $x \in X$ testet. Bleibt mit der universellen Eigenschaft des Pushouts zu zeigen, daß auch Vorschalten von $P_0 \longrightarrow E'$ auf beiden Seiten dasselbe Resultat hervorbringt. Wir testen dies elementweise. Sei $w \in P_0$. Auf der linken Seite bilden wir w nach $(0,w) + \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} z' & i \end{smallmatrix}\right)$, dann weiter nach $(wh, w) + \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} z'+ih & i \end{smallmatrix}\right)$, und schließlich nach wp. Auf der rechten Seite bilden wir w nach $(0,w) + \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} z'+ih & i \end{smallmatrix}\right)$ ab.

Können wir zeigen, daß es einen Isomorphismus $E' \xrightarrow{\sim} E''$ mit $(P_0 \longrightarrow E' \xrightarrow{\sim} E'') = (P_0 \longrightarrow E'')$ und $(X \rightarrowtail E' \xrightarrow{\sim} E'') = (X \rightarrowtail E'')$ gibt, so gilt auch für die jeweiligen Induzierten, daß $(E' \xrightarrow{\sim} E'' \twoheadrightarrow Y) = (E' \twoheadrightarrow Y)$. In der Tat ist letztere Gleichung nach Vorschalten von $X \rightarrowtail E'$ und $P_0 \longrightarrow E'$ gültig, und trifft somit mit der universellen Eigenschaft des Pushouts auch selbst zu.

Nun zur Definition einer Abbildung $\tilde{\Phi}$ von $\operatorname{ext}^1_R(Y,X)$ nach $\mathrm{R}^1 FX$. Sei eine kurz exakte Sequenz $X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow Y$ gegeben. Mittels Projektivität von P_0 und Epimorphie von $E \twoheadrightarrow Y$ finden wir ein $P_0 \longrightarrow E$ mit $(P_0 \longrightarrow E \twoheadrightarrow Y) = (P_0 \twoheadrightarrow Y)$. Die universelle Eigenschaft der Kerne induziert einen Morphismus $\mathrm{B}_0 P \xrightarrow{z'} X$, und der gesuchte Zykel ist dann gegeben durch $(P_1 \twoheadrightarrow \mathrm{B}_0 P \xrightarrow{z'} X)$.

Wir müssen die Unabhängigkeit von der Wahl von $P_0 \longrightarrow E$ einsehen. Die Differenz zweier solcher Wahlen komponiert mit $E \twoheadrightarrow Y$ zu 0, faktorisiert also über einen Morphismus $P_0 \xrightarrow{h} X$. Es stellt $(\mathrm{B}_0 P \rightarrowtail P_0 \xrightarrow{h} X)$ die Differenz der auf den Kernen induzierten Morphismen $\mathrm{B}_0 P \rightrightarrows X$ dar, da sich nach Komposition mit dem Monomorphismus $X \rightarrowtail E$ eine Gleichheit ergibt. Somit ist die Differenz der resultierenden Zyklen ein berandender Zyklus.

Wir müssen die Unabhängigkeit von der Wahl der repräsentierenden kurz exakten Sequenz einsehen. Verwendet man einen anderen Repräsentanten $X \rightarrowtail E' \twoheadrightarrow Y$, so kann man die Wahl von $P_0 \longrightarrow E$

mit $E \xrightarrow{\sim} E'$ aus dem dann ja gegebenen Diagrammisomorphismus mit Identitäten auf X und auf Y komponieren. Man erhält durch diese Wahl von $P \longrightarrow E'$ denselben Induzierten $\mathrm{B}_0 \longrightarrow X$ für die zweite wie für die erste repräsentierende kurz exakte Sequenz.

Für $\Phi\tilde{\Phi} = 1$ ist nur zu bemerken, daß das bei der Konstruktion von Φ verwandte Diagramm zur Berechnung des Bildes unter $\tilde{\Phi}$ der unter Φ entstandenen kurz exakten Sequenz verwandt werden kann, um die Wahl von $P_0 \longrightarrow E$ zu treffen, und so zum ursprünglichen Zykel zurückzukommen.

Für $\tilde{\Phi}\Phi = 1$ müssen wir zwei Dinge einsehen. Zum einen, daß bei der für $\tilde{\Phi}$ benötigten Konstruktion $(\mathrm{B}_0 P, P_0, X, E)$ in der Tat ein Pushout ist; zum zweiten, daß das Bild unter Φ nicht von der Wahl des Pushoutes abhängt.

Zu ersterem. Sei allgemein ein Morphismus kurz exakter Sequenzen

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, rightarrowtail, "i"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r, twoheadrightarrow, "p"] \arrow[d, "f"'] & M'' \arrow[d, equal] \\ N' \arrow[r, rightarrowtail, "j"] & N \arrow[r, twoheadrightarrow, "q"] & M'' \end{tikzcd}$$

in R-Mod gegeben. Seien $M \xrightarrow{u} T$ und $N' \xrightarrow{v} T$ mit $iu = f'v$ gegeben.

Wir behaupten zunächst, daß $M \oplus N' \xrightarrow{\binom{f}{j}} N$ epimorph ist. Das zeigt die Eindeutigkeit, wenn auch noch nicht die Existenz des Induzierten. Sei $n \in N$. Sei $m \in M$ mit $mp = nq$. Wegen $(n - mf)q = 0$ gibt es ein $n' \in N'$ mit $n'j = n - mf$.

Bleibt zu zeigen, daß

$$\begin{array}{rcl} N & \longrightarrow & T \\ n'j + mf & \longmapsto & n'v + mu \end{array}$$

wohldefiniert ist, denn die R-Linearität folgt dann leicht.

Betrachten wir eine Differenz. Sei also $n'j + mf = 0$. Zu zeigen ist, daß $n'v + mu = 0$. In der Tat folgt aus $mp = mfq = -n'jq = 0$, daß es ein $m' \in M'$ mit $m'i = m$ gibt. Es ist $m'f'j = m'if = mf = -n'j$, also $m'f = -n'$. Insgesamt wird $n'v + mu = -m'fv + m'iu = 0$.

Zu zweiterem. Seien E' und E'' zwei Pushouts. Dann gibt es einen Isomorphismus $E' \xrightarrow{\sim} E''$ mit $(P_0 \longrightarrow E' \xrightarrow{\sim} E'') = (P_0 \longrightarrow E'')$ und mit $(X \longrightarrow E' \xrightarrow{\sim} E'') = (X \longrightarrow E'')$. Vorschalten von $P_0 \longrightarrow E'$ und von $X \longrightarrow E'$ zeigt, daß auch $(E' \xrightarrow{\sim} E'' \longrightarrow Y) = (E' \longrightarrow Y)$. Somit sind die resultierenden kurz exakten Sequenzen äquivalent.

Das Korollar aus §1.6.2.4 gibt uns die Interpretation $\mathrm{R}^1 FX \simeq \mathrm{Ext}^1_R(Y, X)$. Wir haben also eine Bijektion $\mathrm{Ext}^1_R(Y, X) \underset{\sim}{\xrightarrow{\Phi}} \mathrm{ext}^1_R(Y, X)$ erstellt. Da $\mathrm{Ext}^1_R(Y, X)$ eine abelsche Gruppe ist, kann auf $\mathrm{ext}^1_R(Y, X)$ mittels Strukturtransport via Φ ebenfalls die Struktur einer abelschen Gruppe definiert werden. Dies läuft auf die sogenannte Baersumme hinaus.

Aufgabe 28.

(1) (i) Wir lösen jeweils in erster Variablen auf.

Wir lösen $\mathbf{Z}/p^l$ projektiv auf und erhalten $\mathrm{PRes}(\mathbf{Z}/p^l) \simeq (\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{p^l} \mathbf{Z})$ in $\mathrm{K}(\mathbf{Z}\text{-Mod})$.

Anwenden von ${}_{\mathbf{Z}}(-, \mathbf{Z}/p^m)$ gibt $(\cdots \longleftarrow 0 \longleftarrow \mathbf{Z}/p^m \xleftarrow{p^l} \mathbf{Z}/p^m)$.
Wir erhalten also $\mathrm{Ext}^k_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \simeq 0$ für $k \geqslant 2$, und

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \;\simeq\; \begin{cases} \mathbf{Z}/p^m & \text{für } l \geqslant m \\ \mathbf{Z}/p^l & \text{für } l \leqslant m\,, \end{cases}$$

für $k \in \{0,1\}$, wobei $\mathrm{Ext}^0_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \simeq \mathbf{Z}/p^l \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/p^m$.

Anwenden von $- \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/p^m$ gibt $(\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{Z}/p^m \xrightarrow{p^l} \mathbf{Z}/p^m)$. Also erhalten wir $\mathrm{Tor}^{\mathbf{Z}}_k(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \simeq 0$ für $k \geqslant 2$, und

$$\mathrm{Tor}^{\mathbf{Z}}_k(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \;\simeq\; \begin{cases} \mathbf{Z}/p^m & \text{für } l \geqslant m \\ \mathbf{Z}/p^l & \text{für } l \leqslant m \end{cases}$$

für $k \in \{0,1\}$, wobei $\mathrm{Tor}^{\mathbf{Z}}_0(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \simeq \mathbf{Z}/p^l \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/p^m$.

(ii) Wir lösen jeweils in zweiter Variablen auf.

Wir lösen $\mathbf{Z}/p^m$ injektiv auf und erhalten $\mathrm{IRes}(\mathbf{Z}/p^m) \simeq (\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{p^m} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots)$ in $\mathrm{K}(\mathbf{Z}\text{-Mod})$ Anwenden von ${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p^l, =)$ gibt $(\mathbf{Z}/p^l \xrightarrow{p^m} \mathbf{Z}/p^l \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots)$. Wir erhalten also $\mathrm{Ext}^k_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \simeq 0$ für $k \geqslant 2$, und ferner

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \;\simeq\; \begin{cases} \mathbf{Z}/p^l & \text{für } m \geqslant l \\ \mathbf{Z}/p^m & \text{für } m \leqslant l\,, \end{cases}$$

für $k \in \{0,1\}$.

Für die Torsionsgruppen lösen wir $\mathbf{Z}/p^m$ projektiv auf und erhalten $\mathrm{PRes}(\mathbf{Z}/p^m) \simeq (\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{p^m} \mathbf{Z})$ in $\mathrm{K}(\mathbf{Z}\text{-Mod})$.

Anwenden von $\mathbf{Z}/p^l \otimes_{\mathbf{Z}} =$ gibt $(\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{Z}/p^l \xrightarrow{p^m} \mathbf{Z}/p^l)$. Also erhalten wir $\mathrm{Tor}^{\mathbf{Z}}_k(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \simeq 0$ für $k \geqslant 2$, und

$$\mathrm{Tor}^{\mathbf{Z}}_k(\mathbf{Z}/p^l, \mathbf{Z}/p^m) \;\simeq\; \begin{cases} \mathbf{Z}/p^l & \text{für } m \geqslant l \\ \mathbf{Z}/p^m & \text{für } m \leqslant l \end{cases}$$

für $k \in \{0,1\}$.

(iii) Nun wollen wir direkt die Definition verwenden, und die Erweiterungs- und Torsionsgruppen über einen Doppelkomplex berechnen.

Einsetzen der projektiven Auflösung von $\mathbf{Z}/p^l$ aus (i) in die erste, und der injektiven Auflösung von $\mathbf{Z}/p^m$ aus (ii) in die zweite Variable von ${}_{\mathbf{Z}}(-,=)$ gibt den Doppelkomplex

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \arrow[u] \arrow[r, "p^m"] & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \arrow[u, "p^l"] \arrow[r, "p^m"] & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \arrow[u, "p^l"] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

in $\mathrm{Ob}\,\mathrm{CC}^{\llcorner}(\mathbf{Z}\text{-Mod})$. Sein Totalkomplex in $\mathrm{Ob}\,\mathrm{C}^+(\mathbf{Z}\text{-Mod})$ ergibt sich zu

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{(p^m\ p^l)} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} p^l \\ -p^m \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Das zweite Differential ist epimorph, also verschwinden alle Homologiegruppen ab der zweiten. Die nullte Homologiegruppe ergibt sich zu $\mathbf{Z}/p^l$ für $l \leqslant m$, und zu $\mathbf{Z}/p^m$ für $m \leqslant l$.

Falls $m \geqslant l$, dann errechnet sich der Kern des zweiten Differentials zu

$$\mathbf{Z}/p^l \oplus \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} p^{-l} & 0 \\ p^{m-l} & 1 \end{pmatrix}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\ ,$$

worüber das erste Differential vermöge $\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{(\,0\ p^l\,)} \mathbf{Z}/p^l \oplus \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ faktorisiert. Es ergibt sich die erste Homologiegruppe $\mathbf{Z}/p^l$.

Falls $l \geqslant m$, dann errechnet sich der Kern des zweiten Differentials zu

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p^m \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & p^{l-m} \\ 0 & p^{-m} \end{pmatrix}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\ ,$$

worüber das erste Differential vermöge $\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{(\,p^m\ 0\,)} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p^m$ faktorisiert. Es ergibt sich die erste Homologiegruppe $\mathbf{Z}/p^m$.

Einsetzen der projektiven Auflösung von $\mathbf{Z}/p^l$ aus (i) in die erste, und der projektiven Auflösung von $\mathbf{Z}/p^m$ aus (ii) in die zweite Variable von ${}_{\mathbf{Z}}(-,=)$ gibt den Doppelkomplex

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
\mathbf{Z} \arrow[d, "p^l"'] & \mathbf{Z} \arrow[l, "p^m"'] \arrow[d, "p^l"'] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
\mathbf{Z} & \mathbf{Z} \arrow[l, "p^m"'] & 0 \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Sein Totalkomplex ergibt sich zu

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{(\,-p^m\ -p^l\,)} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -p^l \\ p^m \end{pmatrix}} \mathbf{Z}$$

Da das zweite Differential (von rechts gesehen) monomorph ist, verschwinden alle Torsionsgruppen ab der zweiten.

Die nullte Homologiegruppe ergibt sich zu $\mathbf{Z}/p^l$, falls $l \leqslant m$, und zu $\mathbf{Z}/p^m$, falls $m \leqslant l$.

Der Kern des ersten Differentials ergibt sich zu $\mathbf{Z} \xrightarrow{(\,p^{m-l}\ 1\,)} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, falls $l \leqslant m$, und zu $\mathbf{Z} \xrightarrow{(\,1\ p^{l-m}\,)} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, falls $m \leqslant l$.

Im ersten Fall faktorisiert das zweite Differential über diesen Kern via $\mathbf{Z} \xrightarrow{-p^l} \mathbf{Z}$, im zweiten Fall via $\mathbf{Z} \xrightarrow{-p^m} \mathbf{Z}$.

Die erste Homologiegruppe ergibt sich also zu $\mathbf{Z}/p^l$, falls $l \leqslant m$, und zu $\mathbf{Z}/p^m$, falls $m \leqslant l$.

Dies stimmt mit der Berechnung der Torsionsgruppen in (i) und (ii) überein.

(2) (i) Wir lösen jeweils in zweiter Variablen auf.

Als injektive Auflösung von $\mathbf{Z}/p$ diene uns

$$\mathbf{Z}/p^3 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^3 \xrightarrow{p^2} \mathbf{Z}/p^3 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^3 \longrightarrow \cdots$$

(vgl. Aufgabe 25.(1)). Anwenden von ${}_{\mathbf{Z}/p^3}(\mathbf{Z}/p^2,=)$ liefert

$$\mathbf{Z}/p^2 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^2 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/p^2 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^2 \longrightarrow \cdots\ ,$$

und so insbesondere
$$\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}/p^3}(\mathbf{Z}/p^2, \mathbf{Z}/p) \;\simeq\; \mathbf{Z}/p\,.$$
Als projektive Auflösung von $\mathbf{Z}/p$ können wir
$$\cdots \longrightarrow \mathbf{Z}/p^3 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^3 \xrightarrow{p^2} \mathbf{Z}/p^3 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^3$$
verwenden. Anwenden von $\mathbf{Z}/p^2 \otimes_{\mathbf{Z}/p^3} =$ gibt
$$\cdots \longrightarrow \mathbf{Z}/p^2 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^2 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/p^2 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^2$$
und so insbesondere
$$\mathrm{Tor}_2^{\mathbf{Z}/p^3}(\mathbf{Z}/p^2, \mathbf{Z}/p) \;\simeq\; \mathbf{Z}/p\,.$$
Diese beiden Gruppen verschwinden über dem Grundring $\mathbf{Z}$, wie in (1) gesehen.

Der Übergang von einem Grundring zu einem Quotienten dieses Grundrings ist also i.a. nicht durch entsprechende Quotientenbildung von Erweiterungs- resp. Torsionsgruppe zu erreichen.

(ii) Wir lösen jeweils in erster Variablen auf.
Anwenden von ${}_{\mathbf{Z}/p^3}(-, \mathbf{Z}/p)$ auf die projektive Auflösung
$$\cdots \longrightarrow \mathbf{Z}/p^3 \xrightarrow{p^2} \mathbf{Z}/p^3 \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/p^3 \xrightarrow{p^2} \mathbf{Z}/p^3$$
von $\mathbf{Z}/p^2$ gibt
$$\cdots \longleftarrow \mathbf{Z}/p \xleftarrow{0} \mathbf{Z}/p \xleftarrow{0} \mathbf{Z}/p \xleftarrow{0} \mathbf{Z}/p\,,$$
und so erneut
$$\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}/p^3}(\mathbf{Z}/p^2, \mathbf{Z}/p) \;\simeq\; \mathbf{Z}/p\,.$$
Anwenden von $- \otimes_{\mathbf{Z}/p^3} \mathbf{Z}/p$ auf die eben angeführte projektive Auflösung von $\mathbf{Z}/p^2$ gibt
$$\cdots \longrightarrow \mathbf{Z}/p \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/p \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/p \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/p$$
und so erneut
$$\mathrm{Tor}_2^{\mathbf{Z}/p^3}(\mathbf{Z}/p^2, \mathbf{Z}/p) \;\simeq\; \mathbf{Z}/p\,.$$

Aufgabe 29. Es ist eine R-Algebra $A = (A, \varphi)$ gegeben. In der Regel schreibt man $ra := \varphi(r)a$ für $r \in R$ und $a \in A$.

(i) Betrachten wir die Erweiterungsgruppen.
Wir wollen auf ${}_A(X, Y)$ eine R-Modulstruktur erklären. Für $h \in {}_A(X, Y)$ und $r \in R$ sei rh erklärt durch $x(rh) := r(xh) = (rx)h$.

In anderen Worten, man verwendet die R-Rechtsmodulstruktur auf X, um ${}_A(X, Y)$ zu einem R-Linksmodul zu machen, oder wahlweise die R-Rechtsmodulstruktur auf Y, um ${}_A(X, Y)$ zu einem R-Rechtsmodul und also einem R-Linksmodul zu machen; alles unter starker Benutzung dessen, daß R kommutativ ist.

Seien A-lineare Abbildungen $X' \xrightarrow{f} X$ und $Y \xrightarrow{g} Y'$ gegeben. Die induzierte Abbildung ${}_A(X, Y) \xrightarrow{f(-)g} {}_A(X', Y')$ ist R-linear. So erhalten wir einen biadditiven Funktor ${}_A(-, =)$ mit Werten in R-Mod.

Komponiert mit dem exakten Vergißfunktor $R\text{-Mod} \overset{V}{\hookrightarrow} \mathbf{Z}\text{-Mod}$ erhalten wir den biadditiven Funktor, dessen rechtsabgeleitete Funktoren per Definition die Erweiterungsgruppen darstellen. Sei $i \geqslant 0$. Da V exakt ist, ist $V \circ \mathrm{H}^i = \mathrm{H}^i \circ \mathrm{K}(V)$. In anderen Worten, der i-te Rechtsabgeleitete des biadditiven Funktors ${}_A(-, =)$ mit Werten in R-Mod ergibt nach Komposition mit V den Funktor $\mathrm{Ext}^i_A(-, =)$, wie verlangt. Unter Mißbrauch der Notation schreiben wir für den vorgenannten Rechtsabgeleiteten mit Werten in R-Mod ebenfalls $\mathrm{Ext}^i_A(-, =)$.

(ii) Betrachten wir die Torsionsgruppen.

Wir wollen auf $X \otimes_A Y$ eine R-Modulstruktur erklären. Für $r \in R$, $x \in X$ und $y \in Y$ sei $r(x \otimes y) := (xr) \otimes y = x \otimes (ry)$.

In anderen Worten, man verwendet die R-Linksmodulstruktur auf X, um $X \otimes Y$ zu einem R-Linksmodul zu machen, oder wahlweise die R-Rechtsmodulstruktur auf Y, um $X \otimes_A Y$ zu einem R-Rechtsmodul und also einem R-Linksmodul zu machen; alles unter starker Benutzung dessen, daß R kommutativ ist.

Seien A-lineare Abbildungen $X \xrightarrow{f} X'$ und $Y \xrightarrow{g} Y'$ gegeben. Die induzierte Abbildung $X \otimes_A Y \xrightarrow{f \otimes_A g} X' \otimes_A Y'$ ist R-linear. So erhalten wir einen biadditiven Funktor $- \otimes_A =$ mit Werten in R-Mod.

Komponiert mit dem exakten Vergißfunktor $R\text{-Mod} \xhookrightarrow{V} \mathbf{Z}\text{-Mod}$ erhalten wir den biadditiven Funktor, dessen linksabgeleitete Funktoren per Definition die Torsionsgruppen darstellen. Sei $i \geqslant 0$. Da V exakt ist, ist $V \circ \mathrm{H}_i = \mathrm{H}_i \circ \mathrm{K}(V)$. In anderen Worten, der i-te Linksabgeleitete des biadditiven Funktors $- \otimes_A =$ mit Werten in R-Mod ergibt nach Komposition mit V den Funktor $\mathrm{Tor}^i_A(-,=)$, wie verlangt. Unter Mißbrauch der Notation schreiben wir für den vorgenannten Linksabgeleiteten mit Werten in R-Mod ebenfalls $\mathrm{Tor}_i^A(-,=)$.

Aufgabe 30. Da $I_3 = P_3$ bijektiv ist, werden

$$\begin{array}{rcccccl} \dim_{\mathbf{Q}} \mathrm{Ext}^k_R(I_1, P_3) & = & \dim_{\mathbf{Q}} \mathrm{Ext}^k_R(I_2, P_3) & = & \dim_{\mathbf{Q}} \mathrm{Ext}^k_R(I_3, P_3) & & \\ & = & \dim_{\mathbf{Q}} \mathrm{Ext}^k_R(I_3, P_2) & = & \dim_{\mathbf{Q}} \mathrm{Ext}^k_R(I_3, P_1) & = & 0 \;. \end{array}$$

In der Tat verschwindet eine Erweiterungsgruppe, sobald in erster Variablen ein projektiver, oder aber in zweiter Variablen ein injektiver Modul steht (vgl. Aufgabe 26.(1)).

Berechnen wir $\mathrm{Ext}^k_R(I_1, P_1)$. Eine injektive Auflösung von P_1 ist nach Aufgabe 23.(3) gegeben durch $I_3 \twoheadrightarrow I_2$ (um Nullen ergänzt). Die Diagramminterpretation aus Aufgabe 23.(2) zeigt, daß Anwenden von $(I_1, =)$ den Komplex

$$0 \longrightarrow 0 \;,$$

und also $\dim_{\mathbf{Q}} \mathrm{Ext}^k_R(I_1, P_1) = 0$ für alle $k \geqslant 0$

Berechnen wir $\mathrm{Ext}^k_R(I_1, P_2)$. Eine projektive Auflösung von I_1 ist nach Aufgabe 23.(3) gegeben durch $P_2 \rightarrowtail P_3$. Anwenden von $(-, P_2)$ gibt den Komplex

$$\mathbf{Q} \longleftarrow 0 \;,$$

und also $\dim \mathrm{Ext}^k_R(I_1, P_2) = 0$ für $k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, und $\dim \mathrm{Ext}^1_R(I_1, P_2) = 1$.

Berechnen wir $\mathrm{Ext}^k_R(I_2, P_1)$. Eine injektive Auflösung von P_1 ist nach Aufgabe 23.(3) gegeben durch $I_3 \twoheadrightarrow I_2$. Anwenden von $(I_2, -)$ gibt den Komplex

$$0 \longrightarrow \mathbf{Q} \;,$$

und also $\dim \mathrm{Ext}^k_R(I_2, P_1) = 0$ für $k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, und $\dim \mathrm{Ext}^1_R(I_2, P_1) = 1$.

Berechnen wir $\mathrm{Ext}^k_R(I_2, P_2)$. Eine projektive Auflösung von I_2 ist nach Aufgabe 23.(3) gegeben durch $P_1 \rightarrowtail P_3$. Anwenden von $(-, P_2)$ gibt den Komplex

$$\mathbf{Q} \longleftarrow 0 \;,$$

und also $\dim \mathrm{Ext}^k_R(I_2, P_2) = 0$ für $k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, und $\dim \mathrm{Ext}^1_R(I_2, P_2) = 1$.

Aufgabe 31. Wir unterschlagen Indizes bei Morphismen.

Zum Zwecke der Notationsvereinfachung etwas allgemeiner formuliert, seien uns zwei Doppelkomplexe X (in der Anwendung $F^{\mathrm{CC}}(U,U')$) und Y (in der Anwendung $F^{\mathrm{CC}}(V,U')$) in $\mathrm{CC}^{\llcorner}(\mathcal{A})$ gegeben, ein Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$, sowie ein Tupel von Morphismen $(X^{i,j} \xrightarrow{h} Y^{i-1,j})_{i,j}$ (in der Anwendung $(X^{i,j} \xrightarrow{h} Y^{i-1,j}) = (F(U^i,U'^j) \xrightarrow{F(h,1_{U'^j})} F(V^{i-1},U'^j))$ mit

$$\begin{array}{rcl} f & = & h\delta + \delta h \\ hd & = & dh \end{array}$$

stets. Wir haben zu zeigen, daß $\mathrm{t}X \xrightarrow{\mathrm{t}f} \mathrm{t}Y$ nullhomotop ist. Beachte noch, daß wegen $Y^{-1,j} = 0$ noch

$$(X^{0,j} \xrightarrow{f} Y^{0,f}) \;=\; (X^{0,j} \xrightarrow{\delta} X^{1,j} \xrightarrow{h} Y^{0,j})$$

stets gilt.

Wir erinnern daran, daß $(\mathrm{t}X)^k = X^{0,k} \oplus X^{1,k-1} \oplus \cdots \oplus X^{k,0}$ für $k \geqslant 0$, und $(\mathrm{t}X)^k = 0$ für $k < 0$.

Als Homotopie verwenden wir das Tupel

$$(\mathrm{t}X)^k \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ +h & & & \\ & -h & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm h \end{pmatrix}} (\mathrm{t}Y)^{k-1}$$

Auf der einen Seite wird damit

$$\begin{pmatrix} d & \delta & & & \\ & -d & -\delta & & \\ & & d & \delta & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \\ +h & & & \\ & -h & & \\ & & +h & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\delta h & & & \\ -dh & +\delta h & & \\ & -dh & +\delta h & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} .$$

Auf der anderen Seite wird damit

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \\ +h & & & \\ & -h & & \\ & & +h & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & \delta & & & \\ & -d & -\delta & & \\ & & d & \delta & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \\ hd & h\delta & & \\ & hd & h\delta & \\ & & hd & h\delta \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} .$$

Die Summe gibt wie erwünscht

$$\begin{pmatrix} \delta h & & & & \\ 0 & \delta h + h\delta & & & \\ & 0 & \delta h + h\delta & & \\ & & 0 & \delta h + h\delta & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & & & \\ & f & & \\ & & f & \\ & & & f \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = \mathrm{t}f .$$

Aufgabe 32. Zunächst bemerken wir, daß $R(-) : G \longmapsto RG$ zu einem Funktor von der Kategorie der Gruppen in die Kategorie der R-Algebren wird, indem wir einem Morphismus $G \xrightarrow{f} H$ von Gruppen den Morphismus

$$\begin{array}{ccc} RG & \xrightarrow{Rf} & RH \\ \sum_{g \in G} r_g g & \longmapsto & \sum_{g \in G} r_g (gf) \end{array}$$

von R-Algebren zuordnen.

Schicke $G \xrightarrow{\varepsilon G} RG$ schlicht $g \longmapsto g$. Dies ist ein Gruppenmorphismus, und es wird $\varepsilon = (\varepsilon G)_G$ eine Transformation vom Inklusionsfunktors der Gruppen in die Monoide nach $R(-)$. In der Tat schickt sowohl ein Gruppenmorphismus $G \xrightarrow{f} H$ als auch $RG \xrightarrow{Rf} RH$ das Element g auf gf.

Sei nun eine R-Algebra und ein Monoidmorphismus $G \xrightarrow{f} A$ gegeben. Setze

$$\begin{array}{ccc} RG & \xrightarrow{\hat{f}} & A \\ \sum_g r_g g & \longmapsto & \sum_g r_g (gf) \end{array}$$

Es liegt ein R-Algebrenmorphismus vor, da ein Ringmorphismus vorliegt wegen insbesondere

$$\begin{array}{rcl} ((\sum_g r_g g)(\sum_{g'} s_{g'} g'))\hat{f} & = & (\sum_{g''}(\sum_{gg'=g''} r_g s_{g'})g'')\hat{f} \\ & = & \sum_{g''}(\sum_{gg'=g''} r_g s_{g'})(g''f) \\ & = & (\sum_g r_g (gf))(\sum_{g'} s_{g'} (g'f)) \\ & = & (\sum_g r_g g)\hat{f} \cdot (\sum_{g'} s_{g'} g')\hat{f} \ , \end{array}$$

und da $\hat{f}$ das Element $r = r \cdot 1_G$ nach $r = r \cdot 1_H$ abbildet.

Da $\hat{f}$ auf $G \subseteq RG$ zu $\hat{f}|_G = f$ einschränkt, und da G den Gruppenring RG R-linear erzeugt, ist $\hat{f}$ durch f auch eindeutig festgelegt, dieweil ein Morphismus von R-Algebren insbesondere eine R-lineare Abbildung ist.

Allgemeiner kann man für ein Monoid M den Monoidring RM definieren. Man erhält einen Funktor $R(-)$ von den Monoiden in die R-Algebren. Mit den angeführten Argumenten kann man einsehen, daß dieser linksadjungiert zum Vergißfunktor von den R-Algebren in die Monoide ist.

Alternativ dazu zeigen diese Argumente auch, daß der Funktor $R(-)$ von den Gruppen in die R-Algebren linksadjungiert zu dem Funktor von den R-Algebren in die Gruppen ist, der jeder R-Algebra ihre Einheitengruppe zuordnet.

Aufgabe 33.

(1) Im folgenden bezeichnen r, $\tilde{r}$ etc. Elemente aus R; s, s', t t' etc. Elemente aus S; m, $\tilde{m}$ etc. Elemente aus M; a, a' etc. Elemente aus A.

Man könnte zum Beweis diverser Wohldefiniertheiten verwenden, daß die Äquivalenzrelation $(m,s) \sim (m',s') :\Longleftrightarrow \exists\, t \;\; tms' = tm's$ von der transitiven und reflexiven Relation $(m,s) \approx (m',s') :\Longleftrightarrow \exists\, t \;\; m' = tm,\ s' = ts$ erzeugt wird.

Wir haben zu zeigen, daß die durch $\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} := \frac{s'm+sm'}{ss'}$ definierte Addition wohldefiniert ist. Seien also $\frac{m}{s} = \frac{\tilde{m}}{\tilde{s}}$ und $\frac{m'}{s'} = \frac{\tilde{m}'}{\tilde{s}'}$. Also ist $ts\tilde{m} = t\tilde{s}m$ und $t's'\tilde{m}' = t'\tilde{s}'m'$. Dann ist auch $\frac{s'm+sm'}{ss'} = \frac{\tilde{s}'\tilde{m}+\tilde{s}\tilde{m}'}{\tilde{s}\tilde{s}'}$, da

$$tt'(\tilde{s}\tilde{s}')(s'm + sm') \ = \ tt'(ss')(\tilde{s}'\tilde{m} + \tilde{s}\tilde{m}') \ .$$

Assoziativität, Kommutativität und additiv Inverses sind ersichtlich. Somit ist $(S^{-1}M, +)$ eine abelsche Gruppe.

Wir haben zu zeigen, daß die durch $\frac{r}{s} \cdot \frac{m}{s'} := \frac{rm}{ss'}$ definierte Multiplikationsabbildung $S^{-1}R \times S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}M$ wohldefiniert ist. Seien also $\frac{r}{s} = \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}}$ und $\frac{m}{s'} = \frac{\tilde{m}}{\tilde{s}'}$. Also ist $t\tilde{s}r = ts\tilde{r}$ und $t'\tilde{s}'m = t's'\tilde{m}$. Dann ist aber auch $\frac{rm}{ss'} = \frac{\tilde{r}\tilde{m}}{\tilde{s}\tilde{s}'}$, da $tt'(\tilde{s}\tilde{s}')(rm) = tt'(ss')(\tilde{r}\tilde{m})$.

Die Modulgesetze sind ersichtlich. Zum Beispiel folgt eine Distributivität mit

$$\begin{array}{rcl} (\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'})\frac{m}{s''} & = & \frac{s'r+sr'}{ss'}\frac{m}{s''} \\ & = & \frac{(s'r+sr')m}{ss's''} \\ & = & \frac{s'rm}{ss's''} + \frac{sr'm}{ss's''} \\ & = & \frac{rm}{ss''} + \frac{r'm}{s's''} \\ & = & \frac{r}{s}\frac{m}{s''} + \frac{r'}{s'}\frac{m}{s''} \ . \end{array}$$

Somit ist $S^{-1}M$ ein $S^{-1}R$-Modul.

Sei nun A eine R-Algebra. Mittels $\frac{a}{s}\frac{a'}{s'} := \frac{aa'}{ss'}$ werde auf $S^{-1}A$ eine Multiplikation erklärt. Zur Wohldefiniertheit dieser Multiplikation benötigen wir, daß das Bild von R in $\mathrm{Z}(A)$ liegt. Es ist $S^{-1}A$ ein $S^{-1}R$-Modul, trägt also insbesondere eine Addition. Das Distributivitätsgesetz ist ersichtlich. Also ist $S^{-1}A$ ein Ring. Wir haben einen Ringmorphismus $S^{-1}R \longrightarrow S^{-1}A$, $\frac{r}{s} \longmapsto \frac{r\cdot 1}{s}$, der $S^{-1}A$ schließlich zu einer $S^{-1}R$-Algebra macht.

(2) Wir setzen

$$\begin{array}{ccc} A\text{-Mod} & \xrightarrow{S^{-1}(-)} & (S^{-1}A)\text{-Mod} \\ \left(M \xrightarrow{f} N\right) & \longmapsto & \left(S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}N\right) \end{array},$$

wobei $(\frac{m}{s})S^{-1}f := \frac{mf}{s}$.

Es gibt einen Ringmorphismus $A \longrightarrow S^{-1}A$, $a \longmapsto \frac{a}{1}$, mittels welchen $S^{-1}A$ insbesondere zu einem A-Rechtsmodul wird.

Sei für $M \in \mathrm{Ob}\, A$-Mod

$$\begin{array}{ccccc} S^{-1}M & \longleftrightarrow & S^{-1}A & \otimes_A & M \\ \frac{m}{s} & \longmapsto & \frac{1}{s} & \otimes & m \\ \frac{am}{s} & \longleftarrow & \frac{a}{s} & \otimes & m \end{array}$$

Zeigen wir Wohldefiniertheit in beide Richtungen.

Sei $\frac{m}{s} = \frac{\tilde{m}}{\tilde{s}}$, sei also $t\tilde{s}m = ts\tilde{m}$. Dann ist

$$\frac{1}{s} \otimes m \;=\; \frac{t\tilde{s}}{t\tilde{s}s} \otimes m \;=\; \frac{1}{t\tilde{s}s} \otimes t\tilde{s}m \;=\; \frac{1}{t\tilde{s}s} \otimes ts\tilde{m} \;=\; \frac{ts}{t\tilde{s}s} \otimes \tilde{m} \;=\; \frac{1}{\tilde{s}} \otimes \tilde{m}\,.$$

Sei $\frac{a}{s} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{s}}$, sei also $t\tilde{s}a = ts\tilde{a}$. Dann ist

$$\frac{am}{s} \;=\; \frac{t\tilde{s}am}{t\tilde{s}s} \;=\; \frac{ts\tilde{a}m}{t\tilde{s}s} \;=\; \frac{\tilde{a}m}{\tilde{s}}\,.$$

Die A-Bilinearität ist dann ersichtlich.

Beide Richtungen sind $S^{-1}A$-linear und natürlich in M. Also ist $S^{-1}(-) \simeq S^{-1}R \otimes_R -$.

Insbesondere ist $S^{-1}(-)$ rechtsexakt. Für die Exaktheit genügt es nun zu zeigen, daß Monomorphismen bewahrt werden. Sei also $M \xrightarrow{f} N$ ein Monomorphismus, und sei $(\frac{m}{s})S^{-1}f = 0$, i.e. sei $t(mf) = 0$. Dann aber ist $(tm)f = t(mf) = 0$, also wegen f injektiv auch $tm = 0$, und folglich $\frac{m}{s} = 0$.

Es ist also $S^{-1}A$ ein flacher A-Modul, aber i.a. nicht projektiv.

(3) Zeigen wir, daß aus P projektiv über A folgt, daß auch $S^{-1}P \simeq S^{-1}A \otimes_A P$ projektiv über $S^{-1}A$ ist. Denn P ist Summand eines Moduls der Form $\coprod_I A$ für eine Indexmenge I, und es ist $S^{-1}A \otimes_A \coprod_I A \simeq \coprod_I S^{-1}A$. Wegen der Additivität von $S^{-1}A \otimes_A -$ ist also auch $S^{-1}A \otimes_A P$ Summand von $\coprod_I S^{-1}A$.

Da dazuhin $S^{-1}(-)$ exakt ist, folgt, daß für einen A-Modul M und eine projektive Auflösung P von M auch $S^{-1}P$ (punktweise Anwendung von S^{-1}) eine projektive Auflösung von $S^{-1}M$ über $S^{-1}A$ ist.

Zu Tor. Wir haben einen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcccccc} S^{-1}(M & \otimes_A & N) & \longleftrightarrow & S^{-1}M & \otimes_{S^{-1}A} & S^{-1}N \\ s^{-1}(m & \otimes & n) & \longmapsto & \frac{m}{s} & \otimes & \frac{n}{1} \\ (ss')^{-1}(m & \otimes & n) & \longleftarrow & \frac{m}{s} & \otimes & \frac{n}{s'} \end{array}$$

Sei P eine projektive Auflösung von M. Lösen wir e.g. in erster Variablen auf, so wird

$$\begin{array}{rcl} S^{-1}\operatorname{Tor}_i^A(M,N) & \simeq & S^{-1}\mathrm{H}^i(P\otimes_A N) \\ & \overset{S^{-1}(-)\text{ exakt}}{\simeq} & \mathrm{H}^i S^{-1}(P\otimes_A N) \\ & \simeq & \mathrm{H}^i(S^{-1}P\otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N) \\ & \simeq & \operatorname{Tor}_i^{S^{-1}A}(S^{-1}M,S^{-1}N)\,. \end{array}$$

Hierbei werde $-\otimes_A N$ punktweise auf P angewandt, etc.

Zu Ext. Wir behaupten, daß

$$\begin{array}{rcl} S^{-1}{}_A(M,N) & \longrightarrow & {}_{S^{-1}A}(S^{-1}M,S^{-1}N) \\ \frac{f}{s} & \longmapsto & \left(\frac{m}{s'}\longmapsto\frac{mf}{s's}\right) \end{array}$$

ein Isomorphismus ist. Wohldefiniertheit ist ersichtlich, und genauso die Natürlichkeit in M und N.

Wähle $A^l \xrightarrow{g} A^k \xrightarrow{h} M$ mit h Cokern von g. Dies ist möglich, da M endlich erzeugt und A noethersch ist.

Die eben konstruierte Transformation liefert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} S^{-1}(M,N) \arrow[r, "S^{-1}(h,N)"] \arrow[d] & S^{-1}(A^k,N) \arrow[r, "S^{-1}(g,N)"] \arrow[d] & S^{-1}(A^l,N) \arrow[d] \\ (S^{-1}M,S^{-1}N) \arrow[r, "(S^{-1}h,S^{-1}N)"] & (S^{-1}A^k,S^{-1}N) \arrow[r, "(S^{-1}g,S^{-1}N)"] & (S^{-1}A^l,S^{-1}N) \end{tikzcd}$$

von $S^{-1}R$-Moduln, in dessen Zeilen der jeweils linke Morphismus ein Kern des rechten ist. Unsere Transformation ist ein Isomorphismus bei $M=A$, und wegen Additivität also auch bei $M=A^k$ und $M=A^l$. Somit sind der linke und der mittlere vertikale Morphismus in unserem Diagramm Isomorphismen, und folglich auch der rechte.

Da M endlich erzeugt ist, können wir eine projektive Auflösung P von M über A mit endlich erzeugten Termen finden.

Lösen wir in erster Variablen auf, so wird

$$\begin{array}{rcl} S^{-1}\operatorname{Ext}_A^i(M,N) & \simeq & S^{-1}\mathrm{H}^i{}_A(P,N) \\ & \overset{S^{-1}(-)\text{ exakt}}{=} & \mathrm{H}^i S^{-1}{}_A(P,N) \\ & \simeq & \mathrm{H}^i{}_{S^{-1}A}(S^{-1}P,S^{-1}N) \\ & \simeq & \operatorname{Ext}_{S^{-1}A}^i(S^{-1}M,S^{-1}N)\,. \end{array}$$

Hierbei werde ${}_A(-,N)$ punktweise auf P angewandt, etc.

Aufgabe 34.

(1) Für $k\geqslant 0$ ist unter Beachtung der Kontravarianz im ersten Faktor

$$(\mathrm{t}_R(U,V))^k \;=\; \bigoplus_{i+j=k} {}_R(U_i,V^j) \;=\; \bigoplus_{i\in[-k,0]} {}_R(U^i,V^{i+k})\,.$$

Beachte hierbei, daß $U^i=0$ für $i>0$.

Es liegt ein Tupel $(U^i \xrightarrow{f^i} V^{i+k})_{i\in[-k,0]}$ genau dann in $\mathrm{Z}^i\mathrm{t}_R(U,V)$, wenn $df^i = f^{i-1}d$ stets (die verschwindenden Differentiale an den “Rändern” mitberücksichtigt), wie aus der Bedingung

$$(f^0, f^{-1}, \dots, f^{-k}) \begin{pmatrix} (-)d & d(-) & & & \\ & -(-)d & -d(-) & & \\ & & (-)d & d(-) & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

hervorgeht. In anderen Worten, es bildet das Tupel $(U^i \xrightarrow{(-1)^{ik}f^i} V^{i+k})_i$, ergänzt um Nullen, genau dann ein Komplexmorphismus, wenn $(f^i)_i$ in $\mathrm{Z}^k\mathrm{t}_R(U,V)$ liegt, i.e.

$$\mathrm{Z}^k\mathrm{t}_R(U,V) \xrightarrow{\sim} {}_{\mathrm{C}(R\text{-Mod})}(U, V[k])\ .$$

Das Vorzeichen ist wegen des eingefügten Vorzeichens $(-1)^k$ vor den Differentialen in $V[k]$ erforderlich.

Das Bild des Tupels $((-1)^i h^i)_i \in (\mathrm{t}_R(U,V))^{k-1} = \bigoplus_{i\in[-k+1,0]} {}_R(U^i, V^{i+k-1})$ in $(\mathrm{t}_R(U,V))^k = \bigoplus_{i\in[-k,0]} {}_R(U^i, V^{i+k})$ unter dem Differential des Totalkomplexes ist gegeben durch $(dh^i + h^{i-1}d)_i$ (am Anfang künstlich eingefügtes Vorzeichen). Unter dem verwandten Isomorphismus kommt dieses Tupel auf

$$\big((-1)^{ik}(dh^i + h^{i-1}d)\big)_i \;=\; \big(d((-1)^{ik}h^i) + ((-1)^{(i-1)k}h^{i-1})((-1)^k d))\big)_i\ .$$

d.h. zu einem nullhomotopen Komplexmorphismus, berücksichtigt man das Vorzeichen der Differentiale in $V[k]$. Und umgekehrt, jeder nullhomotope Komplexmorphismus kann auf diese Weise gewonnen werden. Also induziert unser Isomorphismus einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^k\mathrm{t}_R(U,V) \xrightarrow{\sim} {}_{\mathrm{K}(R\text{-Mod})}(U, V[k])\ .$$

(2) Es ist

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ext}^k(X,Y) & = & \mathrm{H}^k\mathrm{t}\,{}_R(\mathrm{PRes}X, \mathrm{IRes}Y) \\ & \overset{(1)}{\simeq} & {}_{\mathrm{K}(R\text{-Mod})}(\mathrm{PRes}X, \mathrm{IRes}Y[k])\ . \end{array}$$

Ferner ist

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ext}^k(X,Y) & \simeq & \mathrm{H}^k\,{}_R(X, \mathrm{IRes}Y) \\ & = & \mathrm{H}^k\mathrm{t}\,{}_R(\mathrm{Konz}\,X, \mathrm{IRes}Y) \\ & \overset{(1)}{\simeq} & {}_{\mathrm{K}(R\text{-Mod})}(\mathrm{Konz}\,X, \mathrm{IRes}Y[k])\ , \end{array}$$

sowie analog

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ext}^k(X,Y) & \simeq & \mathrm{H}^k\,{}_R(\mathrm{PRes}X, Y) \\ & = & \mathrm{H}^k\mathrm{t}\,{}_R(\mathrm{PRes}X, \mathrm{Konz}\,Y) \\ & \overset{(1)}{\simeq} & {}_{\mathrm{K}(R\text{-Mod})}(\mathrm{PRes}X, \mathrm{Konz}\,Y[k])\ . \end{array}$$

Aufgabe 35.

(1) Um allgemein einen Morphismus eines Gruppenalgebra RG einer Gruppe G, die durch Erzeuger und Relationen gegeben ist, in eine R-Algebra A zu konstruieren, muß man einen Monoidmorphismus von G nach A konstruieren. Ein solcher schränkt im Bild zu einem Gruppenmorphismus von G in die Einheitengruppe ein. Also muß man Bilder der Erzeuger von G in der Einheitengruppe von A so angeben, daß die Relationen auch im Bild erfüllt sind.

Da $\mathcal{S}_2 \xleftarrow{\sim} \langle \sigma \;:\; \sigma^2 = 1\rangle$, $(1,2) \longleftarrow\!\shortmid\, \sigma$, muß für einen Morphismus $\mathbf{Z}\mathcal{S}_2 \xrightarrow{\varphi} \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ wie angegeben nachgeprüft werden, daß das Bild σ' von σ eben $\sigma'^2 = 1 = (1,1)$ erfüllt. Dies ist der Fall.

Bezüglich der $\mathbf{Z}$-linearen Basen $(1,(1,2))$ von $\mathbf{Z}\mathcal{S}_2$ und $\big((1,0),(0,1)\big)$ von $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ wird dieser Morphismus von der Matrix $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)$ beschrieben, wenn wir mit Zeilenvektoren arbeiten. Diese Matrix hat Rang 2 über $\mathbf{Q}$, also ist φ injektiv.

Es muß noch gezeigt werden, daß das Bild von φ von der angegeben Form ist.

Nun erfüllen alle Zeilen dieser Matrix die angegeben Kongruenzen – der Eintrag in der ersten Spalte ist jeweils kongruent zum Eintrag in der zweiten Spalte modulo 2. Bleibt also zu zeigen, daß der Index des Bildes von φ in $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ gerade 2 ist. In der Tat ist aber $\left|\det\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)\right| = 2$.

(2) Da $\mathcal{S}_3 \xleftarrow{\sim} \langle\sigma,\rho \;:\; \sigma^2 = 1,\ \rho^3 = 1,\ \sigma\rho\sigma = \rho^2\rangle$, $(1,2) \longleftarrow\!\shortmid\, \sigma$, $(1,2,3) \longleftarrow\!\shortmid\, \rho$, müssen für einen Morphismus $\mathbf{Z}\mathcal{S}_3 \xrightarrow{\varphi} \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^{2\times 2}\times\mathbf{Z}$ gerade diese Relationen für die Bilder ebenfalls erfüllt sein. Dies rechnet man mittels Matrixmultiplikation nach. Z.B. ist $\left(\begin{smallmatrix}-2 & -1\\ 3 & 2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}-2 & -1\\ 3 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}-2 & -1\\ 3 & 2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ -3 & -2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-2 & -1\\ 3 & 1\end{smallmatrix}\right)^2$.

Bezüglich der $\mathbf{Z}$-linearen Basen

$$\big(1,\ (1,2),\ (1,3),\ (2,3),\ (1,2,3),\ (1,3,2)\big)$$

von $\mathbf{Z}\mathcal{S}_3$ und

$$\Big((1,\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),0),\ (0,\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),0),\ (0,\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right),0),\ (0,\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right),0),\ (0,\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),0),\ (0,\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),1)\Big)$$

hat dieser Morphismus die Matrix

$$\Omega_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} ,$$

wenn wir mit Zeilenvektoren arbeiten. Diese Matrix hat Rang 6 über $\mathbf{Q}$, also ist φ injektiv.

Es muß noch gezeigt werden, daß das Bild von φ von der angegeben Form ist.

Nun erfüllen alle Zeilen dieser Matrix die angegeben Kongruenzen: Dritte Spalte $\equiv_3 0$, erste Spalte $\equiv_3$ zweite Spalte, fünfte Spalte $\equiv_3$ sechste Spalte, und schließlich erste Spalte $\equiv_2$ sechste Spalte.

Bleibt also zu zeigen, daß der Index des Bildes von φ in $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^{2\times 2}\times\mathbf{Z}$ gerade $2\cdot 3^3$ ist. In der Tat ist aber $|\det\Omega_3| = 2\cdot 3^3$.

(3) Allgemein, ist $X\subseteq\mathbf{Z}^n$ durch Kongruenzen modulo $p_i^{\alpha_{i,j}}$ erklärt, für verschiedene i und j, wobei p_i prim sei und $\alpha_{i,j}\geqslant 1$, so haben wir eine kurz exakte Sequenz

$$X \longrightarrow \mathbf{Z}^n \longrightarrow \left(\mathbf{Z}/p_1^{\alpha_{1,1}}\oplus\mathbf{Z}/p_1^{\alpha_{1,2}}\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}/p_2^{\alpha_{2,1}}\oplus\cdots\right) .$$

Lokalisieren wir an (p_i), so entsteht eine kurz exakte Sequenz

$$X_{(p_i)} \longrightarrow \mathbf{Z}^n_{(p_i)} \longrightarrow \left(\mathbf{Z}/p_i^{\alpha_{i,1}}\oplus\mathbf{Z}/p_i^{\alpha_{i,2}}\oplus\cdots\right) ,$$

die anderen Summanden des Cokerns über $\mathbf{Z}$ verschwinden über $\mathbf{Z}_{(p_i)}$.

In anderen Worten, aus der Beschreibung über $\mathbf{Z}$ mittels Kongruenzen erhält man eine Beschreibung der Lokalisation an (p), indem man nur noch Kongruenzen modulo p-Potenzen behält.

Ließe man die nun weggefallenen Kongruenzen stehen, so wäre dies kein Fehler, aber etwas redundant, da in $\mathbf{Z}_{(p)}$ stets $a\equiv_q b$ gilt, so p und q zwei verschiedene Primzahlen sind.

So werden

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}_{(2)}\mathcal{S}_2 & \xrightarrow[\sim]{\omega_{2,(2)}} & \{(a,b)\in\mathbf{Z}_{(2)}\times\mathbf{Z}_{(2)} \;:\; a\equiv_2 b\}\\ \mathbf{Z}_{(p)}\mathcal{S}_2 & \xrightarrow[\sim]{\omega_{2,(p)}} & \mathbf{Z}_{(p)}\times\mathbf{Z}_{(p)} \end{array}$$

für $p\geqslant 3$.

(4) Wie in (3) erhalten wir

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{Z}_{(2)}\mathcal{S}_3 & \xrightarrow[\sim]{\omega_{3,(2)}} & \{(a, \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ d & e \end{smallmatrix}\right), f) \in \mathbf{Z}_{(2)} \times \mathbf{Z}_{(2)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(2)} \ : \ a \equiv_2 f\} \\ \mathbf{Z}_{(3)}\mathcal{S}_3 & \xrightarrow[\sim]{\omega_{3,(3)}} & \{(a, \left(\begin{smallmatrix} b & c \\ d & e \end{smallmatrix}\right), f) \in \mathbf{Z}_{(3)} \times \mathbf{Z}_{(3)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(3)} \ : \ a \equiv_3 b,\ e \equiv_3 f,\ d \equiv_3 0\}\ . \end{array}$$

Wir können also unter Unterschlagung von Nulleinträgen in der Notation

$$\mathbf{Z}_{(3)}\mathcal{S}_3 \ \simeq \ \underbrace{\{(a, \left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right)) \in \mathbf{Z}_{(3)} \times \mathbf{Z}_{(3)}^2 \ : \ a \equiv_3 b,\ d \equiv_3 0\}}_{=:\,P} \oplus \underbrace{\{(\left(\begin{smallmatrix} c \\ e \end{smallmatrix}\right), f) \in \mathbf{Z}_{(3)}^2 \times \mathbf{Z}_{(3)} \ : \ e \equiv_3 f\}}_{=:\,Q}$$

direkt in Linksideale zerlegen, welche daher als direkte Summanden des projektiven Moduls $\mathbf{Z}_{(3)}\mathcal{S}_3$ selbst projektiv sind.

Aufgabe 36.

(1) Die kurz exakte Sequenz (i, p), gesehen als Sequenz von R-Moduln, ist wegen M'' projektiv split kurz exakt. Sei $M \xrightarrow{\tilde{f}} M'$ eine R-lineare Abbildung mit $i\tilde{f} = 1_{M'}$. Setze

$$\begin{array}{ccl} M & \xrightarrow{f} & M' \\ m & \longmapsto & \sum_{g\in G} g((g^{-1}m)\tilde{f})\ . \end{array}$$

Es ist f dann R-linear. Um zu zeigen, daß f auch RG-linear ist, genügt es $h(mf) = (hm)f$ für $h \in G$ zu wissen. In der Tat wird

$$\begin{array}{rcl} (hm)f & = & \sum_{g\in G} g((g^{-1}hm)\tilde{f}) \\ & \overset{g\,=\,h\tilde{g}}{=} & \sum_{\tilde{g}\in G} h\tilde{g}((\tilde{g}^{-1}m)\tilde{f}) \\ & = & h(mf)\ . \end{array}$$

Ferner wird für $m' \in M'$

$$\begin{array}{rcl} m'if & = & \sum_{g\in G} g((g^{-1}(m'i))\tilde{f}) \\ & \overset{i\ RG\text{-linear}}{=} & \sum_{g\in G} g(\ ((g^{-1}m')i)\tilde{f}\ ) \\ & \overset{i\tilde{f}\,=\,1_{M'}}{=} & \sum_{g\in G} g((g^{-1}m')) \\ & = & \sum_{g\in G} m' \\ & = & |G|\cdot m'\ , \end{array}$$

woraus wir $if = |G|\cdot 1_{M'}$ ersehen.

(2) Sei P eine projektive Auflösung von M über RG. Dann ist $\mathrm{Ext}^k_{RG}(M, N) = \mathrm{H}^k(\,_{RG}(P, N))$. Sei $\zeta \in \mathrm{Z}^k(\,_{RG}(P, N))$, i.e. sei $P_k \xrightarrow{\zeta} N$ RG-linear mit $(P_{k+1} \xrightarrow{d} P_k \xrightarrow{\zeta} N) = 0$. Wegen P azyklisch in $k \geqslant 1$ und wegen der universellen Eigenschaft des Cokerns faktorisiert ζ eindeutig als $(P_k \xrightarrow{\zeta} N) = (P_k \xrightarrow{\bar{d}} \mathrm{B}_{k-1}P \xrightarrow{\xi} N)$.

Wenden wir nun (1) auf die kurz exakte Sequenz

$$(*_{k-1}) \qquad\qquad \mathrm{B}_{k-1}P \xrightarrow{\dot{d}} P_{k-1} \longrightarrow \mathrm{Z}'_{k-1}P$$

an. Hierbei ist $\mathrm{Z}'_0P = M$ und $\mathrm{Z}'_{k-1}P = \mathrm{B}_{k-2}P$ für $k \geqslant 2$ zu beachten.

In der Tat sind nun wegen M projektiv über R die kurz exakten Sequenzen $(*_{k-1})$ für $k \geqslant 1$ split kurz exakt und bestehen aus projektiven Termen über R. Somit können wir (1) anwenden und finden eine RG-lineare Abbildung $\mathrm{B}_{k-1}P \xleftarrow{f} P_{k-1}$ mit $\dot{d}f = |G| \cdot 1_{\mathrm{B}_{k-1}P}$.

Es wird $|G|\xi = \dot{d}(f\xi)$, und somit $|G|\zeta = d(f\xi) \in \mathrm{B}^k({}_{RG}(P,N))$, i.e. $|G|\zeta$ repräsentiert das Nullelement in $\mathrm{H}^k({}_{RG}(P,N))$.

(3) Sei P eine projektive Auflösung von M in Mod-RG. Es ist

$$\mathrm{Tor}_k^{RG}(M,N) \;=\; \mathrm{H}_k(P \otimes_{RG} N) \;=\; \mathrm{Kern}(\mathrm{B}_{k-1}P \otimes_{RG} N \xrightarrow{\dot{d}\otimes N} P_{k-1} \otimes_{RG} N)\,.$$

Wie in (2) erhalten wir eine RG-lineare Abbildung $\mathrm{B}_{k-1}P \xleftarrow{f} P_{k-1}$ mit $\dot{d}f = |G| \cdot 1_{\mathrm{B}_{k-1}P}$.

Sei $\xi \in \mathrm{Kern}(\dot{d} \otimes N)$. Dann ist auch $\xi \in \mathrm{Kern}((\dot{d} \otimes N)(f \otimes N)) = \mathrm{Kern}(|G| \cdot 1_{\mathrm{B}_{k-1}P\otimes_{RG}N})$. In anderen Worten, es folgt $|G| \cdot \xi = 0$.

(4) Ist in (2) $|G|$ invertierbar in R, so folgt aus $|G|\,\mathrm{Ext}^k_{RG}(M,N) \simeq 0$, daß

$$\mathrm{Ext}^k_{RG}(M,N) \;=\; |G|^{-1}|G|\,\mathrm{Ext}^k_{RG}(M,N) \;\simeq\; 0\,.$$

Ist in (3) $|G|$ invertierbar in R, so folgt aus $|G|\,\mathrm{Tor}_k^{RG}(M,N) \simeq 0$, daß

$$\mathrm{Tor}_k^{RG}(M,N) \;=\; |G|^{-1}|G|\,\mathrm{Tor}_k^{RG}(M,N) \;\simeq\; 0\,.$$

Wählen wir z.B. $R = K$, mit K ein Körper, dessen Charakteristik $|G|$ nicht teilt (z.B. $\mathrm{char}\,K = 0$), so verschwinden alle Ext^k_{KG}- und Tor_k^{KG}-Vektorräume für $k \geqslant 1$, da die in (2) und (3) vorausgesetzte Projektivität von M über K selbstvertändlich ist.

In (3) hätte man natürlich auch N projektiv über R voraussetzen können

Aufgabe 37.

(1) Es genügt, die Behauptung für R-Moduln zeigen. Es ist $(\mathrm{ev}M)_{M\in\mathrm{Ob}\,R\text{-Mod}}$ eine Transformation von $1_{R\text{-Mod}}$ nach $(-)^{**}$.

Da allgemein

$$(X \oplus Y \xrightarrow{\mathrm{ev}(X\oplus Y)} (X \oplus Y)^{**}) \quad\simeq\quad (X \oplus Y \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{ev}X & 0\\ 0 & \mathrm{ev}Y\end{smallmatrix}\right)} X^{**} \oplus Y^{**})$$

für $X,\, Y \in R$-Mod, wie man unter Verwendung von $X \xrightarrow{(1\;0)} X \oplus Y$ und $Y \xrightarrow{(0\;1)} X \oplus Y$ sieht, genügt es zunächst, die Behauptung für M endlich erzeugt frei zu zeigen. Mit demselben Argument ist man dann sogar auf den Fall $M = R$ reduziert.

Nun ist $R \xrightarrow{\varphi} R^*$, $1 \;\longmapsto\; \varepsilon := (1 \longmapsto 1)$ ein Isomorphismus, und folglich auch $R^{**} \xrightarrow{\varphi^*} R^*$, $\lambda \longmapsto \varphi\lambda = (1 \longmapsto \varepsilon\lambda)$. Da $(\mathrm{ev}R)\varphi^* = \varphi$, folgt, daß $\mathrm{ev}R$ ein Isomorphismus ist.

(2) Es genügt, die Behauptung für R-Moduln zeigen. Da N projektiv über R ist, ist $- \otimes_R N$ exakt mit Aufgabe 24.

Es ist $d = (d(M,N))_{(M,N)\in\mathrm{Ob}((R\text{-Mod})^\circ\times R\text{-Mod})}$ eine Transformation von $(-)^*\otimes_R =$ nach ${}_R(-,=)$.

In der Tat wird für $M \xleftarrow{\varphi} M'$ und $N \xrightarrow{\psi} N'$ R-linear

$$\begin{array}{rcl}(f\otimes n)\,d(M,N)(\varphi(-)\psi) & = & (m' \longmapsto ((m'\varphi f)\cdot n)\psi)\\ & = & (m' \longmapsto (m'(f\varphi^*))\cdot(n\psi))\\ & = & (f\varphi^* \otimes n\psi)\,d(M',N')\,.\end{array}$$

(i) Wir sind wie in (1) auf den Fall $M = R$ reduziert. Wir haben, in der Bezeichnung von (1), die Isomorphismen $N \underset{\sim}{\xrightarrow{u}} R^* \otimes_R N$, $n \longmapsto \varepsilon \otimes n$, und $N \underset{\sim}{\xrightarrow{v}} {}_R(R,N)$, $n \longmapsto (1 \longmapsto n)$. Da $u \cdot d(R,N) = v$, ist auch $d(R,N)$ ein Isomorphismus.

(ii) Es ist $-\otimes_R N$ exakt nach Aufgabe 24 (und mehr werden wir von N auch nicht verwenden müssen). Wir werden nur letztere Eigenschaft benötigen. Sei $P_1 \longrightarrow P_0 \twoheadrightarrow M$ so, daß M der Cokern von $P_1 \longrightarrow P_0$ ist, und so, daß P_0 und P_1 endlich erzeugt projektiv über R sind. Für letzteres benötigen wir M endlich erzeugt und R noethersch.

Da nun zudem $(-)^*$ und ${}_R(-,N)$ linksexakt sind, erhalten wir den Morphismus von Sequenzen

$$\begin{tikzcd} M^*\otimes_R N \arrow[r, tail] \arrow[d, "d(M,N)"'] & P_0^*\otimes_R N \arrow[r] \arrow[d, "d(P_0,N)"'] & P_1^*\otimes_R N \arrow[d, "d(P_1,N)"'] \\ {}_R(M,N) \arrow[r, tail] & {}_R(P_0,N) \arrow[r] & {}_R(P_1,N)\ , \end{tikzcd}$$

in welchen der jeweilig linke Morphismus Kern des rechten ist. Nach (i) sind aber nun $d(P_0,N)$ und $d(P_1,N)$ Isomorphismen. Da Isomorphismen auf den Kernen einen Isomorphismus induzieren, ist auch $d(M,N)$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 38.

(1) Sei $RC_n \xrightarrow{u} RC_n$, $1 \longmapsto c^0+c^1+\cdots+c^{n-1}$. Sei $RC_n \xrightarrow{v} RC_n$, $1 \longmapsto c-1$. Wir wollen zeigen, daß

$$P\ :=\ (\cdots \longrightarrow RC_n \xrightarrow{u} RC_n \xrightarrow{v} RC_n \xrightarrow{u} RC_n \xrightarrow{v} RC_n)$$

eine projektive Auflösung von R über RC_n ist.

Da das Bild von u als RC_n-Modul isomorph zu R ist vermöge $R \longrightarrow \operatorname{Im} u$, $1 \longmapsto c^0+c^1+\cdots+c^{n-1}$, genügt es zu zeigen, daß

$$\cdots \longrightarrow RC_n \xrightarrow{u} RC_n \xrightarrow{v} RC_n \xrightarrow{u} RC_n \xrightarrow{v} RC_n \xrightarrow{u} RC_n \xrightarrow{v} RC_n \longrightarrow \cdots$$

ein azyklischer Komplex ist. Es ist ein Komplex, da

$$1uv\ =\ (c^0+c^1+\cdots+c^{n-1})v\ =\ (c^0+c^1+\cdots+c^{n-1})(c-1)\ =\ 0$$

und

$$1vu\ =\ (c-1)u\ =\ (c-1)(c^0+c^1+\cdots+c^{n-1})\ =\ 0\ ,$$

und also $uv=0$ und $vu=0$.

Ferner ist

$$\sum_{i\in[0,n-1]} r_i c^i \overset{v}{\longmapsto} \left(\sum_{i\in[0,n-1]} r_i c^{i+1}\right) - \left(\sum_{i\in[0,n-1]} r_i c^i\right)\ =\ (r_{n-1}-r_0)c^0 + \sum_{i\in[1,n-1]} (r_{i-1}-r_i)c^i\ =\ 0$$

genau dann, wenn $r_i = r_{i+1}$ für alle $i\in[0,n-1]$, was aber $\sum_{i\in[0,n-1]} r_i c^i = r_0 \sum_{i\in[0,n-1]} c^i = r_0 u \in \operatorname{Im} u$ nach sich zieht.

Schließlich ist

$$\sum_{i\in[0,n-1]} r_i c^i \overset{u}{\longmapsto} \left(\sum_{i\in[0,n-1]} r_i\right)\left(\sum_{j\in[0,n-1]} c^j\right)\ =\ 0$$

genau dann, wenn $\sum_{i\in[0,n-1]} r_i = 0$, was dazu führt, daß

$$\operatorname{Im} v\ \ni\ \left(\sum_{i\in[1,n-1]} r_i(c^{i-1}+\cdots+c^0)\right) v\ =\ \sum_{i\in[0,n-1]} r_i(c^i-1)\ =\ \left(\sum_{i\in[0,n-1]} r_i c^i\right) - \left(\sum_{i\in[0,n-1]} r_i\right)\ =\ \sum_{i\in[0,n-1]} r_i c^i\ .$$

(2) (i) Konstruktion eines Morphismus $P \xrightarrow{g} \mathrm{Bar}_{C_n;R}$.

Sei $\xi := \sum_{i\in[0,n-1]} c^i \otimes c^{i+1}$. Es ist $\xi \wedge 0 = \xi \wedge 1 = \sum_{i\in[0,n-1]} c^i$ und $c\xi = \xi$.

Schreibe $\xi^{\otimes k} := \underbrace{\xi \otimes \cdots \otimes \xi}_{k \text{ Faktoren}}$.

Setze für $k \geqslant 0$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} RC_n & \xrightarrow{g_{2k}} & RC_n^{\otimes(2k+1)} \\ 1 & \longmapsto & 1 \otimes \xi^{\otimes k} \end{array}}$$

und

$$\boxed{\begin{array}{rcl} RC_n & \xrightarrow{g_{2k+1}} & RC_n^{\otimes(2k+2)} \\ 1 & \longmapsto & 1 \otimes c \otimes \xi^{\otimes k}\ . \end{array}}$$

Dann wird

$$\begin{array}{rclcl} 1g_{2k+1}d & = & (1 \otimes c \otimes \xi^{\otimes k})d & = & (c-1) \otimes \xi^{\otimes k} \\ 1vg_{2k} & = & (c-1)g_{2k} & = & (c-1)(1 \otimes \xi^{\otimes k}) \;=\; (c-1) \otimes \xi^{\otimes k} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rclcl} 1g_{2k+2}d & = & (1 \otimes \xi^{\otimes(k+1)})d & = & \xi^{\otimes(k+1)} \\ 1ug_{2k+1} & = & (\sum_{i\in[0,n-1]} c^i)g_{2k} & = & (\sum_{i\in[0,n-1]} c^i)(1 \otimes c \otimes \xi^{\otimes k}) \;=\; \xi \otimes \xi^{\otimes k}\ . \end{array}$$

für $k \geqslant 0$. Somit ist $g = (g_i)_i$ ein Morphismus von Komplexen. Ferner ist $\mathrm{H}_0(g) = 1_R$.

(ii) Konstruktion eines Morphismus $\mathrm{Bar}_{C_n;R} \xrightarrow{f} P$.

Für $i \in [0, n-1]$ schreiben wir $c^{[0,i[} = \sum_{s\in[0,i-1]} c^s$.

Für $k \in \mathbf{Z}$ schreiben wir $k = n \cdot \underline{k} + \overline{k}$ mit $\overline{k} \in [0, n-1]$ („k geteilt durch n gibt $\underline{k}$ mit Rest $\overline{k}$").

Für $k \geqslant 0$ und ein Tupel $(i_1, \ldots, i_{2k})$ schreiben wir

$$\underline{(i_1, \ldots, i_{2k})} \;:=\; (\underline{i_1 + i_2}) \cdot (\underline{i_3 + i_4}) \cdots (\underline{i_{2k-1} + i_{2k}})\ .$$

Nach Multiplikation mit n erkennt man, daß $\underline{\overline{i_1 + i_2} + i_3} - \underline{i_1 + \overline{i_2 + i_3}} = \underline{i_2 + i_3} - \underline{i_1 + i_2}$.
Folglich ist

$$\begin{array}{rl} & \sum_{j\in[1,2k]} (-1)^j \underline{(i_1, \ldots, \overline{i_j + i_{j+1}}, \ldots, i_{2k+1})} \\ = & -\sum_{l\in[1,k]} \Big(\underline{(i_1, \ldots, i_{2l-2},\ \overline{i_{2l-1} + i_{2l}}, i_{2l+1},\ i_{2l+2}, \ldots, i_{2k+1})} - \underline{(i_1, \ldots, i_{2l-2},\ i_{2l-1}, \overline{i_{2l} + i_{2l+1}},\ i_{2l+2}, \ldots, i_{2k+1})} \Big) \\ = & -\sum_{l\in[1,k]} \Big(\underline{(i_1, \ldots, i_{2l-2},\ i_{2l}, i_{2l+1},\ i_{2l+2}, \ldots, i_{2k+1})} - \underline{(i_1, \ldots, i_{2l-2},\ i_{2l-1}, i_{2l},\ i_{2l+2}, \ldots, i_{2k+1})} \Big) \\ = & -\underline{(i_2, \ldots, i_{2k+1})} + \underline{(i_1, \ldots, i_{2k})}\ . \end{array}$$

Setze nun für $k \geqslant 0$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} RC_n^{\otimes(2k+1)} & \xrightarrow{f_{2k}} & RC_n \\ [c^{i_1}, \ldots, c^{i_{2k}}] & \longmapsto & \underline{(i_1, \ldots, i_{2k})} \end{array}}$$

und

$$\boxed{\begin{array}{rcl} RC_n^{\otimes(2k+2)} & \xrightarrow{f_{2k+1}} & RC_n \\ [c^{i_1}, \ldots, c^{i_{2k+1}}] & \longmapsto & c^{[0,i_1[}\underline{(i_2, \ldots, i_{2k+1})} \end{array}}$$

wobei jeweils $i_j \in [0, n-1]$.

Sei wieder $k \geqslant 0$. Zum einen stimmen

$$\begin{aligned}
& [c^{i_1}, \dots, c^{i_{2k+1}}] d f_{2k} \\
= \;& \Big(c^{i_1} [c^{i_2}, \dots, c^{i_{2k+1}}] + \Big(\textstyle\sum_{j \in [1,2k]} (-1)^j [c^{i_1}, \dots, c^{i_j + i_{j+1}}, \dots, c^{i_{2k+1}}] \Big) - [c^{i_1}, \dots, c^{i_{2k}}] \Big) f_{2k} \\
= \;& c^{i_1} \underline{(i_2, \dots, i_{2k+1})} + \Big(\textstyle\sum_{j \in [1,2k]} (-1)^j \underline{(i_1, \dots, \overline{i_j + i_{j+1}}, \dots, i_{2k+1})} \Big) - \underline{(i_1, \dots, i_{2k})} \\
= \;& c^{i_1} \underline{(i_2, \dots, i_{2k+1})} + \Big(- \underline{(i_2, \dots, i_{2k+1})} + \underline{(i_1, \dots, i_{2k})} \Big) - \underline{(i_1, \dots, i_{2k})} \\
= \;& (c^{i_1} - 1) \underline{(i_2, \dots, i_{2k+1})}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& [c^{i_1}, \dots, c^{i_{2k+1}}] f_{2k+1} v \\
= \;& (c^{[0, i_1[} \underline{(i_2, \dots, i_{2k+1})}) v \\
= \;& (c^{i_1} - 1) \underline{(i_2, \dots, i_{2k+1})}
\end{aligned}$$

überein. Zum anderen stimmen

$$\begin{aligned}
& [c^{i_1}, \dots, c^{i_{2k+2}}] d f_{2k+1} \\
= \;& \Big(c^{i_1} [c^{i_2}, \dots, c^{i_{2k+2}}] + \Big(\textstyle\sum_{j \in [1,2k+1]} (-1)^j [c^{i_1}, \dots, c^{i_j + i_{j+1}}, \dots, c^{i_{2k+2}}] \Big) + [c^{i_1}, \dots, c^{i_{2k+1}}] \Big) f_{2k+1} \\
= \;& c^{[i_1, i_1 + i_2[} \underline{(i_3, \dots, i_{2k+2})} \\
- \;& c^{[0, \overline{i_1 + i_2}[} \underline{(i_3, \dots, i_{2k+2})} \\
+ \;& c^{[0, i_1[} \Big(\textstyle\sum_{j \in [2,2k+1]} (-1)^j \underline{(i_2, \dots, \overline{i_j + i_{j+1}}, \dots, i_{2k+2})} \Big) \\
+ \;& c^{[0, i_1[} \underline{(i_2, \dots, i_{2k+1})} \\
= \;& c^{[i_1, i_1 + i_2[} \underline{(i_3, \dots, i_{2k+2})} \\
- \;& c^{[0, \overline{i_1 + i_2}[} \underline{(i_3, \dots, i_{2k+2})} \\
+ \;& c^{[0, i_1[} \Big(\underline{(i_3, \dots, i_{2k+2})} - \underline{(i_2, \dots, i_{2k+1})} \Big) \\
+ \;& c^{[0, i_1[} \underline{(i_2, \dots, i_{2k+1})} \\
= \;& (c^{[0, i_1 + i_2[} - c^{[0, \overline{i_1 + i_2}[}) \underline{(i_3, \dots, i_{2k+2})} \\
= \;& c^{[0, n[} \, \underline{i_1 + i_2} \cdot \underline{(i_3, \dots, i_{2k+2})} \\
= \;& c^{[0, n[} \, \underline{(i_1, i_2, i_3, \dots, i_{2k+2})}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& [c^{i_1}, \dots, c^{i_{2k+2}}] f_{2k+2} u \\
= \;& \underline{(i_1, \dots, i_{2k+2})} u \\
= \;& \underline{(i_1, \dots, i_{2k+2})} c^{[0, n[}
\end{aligned}$$

überein. Somit ist $f = (f_i)_i$ ein Morphismus von Komplexen. Ferner ist $\mathrm{H}_0(f) = 1_R$.

Aufgabe 39.

(1) Die Aussage ist richtig.

Sei M endlich erzeugt über $\mathbf{Z}G$. Da G endlich ist, und da mithin $\mathbf{Z}G$ endlich erzeugt als Modul über $\mathbf{Z}$ ist, ist M auch endlich erzeugt über $\mathbf{Z}$.

Es ist auch jeder Objekteintrag $\mathbf{Z}G^{\otimes (k+1)} \otimes_{\mathbf{Z}G} M$ des Komplexes $\mathrm{Bar}_{G;\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}G} M$ endlich erzeugt über $\mathbf{Z}$, da als $\mathbf{Z}$-Modul isomorph zu einer endlichen direkten Summe von Kopien von M.

Ferner ist auch jeder Objekteintrag ${}_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}G^{\otimes k}, M)$ des Komplexes ${}_{\mathbf{Z}G}(\mathrm{Bar}_{G;\mathbf{Z}}, M)$ endlich erzeugt über $\mathbf{Z}$, da als $\mathbf{Z}$-Modul isomorph zu einer endlichen direkten Summe von Kopien von M.

Also sind $\mathrm{H}^i(G, M)$ und $\mathrm{H}_i(G, M)$ als Homologiegruppen eines Komplexes aus endlich erzeugten abelschen Gruppen wieder endlich erzeugt. Beachte hierbei insbesondere, daß eine Untergruppe U

einer endlich erzeugten abelschen Gruppe A endlich erzeugt ist, wie man mittels eines Pullbacks entlang $U \hookrightarrow A$ einer freien Auflösung von A einsieht; vgl. Aufgabe 18.(2, 3).

Da nun aber $|G| \cdot \mathrm{H}^i(G, M) = 0$ und $|G| \cdot \mathrm{H}_i(G, M) = 0$ für $i \geqslant 1$ nach Aufgabe 36.(2, 3), verschwindet der torsionsfreie Anteil dieser beiden Gruppen. Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen sind sie also endlich.

(2) Die Aussage ist falsch. Sei $G = 1$, sei $M = \mathbf{F}_2$. Es wird $\mathrm{H}^0(G, M) = M^G = \mathbf{F}_2$ und $\mathrm{H}_0(G, M) = M_G = \mathbf{F}_2$.

(3) Die Aussage ist richtig. Sei $i \geqslant 1$. Mit Aufgabe 36.(2, 3) ist $|G| {\cdot} \mathrm{H}^i(G, M) = 0$ und $|G| {\cdot} \mathrm{H}_i(G, M) = 0$.

Nun ist aber $|M| \cdot {}_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}G^{\otimes k}, M) = 0$ und $|M| \cdot (\mathbf{Z}G^{\otimes (k+1)} \otimes_{\mathbf{Z}G} M) = 0$ für $k \geqslant 0$. Also gilt dies auch für die jeweiligen Homologiegruppen eines aus solchen Objekten bestehenden Komplexes, und wir erhalten $|M| \cdot \mathrm{H}^k(G, M) = 0$ und $|M| \cdot \mathrm{H}_k(G, M) = 0$ für $k \geqslant 0$.

Da nun $|G|$ und $|M|$ teilerfremd sind, ist $1 = s|G| + t|M|$ für gewisse $s, t \in \mathbf{Z}$, und es folgt $\mathrm{H}^i(G, M) = (s|G| + t|M|)\mathrm{H}^i(G, M) = 0$ und $\mathrm{H}_i(G, M) = (s|G| + t|M|)\mathrm{H}_i(G, M) = 0$.

Aufgabe 40.

(1) Wir ersetzen $\mathbf{Z}_{(2)}\mathcal{S}_3$ isomorph durch das Bild Λ von $\omega_{3,(2)}$ in $\Gamma := \mathbf{Z}_{(2)} \times \mathbf{Z}_{(2)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(2)}$ (vgl. Aufgabe 35.(4)). Wir schreiben kurz

$$(a, f) \;:=\; \left(a, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), f\right) \;\in\; \Gamma\,.$$

Wir verwenden das Linksideal $M := \mathbf{Z}_{(2)} \times \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \times 0 \subseteq \Gamma$, welches durch Einschränkung der Operation von Γ auf Λ ein Λ-Modul wird, als isomorphe Kopie des trivialen Moduls.

Sei ferner $P = \{(a, f) \;:\; a \equiv_2 f\}$ das zu dem Idempotent $e = (1, 1) \in \Lambda$ gehörige projektive Linksideal in Λ, i.e. $P = \Lambda e$.

Sei $N := 0 \times \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \times \mathbf{Z}_{(2)} \subseteq \Gamma$.

Wir haben die kurz exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccc}
N & \xrightarrow{\iota_N} & P & \xrightarrow{\pi_M} & M \\
(0, f) & \longmapsto & (0, 2f) & & \\
 & & (a, f) & \longmapsto & (a, 0)\,,
\end{array}$$

und symmetrisch hierzu

$$\begin{array}{ccccc}
M & \xrightarrow{\iota_M} & P & \longrightarrow & N \\
(a, 0) & \longmapsto & (2a, 0) & & \\
 & & (a, f) & \longmapsto & (0, f)\,.
\end{array}$$

Beachte hierbei, daß beide involvierten Abbildungen Λ-linear sind. Seien $d_M := \pi_M \iota_M$ und $d_N := \pi_N \iota_N$. Zusammensetzen dieser kurz exakten Sequenzen gibt eine 2-periodische projektive Auflösung

$$\cdots \longrightarrow P \xrightarrow{d_M} P \xrightarrow{d_N} P \xrightarrow{d_M} P \xrightarrow{d_N} P\,,$$

von M, wobei also $(a, f)d_M = (2a, 0)$ und $(a, f)d_N = (0, 2f)$.

Lösen wir hier nun gleich einen Teil von (3) und (4) und berechnen für gegebenes $k \geqslant 0$ die Gruppen $\mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3; \mathbf{Z}_{(2)})$ und $\mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3; \mathbf{Z}_{(2)})$.

Allgemein ist

$$_\Lambda(P, M) \;=\; \mathbf{Z}_{(2)}\langle \pi_M \rangle \;\simeq\; \mathbf{Z}_{(2)}$$

als $\mathbf{Z}_{(2)}$-Moduln. Denn ist $P \xrightarrow{\varphi} M$ ein Morphismus, und ist $(1, 1)\varphi = (r, 0) \in M$, so folgt $(0, 2)\varphi = (0, 2)(1, 1)\varphi = (0, 2)(r, 0) = (0, 0)$. Somit stimmen φ und $r \cdot \pi_M$ auf einer $\mathbf{Z}_{(2)}$-linearen Basis von P überein.

Ferner bemerken wir, daß M auch ein Λ-Rechtsmodul ist, welcher eine isomorphe Kopie des trivialen $\mathbf{Z}_{(2)}\mathcal{S}_3$-Rechtsmoduls darstellt, sowie, daß

$$\begin{array}{cccccc} M & \otimes_\Lambda & P & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{Z}_{(2)} \\ (r,0) & \otimes & (a,f) & \longmapsto & ra \\ (r,0) & \otimes & (1,1) & \longleftarrow\!\shortmid & r \end{array}$$

als $\mathbf{Z}_{(2)}$-Moduln.

Anwenden von ${}_\Lambda(-,M)$ auf unsere projektive Auflösung und isomorphe Ersetzung liefert den Komplex

$$\cdots \longleftarrow \mathbf{Z}_{(2)} \xleftarrow{2} \mathbf{Z}_{(2)} \xleftarrow{0} \mathbf{Z}_{(2)} \xleftarrow{2} \mathbf{Z}_{(2)} \xleftarrow{0} \mathbf{Z}_{(2)}$$

Somit ist

$$\mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3;\mathbf{Z}_{(2)}) \simeq \begin{cases} \mathbf{Z}_{(2)} & \text{falls } k=0 \\ 0 & \text{falls } k \equiv_2 1 \\ \mathbf{Z}/2 & \text{falls } k \equiv_2 0 \text{ und } k \geqslant 2 \end{cases}$$

Anwenden von $M \otimes_\Lambda =$ auf unsere projektive Auflösung und isomorphe Ersetzung liefert den Komplex

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{Z}_{(2)} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}_{(2)} \xrightarrow{0} \mathbf{Z}_{(2)} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}_{(2)} \xrightarrow{0} \mathbf{Z}_{(2)}$$

Somit ist

$$\mathrm{H}_k(\mathcal{S}_3;\mathbf{Z}_{(2)}) \simeq \begin{cases} \mathbf{Z}_{(2)} & \text{falls } k=0 \\ \mathbf{Z}/2 & \text{falls } k \equiv_2 1 \\ 0 & \text{falls } k \equiv_2 0 \text{ und } k \geqslant 2 \end{cases}$$

(2) Wir ersetzen $\mathbf{Z}_{(3)}\mathcal{S}_3$ isomorph durch das Bild Λ von $\omega_{3,(3)}$ in $\Gamma := \mathbf{Z}_{(3)} \times \mathbf{Z}_{(3)}^{2\times 2} \times \mathbf{Z}_{(3)}$ (vgl. Aufgabe 35.(4)).

Zunächst definieren wir einige Λ-Moduln.

Wir verwenden das Linksideal $M := \mathbf{Z}_{(3)} \times \left(\begin{smallmatrix} 0&0\\0&0 \end{smallmatrix}\right) \times 0 \subseteq \Gamma$, welches durch Einschränkung der Operation von Γ auf Λ ein Λ-Modul wird, als isomorphe Kopie des trivialen Moduls.

Sei $N := 0 \times \left(\begin{smallmatrix} 0&0\\0&0 \end{smallmatrix}\right) \times \mathbf{Z}_{(3)}$.

Sei $P := \{(a, \left(\begin{smallmatrix} b&0\\d&0 \end{smallmatrix}\right), 0) \in \Gamma \;:\; a \equiv_3 b,\ d \equiv_3 0\}$. Es ist P der zum Idempotent $e_P := (1, \left(\begin{smallmatrix} 1&0\\0&0 \end{smallmatrix}\right), 0) \in \Lambda$ gehörige projektive Λ-Modul, i.e. $P = \Lambda e_P$.

Sei $Q := \{(0, \left(\begin{smallmatrix} 0&c\\0&e \end{smallmatrix}\right), f) \in \Gamma \;:\; e \equiv_3 f\}$. Es ist Q der zum Idempotent $e_Q := (0, \left(\begin{smallmatrix} 0&0\\0&1 \end{smallmatrix}\right), 1) \in \Lambda$ gehörige projektive Λ-Modul, i.e. $Q = \Lambda e_Q$.

Sei $U := \{(0, \left(\begin{smallmatrix} 0&c\\0&e \end{smallmatrix}\right), 0) \in \Gamma \;:\; a,\, e \in \mathbf{Z}_{(3)} \text{ beliebig}\}$.

Sei $V := \{(0, \left(\begin{smallmatrix} b&0\\d&0 \end{smallmatrix}\right), 0) \in \Gamma \;:\; d \equiv_3 0\}$. Es ist V kein Γ-Modul, wohl aber ein Λ-Modul. I.e. der angegebene $\mathbf{Z}_{(3)}$-Teilmodul von Γ geht unter Linksmultiplikation mit Elementen aus Λ in sich.

Wir haben folgende kurz exakte Sequenzen.

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\iota_U} & P & \xrightarrow{\pi_M} & M \\ (0, \left(\begin{smallmatrix} 0&c\\0&e \end{smallmatrix}\right), 0) & \longmapsto & (0, \left(\begin{smallmatrix} 3c&0\\3e&0 \end{smallmatrix}\right), 0) & & \\ & & (a, \left(\begin{smallmatrix} b&0\\d&0 \end{smallmatrix}\right), 0) & \longmapsto & (a, \left(\begin{smallmatrix} 0&0\\0&0 \end{smallmatrix}\right), 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{\iota_N} & Q & \xrightarrow{\pi_U} & U \\ (0, \left(\begin{smallmatrix} 0&0\\0&0 \end{smallmatrix}\right), f) & \longmapsto & (0, \left(\begin{smallmatrix} 0&0\\0&0 \end{smallmatrix}\right), 3f) & & \\ & & (0, \left(\begin{smallmatrix} 0&c\\0&e \end{smallmatrix}\right), f) & \longmapsto & (0, \left(\begin{smallmatrix} 0&c\\0&e \end{smallmatrix}\right), 0) \end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccc}
V & \xrightarrow{\iota_V} & Q & \xrightarrow{\pi_N} & N \\
(0, \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, 0) & \longmapsto & (0, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, 0) & & \\
 & & (0, \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & e \end{pmatrix}, f) & \longmapsto & (0, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
M & \xrightarrow{\iota_M} & P & \xrightarrow{\pi_V} & V \\
(a, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0) & \longmapsto & (3a, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0) & & \\
 & & (a, \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, 0) & \longmapsto & (0, \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, 0)
\end{array}
$$

Sei $d_U := \pi_U \iota_U$, sei $d_N := \pi_N \iota_N$, sei $d_V := \pi_V \iota_V$, und sei $d_M := \pi_M \iota_M$.
Zusammensetzen von exakten Sequenzen liefert die 4-periodische projektive Auflösung

$$
\cdots \longrightarrow P \xrightarrow{d_M} P \xrightarrow{d_V} Q \xrightarrow{d_N} Q \xrightarrow{d_U} P \xrightarrow{d_M} P \xrightarrow{d_V} Q \xrightarrow{d_N} Q \xrightarrow{d_U} P
$$

von M.
Lösen wir hier nun gleich einen Teil von (3) und (4) und berechnen für gegebenes $k \geqslant 0$ die Gruppen $\mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3; \mathbf{Z}_{(3)})$ und $\mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3; \mathbf{Z}_{(3)})$.
Allgemein ist

$$
{}_{\Lambda}(P, M) \; = \; \mathbf{Z}_{(3)}\langle \pi_M \rangle \; \simeq \; \mathbf{Z}_{(3)}
$$

als $\mathbf{Z}_{(3)}$-Moduln. Denn ist $P \xrightarrow{\varphi} M$ ein Morphismus, und ist $(1, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right))\varphi = (r, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), 0) \in M$, so folgen

$$
\begin{array}{rcccl}
(0, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right), 0)\varphi & = & (0, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right), 0)(1, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right))\varphi & = & 0 \\
(0, \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), 0)\varphi & = & (0, \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), 0)(1, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right))\varphi & = & 0 \, .
\end{array}
$$

Somit stimmen φ und $r \cdot \pi_M$ auf einer $\mathbf{Z}_{(3)}$-linearen Basis von P überein.
Ferner ist

$$
{}_{\Lambda}(Q, M) \; = \; 0 \, .
$$

Denn ist $Q \xrightarrow{\psi} M$ ein Morphismus, so ist stets

$$
(0, \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & e \end{smallmatrix}\right), f)\psi \; = \; (0, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \times 1) \underbrace{\left((0, \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & e \end{smallmatrix}\right), f)\psi\right)}_{\in M} \; = \; 0 \, .
$$

Schließlich bemerken wir, daß M auch ein Λ-Rechtsmodul ist, welcher eine isomorphe Kopie des trivialen $\mathbf{Z}_{(3)}\mathcal{S}_3$-Rechtsmoduls darstellt, sowie, daß

$$
\begin{array}{ccccc}
M & \otimes_{\Lambda} & P & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{Z}_{(3)} \\
(r, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), 0) & \otimes & (a, \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, 0) & \longmapsto & ra \\
(r, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), 0) & \otimes & (1, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), 0) & \longleftarrow\!\shortmid & r
\end{array}
$$

als $\mathbf{Z}_{(3)}$-Moduln, als auch, daß $M \otimes_{\Lambda} Q \simeq 0$, da stets

$$
(r, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), 0) \otimes (0, \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & e \end{smallmatrix}\right), f) \; = \; (r, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), 0)(0, \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & e \end{smallmatrix}\right), f) \otimes (0, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1) \; = \; 0 \, .
$$

Anwenden von ${}_{\Lambda}(-, M)$ auf unsere projektive Auflösung und isomorphe Ersetzung liefert den Komplex

$$
\cdots \longleftarrow \mathbf{Z}_{(3)} \xleftarrow{3} \mathbf{Z}_{(3)} \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow \mathbf{Z}_{(3)} \xleftarrow{3} \mathbf{Z}_{(3)} \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow \mathbf{Z}_{(3)}
$$

Somit ist

$$
\mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3; \mathbf{Z}_{(3)}) \; \simeq \; \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{Z}_{(3)} & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{falls } k \equiv_4 1, 2, 3 \\ \mathbf{Z}/3 & \text{falls } k \equiv_4 0 \text{ und } k \geqslant 4 \end{array} \right.
$$

Anwenden von $M \otimes_\Lambda =$ auf unsere projektive Auflösung und isomorphe Ersetzung liefert den Komplex

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{Z}_{(3)} \xrightarrow{3} \mathbf{Z}_{(3)} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{Z}_{(3)} \xrightarrow{3} \mathbf{Z}_{(3)} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{Z}_{(3)}$$

Somit ist

$$\mathrm{H}_k(\mathcal{S}_3; \mathbf{Z}_{(3)}) \;\simeq\; \begin{cases} \mathbf{Z}_{(3)} & \text{falls } k = 0 \\ \mathbf{Z}/3 & \text{falls } k \equiv_4 3 \\ 0 & \text{falls } k \equiv_4 0,\, 1,\, 2 \text{ und } k \geqslant 1 \end{cases}$$

(3) Teilresultate wurden in (1, 2) bereits ausgerechnet.

Es ist nun zunächst $\mathrm{H}^0(\mathcal{S}_3) = \mathbf{Z}^{\mathcal{S}_3} = \mathbf{Z}$.

Sei $k \geqslant 1$. Mit 39 (1) ist $\mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3)$ eine endliche abelsche Gruppe, für die nach 36 (2) dazuhin $|\mathcal{S}_3| \cdot \mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3) = 0$ ist. Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen und mit 33 (3) wird

$$\mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3) \;\simeq\; \mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3)_{(2)} \oplus \mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3)_{(3)} \;\simeq\; \mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3; \mathbf{Z}_{(2)}) \oplus \mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3; \mathbf{Z}_{(3)}) \,.$$

Insgesamt ist also

$$\mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3) \;\simeq\; \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{falls } k = 0 \\ \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/3 & \text{falls } k \equiv_4 0 \text{ und } k \geqslant 4 \\ 0 & \text{falls } k \equiv_4 1 \\ \mathbf{Z}/2 & \text{falls } k \equiv_4 2 \\ 0 & \text{falls } k \equiv_4 3\,. \end{cases}$$

(4) Teilresultate wurden in (1, 2) bereits ausgerechnet.

Es ist nun zunächst $\mathrm{H}_0(\mathcal{S}_3) = \mathbf{Z}_{\mathcal{S}_3} = \mathbf{Z}$.

Sei $k \geqslant 1$. Mit 39 (1) ist $\mathrm{H}_k(\mathcal{S}_3)$ eine endliche abelsche Gruppe, für die nach 36 (3) dazuhin $|\mathcal{S}_3| \cdot \mathrm{H}_k(\mathcal{S}_3) = 0$ ist. Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen und mit 33 (3) wird

$$\mathrm{H}_k(\mathcal{S}_3) \;\simeq\; \mathrm{H}_k(\mathcal{S}_3)_{(2)} \oplus \mathrm{H}_k(\mathcal{S}_3)_{(3)} \;\simeq\; \mathrm{H}_k(\mathcal{S}_3; \mathbf{Z}_{(2)}) \oplus \mathrm{H}_k(\mathcal{S}_3; \mathbf{Z}_{(3)}) \,.$$

Insgesamt ist also

$$\mathrm{H}_k(\mathcal{S}_3) \;\simeq\; \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{falls } k \equiv_4 0 \text{ und } k \geqslant 4 \\ \mathbf{Z}/2 & \text{falls } k \equiv_4 1 \\ 0 & \text{falls } k \equiv_4 2 \\ \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/3 & \text{falls } k \equiv_4 3\,. \end{cases}$$

Aufgabe 41. Wir verwenden die Bezeichnungen von Aufgabe 38 und ihrer Lösung.

Sei allgemein R ein kommutativer Ring. Es ist ${}_{RC_n}(RC_n, R) = R\langle\varepsilon\rangle \simeq R$, wobei $\varepsilon : 1 \longmapsto 1$.

Anwenden von ${}_{RC_n}(-, R)$ auf die in Aufgabe 38.(1) gefundene periodische projekive Auflösung

$$P \;:=\; (\cdots \longrightarrow RC_n \xrightarrow{u} RC_n \xrightarrow{v} RC_n \xrightarrow{u} RC_n \xrightarrow{v} RC_n)$$

gibt den Komplex

$${}_{RC_n}(P, R) \;=\; (\cdots \longleftarrow R \xleftarrow{n} R \xleftarrow{0} R \xleftarrow{n} R \xleftarrow{0} R)\,.$$

Bezeichne $R[n] := \{r \in R \;:\; nr = 0\}$. Es wird

$$\mathrm{H}^s(C_n; R) \;\simeq\; \begin{cases} R & \text{falls } s = 0 \\ R[n] & \text{falls } s \equiv_2 1 \\ R/nR & \text{falls } s \equiv_2 0,\, s \geqslant 2 \end{cases}$$

Wir wollen nun die in Aufgabe 38.(2) gefundenen Morphismen f und g zur Erstellung einer isomorphen Kopie des Cohomologierings $\mathrm{H}^*(G;R)$ verwenden.

Seien $s,\, t \geqslant 0$. Seien $\eta,\, \zeta \in R$. Ist $\eta\varepsilon \in \mathrm{Z}^s({}_{RC_n}(P,R))$, und ist $\zeta\varepsilon \in \mathrm{Z}^t({}_{RC_n}(P,R))$, so müssen wir zur Berechnung ihres Cupproduktes zur Standardauflösung wechseln, denn die Multiplikationsregel war für Zykel in Standardform erklärt. Dieser Wechsel erfolgt vermittels Verkettung mit den Komplexmorphismen f und g, welche zwischen den Komplexen ${}_{RC_n}(\mathrm{Bar}_{C_n;R}, R)$ und ${}_{RC_n}(P,R)$ wechselseitig inverse Isomorphismen in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$ darstellen, und also auf deren Homologiemoduln wechselseitig inverse Isomorphismen induzieren.

Wir müssen also in die Standardform wechseln, dort multiplizieren, und wieder zurückwechseln. In anderen Worten, wir müssen $(f_s(\eta\varepsilon)) \cup (f_t(\zeta\varepsilon))$ wieder nach $\mathrm{Z}^{s+t}({}_{RC_n}(P,R))$ abbilden. Um schließlich noch von ${}_{RC_n}(P_{s+t}, R) = {}_{RC_n}(RC_n, R)$ isomorph nach R abzubilden, müssen wir $1 \in P_{s+t} = RC_n$ einsetzen. Es gilt also,

$$((1)g_{s+t})(f_s(\eta\varepsilon) \cup f_t(\zeta\varepsilon)) \;\in\; R$$

zu berechnen. Dieses Element ist dann für $s+t = 0$ schlicht in R; für $s+t \equiv_2 0$, $s+t \geqslant 2$ ein Repräsentant von $\eta \cup \zeta$ in R/nR; und für $s+t \equiv_2 1$ ist es nach Konstruktion in $R[n]$.

Wir stellen einige Rechnungen voran. Sei $u \geqslant 1$. Seien $i_j \in [0, n-1]$ für $j \in [1,u]$. Sei $i \in [0, n-1]$.

Es wird

$$\begin{array}{rl} & 1 \otimes c^{i_1} \otimes c^{i_1+1} \otimes c^{i_2} \otimes c^{i_2+1} \otimes \cdots \otimes c^{i_u} \otimes c^{i_u+1} \\ = & [c^{i_1}, c, c^{\overline{i_2-i_1-1}}, c, c^{\overline{i_3-i_2-1}}, c, \ldots, c^{\overline{i_u-i_{u-1}-1}}, c] \\ \stackrel{f_{2u}}{\longmapsto} & \begin{cases} 1 & \text{falls } i_1 = i_2 = \cdots = i_u = n-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

Es wird

$$\begin{array}{rl} & 1 \otimes c \otimes c^{i_1} \otimes c^{i_1+1} \otimes c^{i_2} \otimes c^{i_2+1} \otimes \cdots \otimes c^{i_{u-1}} \otimes c^{i_{u-1}+1} \otimes c^{i} \\ = & [c, c^{\overline{i_1-1}}, c, c^{\overline{i_2-i_1-1}}, c, \ldots, c^{\overline{i_{u-1}-i_{u-2}-1}}, c, c^{\overline{i-i_{u-1}-1}}] \\ \stackrel{f_{2u}}{\longmapsto} & \begin{cases} 1 & \text{falls } i_1 = i_2 = \cdots = i_{u-1} = i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

Es wird

$$\begin{array}{rl} & 1 \otimes c \otimes c^{i_1} \otimes c^{i_1+1} \otimes c^{i_2} \otimes c^{i_2+1} \otimes \cdots \otimes c^{i_u} \otimes c^{i_u+1} \\ = & [c, c^{\overline{i_1-1}}, c, c^{\overline{i_2-i_1-1}}, c, c^{\overline{i_3-i_2-1}}, c, \ldots, c^{\overline{i_u-i_{u-1}-1}}, c] \\ \stackrel{f_{2u+1}}{\longmapsto} & \begin{cases} 1 & \text{falls } i_1 = i_2 = \cdots = i_u = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

Es wird

$$\begin{array}{rl} & 1 \otimes c^{i_1} \otimes c^{i_1+1} \otimes c^{i_2} \otimes c^{i_2+1} \otimes \cdots \otimes c^{i_u} \otimes c^{i_u+1} \otimes c^{i} \\ = & [c^{i_1}, c, c^{\overline{i_1-1}}, c, c^{\overline{i_2-i_1-1}}, c, c^{\overline{i_3-i_2-1}}, c, \ldots, c^{\overline{i-i_{u-1}-1}}] \\ \stackrel{f_{2u+1}}{\longmapsto} & c^{]0,i]} \begin{cases} 1 & \text{falls } i_1 = i_2 = \cdots = i_u = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

Fall $s \equiv_2 0$, $t \equiv_2 0$. Schreibe $s =: 2k$ und $t =: 2l$. Es wird

$$\begin{array}{rl} & ((1)g_{2k+2l})(f_{2k}(\eta\varepsilon) \cup f_{2l}(\zeta\varepsilon)) \\ = & \eta\zeta \sum_{i \in [0,n-1]} (1 \otimes \xi^{\otimes(k-1)} \otimes c^i \otimes c^{i+1}) f_{2k}\varepsilon \cdot (c^{i+1} \otimes \xi^{\otimes l}) f_{2l}\varepsilon \\ = & \eta\zeta \sum_{i \in [0,n-1]} \partial_{i,n-1} \cdot (c^{i+1}\varepsilon) \\ = & \eta\zeta\,. \end{array}$$

Fall $s \equiv_2 0$, $t \equiv_2 1$. Schreibe $s =: 2k$ und $t =: 2l+1$. Es wird

$$\begin{array}{rl} & ((1)g_{2k+2l+1})(f_{2k}(\eta\varepsilon) \cup f_{2l+1}(\zeta\varepsilon)) \\ = & \eta\zeta \sum_{i\in[0,n-1]} (1 \otimes c \otimes \xi^{\otimes(k-1)} \otimes c^i) f_{2k}\varepsilon \cdot (c^i \otimes c^{i+1} \otimes \xi^{\otimes l}) f_{2l+1}\varepsilon \\ = & \eta\zeta \sum_{i\in[0,n-1]} \partial_{i,0} \cdot (c^i\varepsilon) \\ = & \eta\zeta\ . \end{array}$$

Beachte, daß der Fall $s \equiv_2 1$, $t \equiv_2 0$ wegen graduierter Kommutativität aus diesem Fall folgt.

Fall $s \equiv_2 1$, $t \equiv_2 1$. Schreibe $s =: 2k+1$ und $t =: 2l+1$. Es wird

$$\begin{array}{rl} & ((1)g_{2k+2l+2})(f_{2k}(\eta\varepsilon) \cup f_{2l+1}(\zeta\varepsilon)) \\ = & \eta\zeta \sum_{i\in[0,n-1]} (1 \otimes \xi^{\otimes k} \otimes c^i) f_{2k}\varepsilon \cdot (c^i \otimes c^{i+1} \otimes \xi^{\otimes l}) f_{2l+1}\varepsilon \\ = & \eta\zeta \sum_{i\in[0,n-1]} (c^{]0,i]}\partial_{i,0})\varepsilon \cdot (c^i\varepsilon) \\ = & \eta\zeta n(n-1)/2\ . \end{array}$$

(1) Ist nun $R = \mathbf{Z}$, so ist

$$\mathrm{H}^s(C_n) \;\simeq\; \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{falls } s = 0 \\ 0 & \text{falls } s \equiv_2 1 \\ \mathbf{Z}/n & \text{falls } s \equiv_2 0,\ s \geqslant 2 \end{cases}$$

Schreibe $\chi_{2k} := \varepsilon \in \mathrm{Z}^{2k}({}_{\mathbf{Z}C_n}(P,\mathbf{Z}))$ für $k \geqslant 0$. Das Tupel $(\chi_{2k})_{k\geqslant 0}$ ist ein $\mathbf{Z}$-lineares Erzeugendensystem von $\mathrm{H}^*(C_n)$. Es gilt

$$\chi_{2k} \cup \chi_{2l} \;=\; \chi_{2k+2l}$$

für $k,\ l \geqslant 0$.

Man kann auch einen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}[X]/(nX) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^*(C_n) \\ X & \longmapsto & \chi_2 \end{array}$$

angeben.

(2) Ist nun $R = \mathbf{Z}/n$, so ist

$$\mathrm{H}^s(C_n;\mathbf{Z}/n) \;\simeq\; \mathbf{Z}/n \qquad \text{für} \quad s \geqslant 0$$

Schreibe $\chi_s := \varepsilon \in \mathrm{Z}^s({}_{\mathbf{Z}C_n}(P,\mathbf{Z}/n))$ für $s \geqslant 0$. Das Tupel $(\chi_s)_{s\geqslant 0}$ ist ein $\mathbf{Z}$-lineares Erzeugendensystem von $\mathrm{H}^*(C_n;\mathbf{Z}/n)$.

Es gelten

$$\begin{array}{rcl} \chi_{2k} \cup \chi_{2l} & = & \chi_{2k+2l} \\ \chi_{2k+1} \cup \chi_{2l} & = & \chi_{2k+2l+1} \\ \chi_{2k} \cup \chi_{2l+1} & = & \chi_{2k+2l+1} \\ \chi_{2k+1} \cup \chi_{2l+1} & = & \chi_{2k+2l+2} \cdot n(n-1)/2 \end{array}$$

für $k,\ l \geqslant 0$. I.e. ist $n \equiv_2 1$, so ist $\chi_{2k+1} \cup \chi_{2l+1} = 0$; ist $n \equiv_2 0$, so ist $\chi_{2k+1} \cup \chi_{2l+1} = \chi_{2k+2l+2} \cdot n/2$.

Für $n \equiv_2 1$ ist

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{Z}/n)[X,Y]/(Y^2) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^*(C_n;\mathbf{Z}/n) \\ X & \longmapsto & \chi_2 \\ Y & \longmapsto & \chi_1\ , \end{array}$$

für $n \equiv_2 0$ ist

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{Z}/n)[X,Y]/(Y^2 - \frac{n}{2}X) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^*(C_n;\mathbf{Z}/n) \\ X & \longmapsto & \chi_2 \\ Y & \longmapsto & \chi_1\ . \end{array}$$

(3) Die Aussage ist falsch.

Allgemein folgt zwar aus der graduierten Kommutativität von $\mathrm{H}^*(G;R)$ und dem Grad $2k+1$ von χ, daß

$$\chi \cup \chi \;=\; (-1)^{(2k+1)(2k+1)} \chi \cup \chi\;,$$

i.e., daß $2(\eta \cup \eta) = 0$.

In (2) haben wir aber für $n \equiv_2 0$ in den dortigen Bezeichnungen $\chi_{2k+1} \cup \chi_{2k+1} = \frac{n}{2} \cdot \chi_{4k+2} \neq 0$ erhalten.

Dahingegen ist auch dort natürlich $2(\chi_{2k+1} \cup \chi_{2k+1}) = n \cdot \chi_{4k+2} = 0$.

Aufgabe 42. Sei $G := \mathcal{S}_3$, sei $H := \langle (2,3) \rangle$. Schreibe auch $c := (2,3)$. Wir behaupten zunächst, daß $M \simeq \mathbf{Z}{\uparrow}_H^G$ als $\mathbf{Z}G$-Moduln.

Sei eine $\mathbf{Z}H$-lineare Abbildung gegeben durch $\mathbf{Z} \longrightarrow M{\downarrow}_H$, $1 \longmapsto e_1$, was wegen $e_1 \in M^H$ wohldefiniert ist. Dies induziert mit Adjunktion eine $\mathbf{Z}G$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}{\uparrow}_H^G & \longrightarrow & M \\ \sigma \otimes 1 & \longmapsto & \sigma \cdot e_1 \;=\; e_{1\sigma^{-1}}\;. \end{array}$$

Diese Abbildung ist surjektiv, da alle Basiselemente getroffen werden. Da $\mathrm{rk}_{\mathbf{Z}}\, \mathbf{Z}{\uparrow}_H^G = [G:H] \cdot \mathrm{rk}_{\mathbf{Z}}\, \mathbf{Z} = 3 = \mathrm{rk}_{\mathbf{Z}}\, M$, liegt ein Isomorphismus vor.

Die allgemeine Tatsache, die hinter diesem Isomorphismus steht, ist, daß für eine Gruppe G, eine transitive G-Menge X und ein $x \in X$ wir einen Isomorphismus $G/\mathrm{C}_G(x) \xrightarrow{\sim} X$, $g\mathrm{C}_G(x) \longmapsto gx$ haben, und folglich auch einen Isomorphismus $\mathbf{Z}(G/\mathrm{C}_G(x)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}X$ von $\mathbf{Z}G$-Moduln. Ferner ist $\mathbf{Z}(G/H) \simeq \mathbf{Z}{\uparrow}_H^G$, $gH \longmapsto g \otimes 1$ für eine Untergruppe $H \leqslant G$.

Eckmann-Shapiro gibt nun

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3, M) & \simeq & \mathrm{H}^k(G, \mathbf{Z}{\uparrow}_H^G) & \simeq & \mathrm{H}^k(H) \\ \mathrm{H}_k(\mathcal{S}_3, M) & \simeq & \mathrm{H}_k(G, \mathbf{Z}{\uparrow}_H^G) & \simeq & \mathrm{H}_k(H) \end{array}$$

für $k \geqslant 0$.

Aus der Lösung zu Aufgabe 38.(1) entnehmen wir die periodische projekive Auflösung

$$P \;:=\; (\cdots \xrightarrow{u} \mathbf{Z}H \xrightarrow{v} \mathbf{Z}H \xrightarrow{u} \mathbf{Z}H \xrightarrow{v} \mathbf{Z}H)$$

von $\mathbf{Z}$ über $\mathbf{Z}H$, wobei $1 \overset{u}{\longmapsto} 1 + c$, $1 \overset{v}{\longmapsto} 1 - c$.

Wie in Aufgabe 41.(1) gibt Anwenden von ${}_{\mathbf{Z}H}(-, \mathbf{Z})$ auf P den Komplex

$${}_{\mathbf{Z}H}(P, \mathbf{Z}) \;=\; (\cdots \xleftarrow{2} \mathbf{Z} \xleftarrow{0} \mathbf{Z} \xleftarrow{2} \mathbf{Z} \xleftarrow{0} \mathbf{Z}),$$

und folglich

$$\mathrm{H}^k(\mathcal{S}_3, M) \;\simeq\; \mathrm{H}^k(H) \;\simeq\; \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{falls } k \equiv_2 1 \\ \mathbf{Z}/2 & \text{falls } k \equiv_2 0 \text{ und } k \geqslant 2\;. \end{cases}$$

Ferner gibt Anwenden von $- \otimes_{\mathbf{Z}H} \mathbf{Z}$ auf P den Komplex

$$P \otimes_{\mathbf{Z}H} \mathbf{Z} \;=\; (\cdots \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z}),$$

und folglich

$$\mathrm{H}_k(\mathcal{S}_3, M) \;\simeq\; \mathrm{H}_k(H) \;\simeq\; \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{falls } k = 0 \\ \mathbf{Z}/2 & \text{falls } k \equiv_2 1 \\ 0 & \text{falls } k \equiv_2 0 \text{ und } k \geqslant 2\,. \end{cases}$$

Aufgabe 43. Mit Eckmann-Shapiro genügt es für die ersten beiden Isomorphismen zu zeigen, daß $({}_R(Y, X\!\downarrow_H))\!\uparrow^G$ und ${}_R(Y\!\uparrow^G, X)$ als RG-Moduln isomorph sind.

Da $[G:H] < \infty$, ist dies wiederum äquivalent damit, daß $({}_R(Y, X\!\downarrow_H))\!\Uparrow^G$ und ${}_R(Y\!\uparrow^G, X)$ als RG-Moduln isomorph sind.

I) Wir konstruieren zunächst eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} {}_{RH}(RG,\ {}_R(Y, X\!\downarrow_H)) & \longrightarrow & {}_R(RG \otimes_{RH} Y, X) \\ \varphi & \longmapsto & \Big(g \otimes y \longmapsto g\big(\,(y)((g^-)\varphi)\,\big)\Big)\,. \end{array}$$

Um zu zeigen, daß $g \otimes y \longmapsto g((y)((g^-)\varphi))$ wohldefiniert ist, vergleichen wir das Bild von $gh \otimes y$ und $g \otimes hy$ für $h \in H$. Ersteres ergibt sich zu

$$gh \otimes y \;\longmapsto\; gh((y)((h^- g^-)\varphi)) \;=\; gh((y)(h^-(g^-)\varphi)) \;=\; ghh^-(hy)((g^-)\varphi) \;=\; g(hy)((g^-)\varphi)\;,$$

und zweiteres ebenfalls zu

$$g \otimes hy \;\longmapsto\; g((hy)((g^-)\varphi))\;.$$

Zeigen wir, daß die Abbildung RG-linear ist. Sei hierzu $g' \in G$ gegeben. Es bildet

$$g \otimes y \overset{g'\varphi}{\longmapsto} g\big(\,(y)((g^-)(g'\varphi))\,\big) \;=\; g\big(\,(y)((g^- g')\varphi)\,\big)\;,$$

ab, und dies resultiert auch aus

$$g'\Big(g{\otimes}y \longmapsto g\big(\,(y)((g^-)\varphi)\,\big)\Big) \;=\; \Big(g{\otimes}y \longmapsto g'^- g{\otimes}y \longmapsto g'^- g\big(\,(y)((g^- g')\varphi)\,\big) \longmapsto g' g'^- g\big(\,(y)((g^- g')\varphi)\,\big)\Big)\,.$$

II) Wir konstruieren nun eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} {}_R(RG \otimes_{RH} Y, X) & \longrightarrow & {}_{RH}(RG,\ {}_R(Y, X\!\downarrow_H)) \\ \psi & \longmapsto & \Big(g \longmapsto \big(y \longmapsto g((g^- \otimes y)\psi)\,\big)\Big)\,. \end{array}$$

Um zu zeigen, daß $g \longmapsto (y \longmapsto g((g^- \otimes y)\psi))$ eine RH-lineare Abbildung ist, sei $h \in H$ gegeben. Es kommt hg auf $y \longmapsto hg((g^- h^- \otimes y)\psi))y$. Auf der anderen Seite bildet $h(y \longmapsto g((g^- \otimes y)\psi))$ das Element y auf $hg(g^- \otimes h^- y)\psi$ ab, was dasselbe ist.

III) Bleibt zu zeigen, daß sich die beiden Abbildungen gegenseitig invertieren. Daß zweitere RG-linear ist, ist dann eine Folgerung.

Sei $\varphi \in {}_{RH}(RG,\ {}_R(Y, X\!\downarrow_H))$. Es kommt φ auf $g \otimes y \longmapsto g\big((y)((g^-)\varphi)\big)$, was in umgekehrter Richtung auf eine Abbildung geschickt wird, deren Bild von $g \in G$ ein Element $y \in Y$ schickt nach

$$g(\,(g^- \otimes y)[g' \otimes y' \longmapsto g'((y')((g'^-)\varphi))]\,) \;=\; g(\,g^-((y)((g)\varphi))\,) \;=\; (y)((g)\varphi)\;,$$

i.e. wieder auf φ.

Sei $\psi \in {}_R(RG \otimes_{RH} Y, X)$. Es kommt ψ auf $g \longmapsto (y \longmapsto g((g^- \otimes y)\psi))$, was in umgekehrter Richtung auf eine Abbildung geschickt wird, die $g \otimes y$ abbildet nach

$$g(\,(y)((g^-)[g' \longmapsto (y' \longmapsto g'((g'^- {\otimes} y')\psi))])\,) \;=\; g(\,(y)[y' \longmapsto g^-((g{\otimes}y')\psi)]\,) \;=\; g(\,g^-(g{\otimes}y)\psi\,) \;=\; (g{\otimes}y)\psi\;,$$

i.e. wieder auf ψ.

Mit Eckmann-Shapiro genügt es für die letzten beiden Isomorphismen zu zeigen, daß $(Y \otimes_R X\!\downarrow_H)\!\uparrow^G$ und $Y\!\uparrow^G \otimes_R X$ als RG-Moduln isomorph sind.

Wir setzen

$$\begin{array}{ccccccccccccc} RG & \otimes_{RH} & (Y & \otimes_R & X\!\downarrow_H) & \longleftrightarrow & (RG & \otimes_{RH} & Y) & \otimes_R & X \\ g & \otimes & (y & \otimes & x) & \longmapsto & (g & \otimes & y) & \otimes & gx\,. \\ g & \otimes & (y & \otimes & g^- x) & \longleftarrow\!\!\shortmid & (g & \otimes & y) & \otimes & x\,. \end{array}$$

Für $h \in H$ kommt $gh\otimes(y\otimes x)$ auf $(gh\otimes y)\otimes(gh)x$, während $g\otimes h(y\otimes x) = g\otimes(hy\otimes hx)$ auf $(g\otimes hy)\otimes g(hx)$ kommt, was dasselbe ist.

Umgekehrt, für $h \in H$ kommt $(gh\otimes y)\otimes x$ auf $gh\otimes(y\otimes h^- g^- x)$, während $(g\otimes hy)\otimes x$ auf $g\otimes(hy\otimes g^- x)$, was dasselbe ist.

Die Abbildungen invertieren sich wechselseitig.

Die Richtung $\longmapsto$ ist RG-linear, da für $g' \in G$ das Element $g'(g \otimes (y \otimes x)) = g'g \otimes (y \otimes x)$ auf $(g'g \otimes y) \otimes g'gx = g'((g \otimes y) \otimes gx)$ kommt.

Aufgabe 44. Sei P eine projektive Auflösung von X über RG. Nach Definition von $\mathrm{Tr}\!\uparrow_L^H$ etc. auf Ext^k vermittels H^k des entsprechenden Morphismus auf den Hom-Moduln genügt es zu zeigen, daß das angegebene Dreieck auf den Komplexen kommutiert, die nach Anwenden des Hom-Funktors ggf. nach vorherigem Einschränken auf die jeweilige Untergruppe entstehen. Dies wiederum kann punktweise gezeigt werden.

Wir behaupten also, es ist

$$\Big({}_{RL}(P\!\downarrow_L, X'\!\downarrow_L) \xrightarrow{\mathrm{Tr}\uparrow_L^H} {}_{RH}(P\!\downarrow_H, X'\!\downarrow_H) \xrightarrow{\mathrm{Tr}\uparrow_H^G} {}_{RG}(P, X') \Big) \;=\; \Big({}_{RL}(P\!\downarrow_L, X'\!\downarrow_L) \xrightarrow{\mathrm{Tr}\uparrow_L^G} {}_{RG}(P, X') \Big)\,.$$

für einen RG-Modul P. Sei $P\!\downarrow_L \xrightarrow{f} X'\!\downarrow_L$ eine RL-lineare Abbildung. Mit der expliziten Formel wird für $p \in P$

$$\begin{array}{rcl} (p)((f)\,\mathrm{Tr}\!\uparrow_L^H \mathrm{Tr}\!\uparrow_H^G) & = & \sum_{g\in H\backslash G} g^{-1}\Big((gp)((f)\,\mathrm{Tr}\!\uparrow_L^H)\Big) \\ & = & \sum_{g\in H\backslash G} g^{-1}\Big(\sum_{h\in L\backslash H} h^{-1}((hgp)f)\Big) \\ & = & \sum_{g\in H\backslash G}\sum_{h\in L\backslash H} (hg)^{-1}((hgp)f)\,, \end{array}$$

und wir sind fertig mit der Bemerkung, daß

$$G \;=\; \bigsqcup_{g\in H\backslash G} Hg \;=\; \bigsqcup_{g\in H\backslash G}\left(\bigsqcup_{h\in L\backslash H} Lh\right) g \;=\; \bigsqcup_{g\in H\backslash G}\bigsqcup_{h\in L\backslash H} Lhg\,.$$

Aufgabe 45. Sei $n/m =: d$. Sei $C_m = \langle c^d\rangle \leqslant \langle c\rangle = C_n$.

Wir haben, in den Bezeichnungen von Aufgabe 38, eine projektive Auflösung

$$P \;:=\; (\cdots \longrightarrow RC_n \xrightarrow{u} RC_n \xrightarrow{v} RC_n \xrightarrow{u} RC_n \xrightarrow{v} RC_n)$$

von R über RC_n. Hierbei ist $1u = c^0 + c^1 + \cdots + c^{n-1}$, und $1v = c - 1$.

Ferner haben wir ganz entsprechend eine projektive Auflösung

$$P' \;:=\; (\cdots \longrightarrow RC_m \xrightarrow{u'} RC_m \xrightarrow{v'} RC_m \xrightarrow{u'} RC_m \xrightarrow{v'} RC_m)$$

von R über RC_m. Hierbei ist $1u' = c^0 + c^d + \cdots + c^{md-d}$, und $1v' = c^d - 1$.

Für $i \in \mathbf{Z}$ schreiben wir $i = d\underline{i} + \overline{i}$ mit $\overline{i} \in [0, d-1]$. Es sei also $\underline{i}$ das Resultat von i bei Division durch d mit Rest, und es sei $\overline{i}$ dieser Rest.

Der (aus theoretischen Gründen existente) Isomorphismus $P\downarrow_{C_m} \xrightarrow{\sim} P'$ in $\mathrm{K}(RC_m\text{-Mod})$, der unter H_0 auf die Identität abgebildet wird, hat (bis auf Homotopie) die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{v} & RC_n\downarrow_{C_m} & \xrightarrow{u} & RC_n\downarrow_{C_m} & \xrightarrow{v} & RC_n\downarrow_{C_m} & \xrightarrow{u} & RC_n\downarrow_{C_m} & \xrightarrow{v} & RC_n\downarrow_{C_m} \\
& & \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\psi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\psi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi} \\
\cdots & \xrightarrow{v'} & RC_m & \xrightarrow{u'} & RC_m & \xrightarrow{v'} & RC_m & \xrightarrow{u'} & RC_m & \xrightarrow{v'} & RC_m\ ,
\end{array}$$

mit

$$\begin{array}{rcl}
RC_n\downarrow_{C_m} & \xrightarrow{\varphi} & RC_m \\
c^i & \longmapsto & c^{d\underline{i}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
RC_n\downarrow_{C_m} & \xrightarrow{\psi} & RC_m \\
c^i & \longmapsto & (\underline{i+1} - \underline{i})c^{d\underline{i}}\ ,
\end{array}$$

wobei $i \in \mathbf{Z}$. Nach Definition sind beide Morphismen RC_m-linear, da verträglich mit der Multiplikation mit c^d. Sei $RC_n \xrightarrow{\varepsilon} R$, $c^i \longmapsto 1$. Sei $RC_m \xrightarrow{\varepsilon'} R$, $c^{di} \longmapsto 1$, wobei $i \in \mathbf{Z}$. Es ist $\varphi \cdot \varepsilon' = \varepsilon \cdot 1_R$. Somit wird in der Tat auf H_0 die Identität induziert, sofern nur ein Morphismus von Komplexen vorliegt.

Zu zeigen ist $v\varphi = \psi v'$. Sei $i \in \mathbf{Z}$. Es wird auf der einen Seite

$$c^i v\varphi \ = \ (c^{i+1} - c^i)\varphi \ = \ c^{d\underline{i+1}} - c^{d\underline{i}}\ ,$$

und auf der anderen Seite

$$c^i\psi v' \ = \ (\underline{i+1} - \underline{i})c^{d\underline{i}}v' \ = \ (\underline{i+1} - \underline{i})(c^{d\underline{i}+d} - c^{d\underline{i}})\ ,$$

was beidesmal nur einen Wert ungleich 0 liefert, falls $i + 1 \equiv_d 0$, und diesenfalls beidesmal $c^{i+1} - c^{i+1-d}$ ergibt.

Zu zeigen ist $u\psi = \varphi u'$. Sei $i \in \mathbf{Z}$. Es wird auf der einen Seite

$$c^i u\psi \ = \ \sum_{i\in[0,n-1]} c^i\psi \ = \ \sum_{i\in[0,n-1]} (\underline{i+1} - \underline{i})c^{d\underline{i}} \ = \ \sum_{j\in[0,m-1]} c^{dj}\ ,$$

und auf der anderen Seite

$$c^i\varphi u' \ = \ c^{d\underline{i}}u' \ = \ \sum_{j\in[0,m-1]} c^{dj}\ .$$

Der (aus theoretischen Gründen existente) Isomorphismus $P\downarrow_{C_m} \xleftarrow{\sim} P'$ in $\mathrm{K}(RC_m\text{-Mod})$, der unter H_0 auf die Identität abgebildet wird, hat (bis auf Homotopie) die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{v} & RC_n\downarrow_{C_m} & \xrightarrow{u} & RC_n\downarrow_{C_m} & \xrightarrow{v} & RC_n\downarrow_{C_m} & \xrightarrow{u} & RC_n\downarrow_{C_m} & \xrightarrow{v} & RC_n\downarrow_{C_m} \\
& & \Big\uparrow{\scriptstyle\xi} & & \Big\uparrow{\scriptstyle\zeta} & & \Big\uparrow{\scriptstyle\xi} & & \Big\uparrow{\scriptstyle\zeta} & & \Big\uparrow{\scriptstyle\xi} \\
\cdots & \xrightarrow{v'} & RC_m & \xrightarrow{u'} & RC_m & \xrightarrow{v'} & RC_m & \xrightarrow{u'} & RC_m & \xrightarrow{v'} & RC_m\ ,
\end{array}$$

mit

$$\begin{array}{rcl}
RC_m & \xrightarrow{\xi} & RC_n\downarrow_{C_m} \\
c^{dj} & \longmapsto & c^{dj}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
RC_m & \xrightarrow{\zeta} & RC_n\downarrow_{C_m} \\
c^{dj} & \longmapsto & \sum_{i\in[0,d-1]} c^{dj+i}\ ,
\end{array}$$

wobei $j \in \mathbf{Z}$. Nach Definition sind beide Morphismen RC_m-linear, da verträglich mit der Multiplikation mit c^d. Wir halten fest, daß $\xi \cdot \varepsilon = \varepsilon' \cdot 1_R$.

Zu zeigen ist $\zeta v = v'\xi$. Sei $j \in \mathbf{Z}$. Es wird auf der einen Seite

$$c^{dj}\zeta v \;=\; \left(\sum_{i\in[0,d-1]} c^{dj+i}\right) v \;=\; \sum_{i\in[0,d-1]} (c^{dj+i+1} - c^{dj+i}) = c^{dj+d} - c^{dj}\;,$$

und auf der anderen Seite

$$c^{dj}v'\xi \;=\; (c^{dj+d} - c^{dj})\xi \;=\; c^{dj+d} - c^{dj}\;.$$

Zu zeigen ist $\xi u = u'\zeta$. Sei $j \in \mathbf{Z}$. Es wird auf der einen Seite

$$c^{dj}\xi u \;=\; c^{dj}u \;=\; \sum_{i\in[0,n]} c^i\;,$$

und auf der anderen Seite

$$c^{dj}u'\zeta \;=\; \Big(\sum_{j\in[0,m]} c^{dj}\Big)\zeta \;=\; \sum_{j\in[0,m]}\sum_{i\in[0,d-1]} c^{dj+i} \;=\; \sum_{i\in[0,n]} c^i\;.$$

Wir identifizieren nun ${}_{RC_m}(RC_m, R)$ mit R, indem wir einem Morphismus das Bild von $1 \in RC_n$ zuordnen. Genauso identifizieren wir ${}_{RC_n}(RC_n, R)$ mit R.

Das Kompositum

$$R \;=\; {}_{RC_m}(RC_m, R) \xrightarrow{\varphi(-)} {}_{RC_m}(RC_n{\downarrow}_{C_m}, R{\downarrow}_{C_m}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}\uparrow_{C_m}^{C_n}} {}_{RC_n}(RC_n, R) \;=\; R$$

schickt 1 zunächst auf die Abbildung $RC_n{\downarrow}_{C_m} \xrightarrow{e} R{\downarrow}_{C_m}$, $c^i \longmapsto 1$, und sodann unter $\mathrm{Tr}\uparrow_{C_m}^{C_n}$ auf

$$\sum_{i\in[0,d-1]} c^{-i}((c^i\cdot 1)e) \;=\; \sum_{i\in[0,d-1]} c^{-i}\cdot 1 \;=\; d\;.$$

Das Kompositum

$$R \;=\; {}_{RC_m}(RC_m, R) \xrightarrow{\psi(-)} {}_{RC_m}(RC_n{\downarrow}_{C_m}, R{\downarrow}_{C_m}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}\uparrow_{C_m}^{C_n}} {}_{RC_n}(RC_n, R) \;=\; R$$

schickt 1 zunächst auf die Abbildung $RC_n{\downarrow}_{C_m} \xrightarrow{f} R{\downarrow}_{C_m}$, $c^i \longmapsto (\underline{i+1} - \underline{i})$, und sodann unter $\mathrm{Tr}\uparrow_{C_m}^{C_n}$ auf

$$\sum_{i\in[0,d-1]} c^{-i}((c^i\cdot 1)f) \;=\; \sum_{i\in[0,d-1]} c^{-i}\cdot(\underline{i+1} - \underline{i}) \;=\; \sum_{i\in[0,d-1]} (\underline{i+1} - \underline{i}) \;=\; 1\;.$$

In umgekehrter Richtung schickt das Kompositum

$$R \;=\; {}_{RC_m}(RC_m, R) \xleftarrow{\xi(-)} {}_{RC_m}(RC_n{\downarrow}_{C_m}, R{\downarrow}_{C_m}) \xleftarrow{\mathrm{Res}\downarrow_{C_m}^{C_n}} {}_{RC_n}(RC_n, R) \;=\; R$$

die 1 zunächst auf die Abbildung $RC_n{\downarrow}_{C_m} \xrightarrow{e'} R{\downarrow}_{C_m}$, $c^i \longmapsto 1$, und sodann unter $\xi(-)$ auf

$$(1)\xi e' \;=\; 1e' \;=\; 1\;.$$

Ferner schickt das Kompositum

$$R \;=\; {}_{RC_m}(RC_m, R) \xleftarrow{\zeta(-)} {}_{RC_m}(RC_n{\downarrow}_{C_m}, R{\downarrow}_{C_m}) \xleftarrow{\mathrm{Res}\downarrow_{C_m}^{C_n}} {}_{RC_n}(RC_n, R) \;=\; R$$

die 1 zunächst auf die Abbildung $RC_n{\downarrow_{C_m}} \xrightarrow{e'} R{\downarrow_{C_m}}$, $c^i \longmapsto 1$, und sodann unter $\zeta(-)$ auf

$$(1)\zeta e' \;=\; \left(\sum_{i\in[0,d-1]} c^i\right) e' \;=\; d\,.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{tikzcd}
\cdots & R \arrow[l, "n"'] \arrow[d, "d"] & R \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "1"] & R \arrow[l, "n"'] \arrow[d, "d"] & R \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "1"] & \mathrm{Res}{\downarrow}_{C_m}^{C_n} \\
\cdots & R \arrow[l, "m"'] \arrow[d, "1"] & R \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "d"] & R \arrow[l, "m"'] \arrow[d, "1"] & R \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "d"] & \mathrm{Tr}{\uparrow}_{C_m}^{C_n} \\
\cdots & R \arrow[l, "n"'] & R \arrow[l, "0"'] & R \arrow[l, "n"'] & R\,. \arrow[l, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Ist also $k = 0$, so ist $\mathrm{H}^0(C_m; R) = R$ und $\mathrm{H}^0(C_n; R) = R$. Die von $\mathrm{Tr}{\uparrow}_{C_m}^{C_n}$ induzierte Abbildung schickt $r \longmapsto dr$, und die von $\mathrm{Res}{\downarrow}_{C_m}^{C_n}$ induzierte Abbildung schickt $r \longmapsto r$. Es bestätigt sich, daß die Komposition $\mathrm{Res}{\downarrow}_{C_m}^{C_n} \mathrm{Tr}{\uparrow}_{C_m}^{C_n}$ auf $\mathrm{H}^0(C_n; R)$ ein Element $r \in R$ auf $dr = [C_n : C_m] \cdot r$ schickt.

Ist $k \equiv_2 1$, so ist $\mathrm{H}^k(C_m; R) = R[m]$ und $\mathrm{H}^k(C_n; R) = R[n]$. Die von $\mathrm{Tr}{\uparrow}_{C_m}^{C_n}$ induzierte Abbildung schickt $r \longmapsto r$, und die von $\mathrm{Res}{\downarrow}_{C_m}^{C_n}$ induzierte Abbildung schickt $r \longmapsto dr$. Es bestätigt sich, daß die Komposition $\mathrm{Res}{\downarrow}_{C_m}^{C_n} \mathrm{Tr}{\uparrow}_{C_m}^{C_n}$ auf $\mathrm{H}^k(C_n; R)$ ein Element $r \in R[n]$ auf $dr = [C_n : C_m] \cdot r$ schickt.

Ist $k \equiv_2 0$ und $k \geqslant 2$, so ist $\mathrm{H}^k(C_m; R) = R/mR$ und $\mathrm{H}^k(C_n; R) = R/nR$. Die von $\mathrm{Tr}{\uparrow}_{C_m}^{C_n}$ induzierte Abbildung schickt $r \longmapsto dr$, und die von $\mathrm{Res}{\downarrow}_{C_m}^{C_n}$ induzierte Abbildung schickt $r \longmapsto r$. Es bestätigt sich, daß die Komposition $\mathrm{Res}{\downarrow}_{C_m}^{C_n} \mathrm{Tr}{\uparrow}_{C_m}^{C_n}$ auf $\mathrm{H}^k(C_n; R)$ ein repräsentierendes Element $r \in R/nR$ auf $dr = [C_n : C_m] \cdot r$ schickt.

Aufgabe 46. Sei P eine projektive Auflösung von X über RG. Nach Definition von $\mathrm{Tr}{\downarrow}_L^H$ etc. auf Tor_k vermittels H_k des entsprechenden Morphismus auf den Tensorprodukten, genügt es zu zeigen, daß das angegebene Dreick auf den Komplexen kommutiert, die nach Anwenden des Tensor-Funktors ggf. nach vorherigem Einschränken auf die jeweilige Untergruppe entstehen. Dies wiederum kann punktweise gezeigt werden.

Wir behaupten also, es ist

$$\left(P \otimes_{RG} X' \xrightarrow{\mathrm{Tr}{\downarrow}_H^G} P{\downarrow_H} \otimes_{RH} X'{\downarrow_H} \xrightarrow{\mathrm{Tr}{\downarrow}_L^H} P{\downarrow_L} \otimes_{RL} X'{\downarrow_L}\right) \;=\; \left(P \otimes_{RG} X' \xrightarrow{\mathrm{Tr}{\downarrow}_L^G} P{\downarrow_L} \otimes_{RL} X'{\downarrow_L}\right).$$

für einen RG-Modul P. Sei $p \otimes x' \in P \otimes_{RG} X'$ eine RG-lineare Abbildung. Mit der expliziten Formel wird

$$\begin{array}{rcl}
(p \otimes x')\, \mathrm{Tr}{\downarrow}_H^G\, \mathrm{Tr}{\downarrow}_L^H & = & \left(\sum_{g \in H\backslash G} (gp \otimes gx')\right) \mathrm{Tr}{\downarrow}_L^H \\
& = & \sum_{g \in H\backslash G} \sum_{h \in L\,\backslash H} hgp \otimes hgx'\,,
\end{array}$$

und wir sind fertig mit der Bemerkung, daß $G \;=\; \bigsqcup_{g \in H\backslash G} \bigsqcup_{h \in L\backslash H} Lhg\,.$

Aufgabe 47. Wir verwenden die Bezeichnungen von Aufgabe 45. Wir identifizieren $R \otimes_{RC_m} RC_m$ mit R, indem wir $r \otimes 1$ dem Element r zuordnen. Genauso identifizieren wir $R \otimes_{RC_n} RC_n$ mit R.

Das Kompositum

$$R \;=\; R \otimes_{RC_n} RC_n \xrightarrow{\mathrm{Tr}{\downarrow}_{C_m}^{C_n}} R{\downarrow_{C_m}} \otimes_{RC_m} RC_n{\downarrow_{C_m}} \xrightarrow{1 \otimes \varphi} R \otimes_{RC_m} RC_m \;=\; R$$

schickt 1 zunächst nach $\sum_{i\in[0,d-1]} 1\otimes c^i$, sodann nach $\sum_{i\in[0,d-1]} 1\otimes c^{d\underline{i}} = 1\otimes d$, was in R schließlich d entspricht.

Das Kompositum

$$R \;=\; R\otimes_{RC_n} RC_n \xrightarrow{\mathrm{Tr}\downharpoonleft_{C_m}^{C_n}} R{\downharpoonleft_{C_m}} \otimes_{RC_m} RC_n{\downharpoonleft_{C_m}} \xrightarrow{1\otimes\psi} R\otimes_{RC_m} RC_m \;=\; R$$

schickt 1 zunächst nach $\sum_{i\in[0,d-1]} 1\otimes c^i$, sodann nach $\sum_{i\in[0,d-1]} 1\otimes(\underline{i+1}-\underline{i})c^{d\underline{i}} = 1\otimes 1$, was in R schließlich 1 entspricht.

Das Kompositum

$$R \;=\; R\otimes_{RC_m} RC_m \xrightarrow{1\otimes\xi} R\otimes_{RC_m} RC_n{\downharpoonleft_{C_m}} \xrightarrow{\mathrm{Can}\upharpoonleft_{C_m}^{C_n}} R\otimes_{RC_n} RC_n \;=\; R$$

schickt 1 zunächst nach $1\otimes 1$, sodann nach $1\otimes 1$, was in R schließlich 1 entspricht.

Das Kompositum

$$R \;=\; R\otimes_{RC_m} RC_m \xrightarrow{1\otimes\zeta} R\otimes_{RC_m} RC_n{\downharpoonleft_{C_m}} \xrightarrow{\mathrm{Can}\upharpoonleft_{C_m}^{C_n}} R\otimes_{RC_n} RC_n \;=\; R$$

schickt 1 zunächst nach $\sum_{i\in[0,d-1]} 1\otimes c^i$, sodann nach $\sum_{i\in[0,d-1]} 1\otimes c^i$, was in R schließlich d entspricht.

Berechnen wir nun $\mathrm{H}_k(C_n;R)$. Anwenden von $R\otimes_{RC_n} -$ auf P liefert den Komplex

$$R\otimes_{RC_n} P \;=\; (\cdots \longrightarrow R \xrightarrow{n} R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{n} R \xrightarrow{0} R)\,,$$

und so wird

$$\mathrm{H}_k(C_n;R) \;=\; \begin{cases} R & \text{falls } k=0 \\ R/nR & \text{falls } k\equiv_2 1 \\ R[n] & \text{falls } k\equiv_2 0 \text{ und } k\geqslant 2\,. \end{cases}$$

Ganz entsprechend ist

$$\mathrm{H}_k(C_m;R) \;=\; \begin{cases} R & \text{falls } k=0 \\ R/mR & \text{falls } k\equiv_2 1 \\ R[m] & \text{falls } k\equiv_2 0 \text{ und } k\geqslant 2\,. \end{cases}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & R \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1"] & R \arrow[r, "n"] \arrow[d, "d"] & R \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1"] & R \arrow[d, "d"] & \mathrm{Tr}\downharpoonleft_{C_m}^{C_n} \\
\cdots \arrow[r] & R \arrow[r, "0"] \arrow[d, "d"] & R \arrow[r, "m"] \arrow[d, "1"] & R \arrow[r, "0"] \arrow[d, "d"] & R \arrow[d, "1"] & \mathrm{Can}\upharpoonleft_{C_m}^{C_n} \\
\cdots \arrow[r] & R \arrow[r, "0"] & R \arrow[r, "n"] & R \arrow[r, "0"] & R\,. &
\end{tikzcd}$$

Ist also $k=0$, so schickt die von $\mathrm{Tr}\downharpoonleft_{C_m}^{C_n}$ induzierte Abbildung $r\in R$ nach $dr\in R$. Die von $\mathrm{Can}\upharpoonleft_{C_m}^{C_n}$ induzierte Abbildung schickt $r\in R$ nach $r\in R$. Es bestätigt sich, daß die Komposition $\mathrm{Tr}\downharpoonleft_{C_m}^{C_n}\mathrm{Can}\upharpoonleft_{C_m}^{C_n}$ auf $\mathrm{H}_0(C_n;R)$ ein Element $r\in R$ auf $dr=[C_n:C_m]r$ schickt.

Ist $k\equiv_2 1$, so schickt die von $\mathrm{Tr}\downharpoonleft_{C_m}^{C_n}$ induzierte Abbildung $r\in R/nR$ nach $r\in R/mR$. Die von $\mathrm{Can}\upharpoonleft_{C_m}^{C_n}$ induzierte Abbildung schickt $r\in R/mR$ nach $dr\in R/nR$. Es bestätigt sich, daß die Komposition $\mathrm{Tr}\downharpoonleft_{C_m}^{C_n}\mathrm{Can}\upharpoonleft_{C_m}^{C_n}$ auf $\mathrm{H}_k(C_n;R)$ ein repräsentierendes Element $r\in R/nR$ auf $dr=[C_n:C_m]r\in R/nR$ schickt.

Ist $k \equiv_2 0$ und $k \geqslant 2$, so schickt die von $\mathrm{Tr}\downarrow_{C_m}^{C_n}$ induzierte Abbildung $r \in R[n]$ nach $dr \in R[m]$. Die von $\mathrm{Can}\uparrow_{C_m}^{C_n}$ induzierte Abbildung schickt $r \in R[m]$ nach $r \in R[n]$. Es bestätigt sich, daß die Komposition $\mathrm{Tr}\downarrow_{C_m}^{C_n} \mathrm{Can}\uparrow_{C_m}^{C_n}$ auf $\mathrm{H}_k(C_n; R)$ $r \in R[n]$ auf $dr = [C_n : C_m]r \in R[n]$ schickt.

Aufgabe 48.

(1) Die Aussage ist richtig. Es ist $\mathrm{H}_0(H, M; R) = R \otimes_{RH} M\downarrow_H$, es ist $\mathrm{H}_0(G, M; R) = R \otimes_{RG} M$, und die Abbildung $\mathrm{Can}\uparrow_H^G$ gegeben durch die kanonische Abbildung $R \otimes_{RH} M\downarrow_H \longrightarrow R \otimes_{RG} M$, $r \otimes m \longmapsto r \otimes m$, welche surjektiv ist.

(2) Die Aussage ist falsch. Sei $H = C_2$, sei $G = C_4$, seien $R = M = \mathbf{F}_2$, und sei $k = 1$. Nach Aufgabe 45 ist $\mathrm{H}^1(C_4; \mathbf{F}_2) \xrightarrow{\mathrm{Res}\downarrow_{C_2}^{C_4}} \mathrm{H}^1(C_2; \mathbf{F}_2)$ gegeben durch $\mathbf{F}_2[4] \xrightarrow{2} \mathbf{F}_2[2]$, i.e. durch $\mathbf{F}_2 \xrightarrow{0} \mathbf{F}_2$, was nicht injektiv ist.

Aufgabe 49.

(1) Schreibe $X \underset{\sim}{\xrightarrow{r(-)}} X$ resp. $X' \underset{\sim}{\xrightarrow{r'(-)}} X'$ für die Multiplikation mit r auf X resp. X'. Da $\mathrm{Ext}_A^k(-,=)$ ein biadditiver Funktor ist, kontravariant in erster und kovariant in zweiter Variablen, erhalten wir einen Automorphismus

$$\mathrm{Ext}_A^k(X, X') \underset{\sim}{\xrightarrow{\mathrm{Ext}_A^k(r(-),r'(-))}} \mathrm{Ext}_A^k(X, X')$$

Da $\mathrm{Ext}_A^k(r(-), r'(-)) = \mathrm{Ext}_A^k(r(-), X')\,\mathrm{Ext}_A^k(X, r'(-))$, genügt es zu zeigen, daß $\mathrm{Ext}_A^k(r(-), X')$ mit der Multiplikation mit r auf $\mathrm{Ext}_A^k(X, X')$ übereinstimmt, und daß $\mathrm{Ext}_A^k(X, r'(-))$ mit der Multiplikation mit r' auf $\mathrm{Ext}_A^k(X, X')$ übereinstimmt.

Zur Berechnung von $\mathrm{Ext}_A^k(r(-), X')$ verwenden wir die Interpretation $\mathrm{Ext}_A^k(X, X') \simeq \mathrm{H}^k({}_A(\mathrm{PRes}X, X'))$. Es genügt zu zeigen, daß die Multiplikation mit r auf $\mathrm{H}^k({}_A(\mathrm{PRes}X, X'))$ induziert wird. Nun aber ist $\mathrm{PRes}(r(-))$ die Multiplikation mit r auf jedem Eintrag des Komplexes $\mathrm{PRes}X$, da dies ein Komplexmorphismus liefert, der unter H^0 auf $r(-)$ auf X abgebildet wird. Anwenden von ${}_A(-, X')$ liefert an jeder Stelle abermals die Multiplikation mit r (nach Definition der R-Modulstruktur auf den Morphismengruppen), und Anwenden von H^k liefert schließlich die Multiplikation mit r auf den Homologiegruppen, da die den auf H^k induzierten Morphismus charakterisierenden Kommutativitäten von ebendieser Multiplikation erfüllt werden.

Zur Berechnung von $\mathrm{Ext}_A^k(r(-), X')$ verwenden wir die Interpretation $\mathrm{Ext}_A^k(X, X') \simeq \mathrm{H}^k({}_A(X, \mathrm{IRes}X'))$ und argumentieren analog.

(2) Es ist $\mathrm{H}^k(G, \mathbf{Q}) = \mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}G}^k(\mathbf{Z}, \mathbf{Q})$. Die Multiplikation mit $|G|$ ist ein Isomorphismus auf $\mathbf{Q}$, also auch auf $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}G}^k(\mathbf{Z}, \mathbf{Q})$.

Es ist $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}}^k(\mathbf{Z}, \mathbf{Q}) = 0$ für $k \geqslant 1$, da $\mathbf{Q}$ injektiv ist (Aufgabe 5, Aufgabe 26.(1)), oder, da $\mathbf{Z}$ projektiv ist. Nach dem zweiten Korollar aus §2.5.4 ist folglich die Multiplikation mit $|G|$ die Nullabbildung auf $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}G}^k(\mathbf{Z}, \mathbf{Q})$. Vgl. Aufgabe 36.(2).

Ist ein Endomorphismus auf einem Objekt E einer additiven Kategorie zugleich ein Automorphismus und die Nullabbildung, so folgt $E \simeq 0$.

In unserem Fall ist daher $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}G}^k(\mathbf{Z}, \mathbf{Q}) \simeq 0$.

(3) Anwenden von $\mathrm{H}^k(G, -)$ für $k \geqslant 0$ auf die kurz exakte Sequenz $\mathbf{Z} \xrightarrow{i} \mathbf{Q} \xrightarrow{p} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ und Eintragen der Verbindungsmorphismen liefert die lang exakte Sequenz

$$\begin{array}{llllllll}
\mathrm{H}^0(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^0(G,i)} & \mathrm{H}^0(G, \mathbf{Q}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^0(G,p)} & \mathrm{H}^0(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\partial^0} \\
\mathrm{H}^1(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^1(G,i)} & \mathrm{H}^1(G, \mathbf{Q}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^1(G,p)} & \mathrm{H}^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\partial^1} \\
\mathrm{H}^2(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^2(G,i)} & \mathrm{H}^2(G, \mathbf{Q}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^2(G,p)} & \mathrm{H}^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\partial^2} \\
\mathrm{H}^3(G, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^3(G,i)} & \cdots & & &
\end{array}$$

Nun ist die Sequenz $\mathrm{H}^0(G,\mathbf{Z}) \xrightarrow{\mathrm{H}^0(G,i)} \mathrm{H}^0(G,\mathbf{Q}) \xrightarrow{\mathrm{H}^0(G,p)} \mathrm{H}^0(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ isomorph zur Sequenz $\mathbf{Z} \xrightarrow{i} \mathbf{Q} \xrightarrow{p} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, da der Funktor $\mathrm{H}^0(G,-) = (-)^G$ (Fixpunkte nehmen unter G) identisch operiert. Insbesondere ist $\mathrm{H}^0(G,p)$ epimorph, und also $\partial^0 = 0$, so daß $\mathrm{H}^1(G,i)$ monomorph folgt. Auf der anderen Seite ist $\mathrm{H}^1(G,\mathbf{Q}) \simeq 0$ mit (1). Insgesamt erhalten wir $\mathrm{H}^1(G) = \mathrm{H}^1(G,\mathbf{Z}) \simeq 0$.

Sei $k \geqslant 2$. Da $\mathrm{H}^{k-1}(G,\mathbf{Q}) \simeq 0$ und $\mathrm{H}^k(G,\mathbf{Q}) \simeq 0$, ist ∂^{k-1} ein Isomorphismus, i.e. $\mathrm{H}^{k-1}(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \underset{\sim}{\xrightarrow{\partial^1}} \mathrm{H}^k(G,\mathbf{Z}) = \mathrm{H}^k(G)$.

(4) Wir verwenden die Standardinterpretation in 1-Cozyklen und 1-Corändern. Es ist $\mathrm{B}^1({}_{\mathbf{Z}G}(\operatorname{Bar}_{G;\mathbf{Z}}, A)) = \{a \longmapsto {}^g a \cdot a^- \;:\; a \in A\} = 1$, da ${}^g a = a$ stets. Ferner ist

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Z}^1({}_{\mathbf{Z}G}(\operatorname{Bar}_{G;\mathbf{Z}}, A)) & = & \{G \xrightarrow{\partial} A \;:\; (gh)\partial = (g\partial)\cdot {}^g(h\partial)\} \\ & = & \{G \xrightarrow{\partial} A \;:\; (gh)\partial = (g\partial)\cdot (h\partial)\} \\ & = & {}_{(\mathrm{Gruppen})}(G,A) \\ & \simeq & {}_{(\mathrm{AbGruppen})}(G^{\mathrm{ab}},A)\,, \end{array}$$

letzterer Isomorphismus folgt hierbei mit Aufgabe 11. Insgesamt ist also $\mathrm{H}^1(G,A) = \mathrm{Z}^1({}_{\mathbf{Z}G}(\operatorname{Bar}_{G;\mathbf{Z}}, A))/\mathrm{B}^1({}_{\mathbf{Z}G}(\operatorname{Bar}_{G;\mathbf{Z}}, A)) \simeq {}_{(\mathrm{AbGruppen})}(G^{\mathrm{ab}},A)$.

Ist nun A torsionsfrei, i.e. folgt für $a \in A$ aus $a^n = 1$ für ein $n \geqslant 1$ bereits $a = 1$, so folgt ${}_{(\mathrm{AbGruppen})}(G^{\mathrm{ab}},A) = 1$ wegen G, und also auch G^{ab} endlich. Insbesondere wird, nun wieder additiv geschrieben, $\mathrm{H}^1(G) = \mathrm{H}^1(G,\mathbf{Z}) = 0$.

Aufgabe 50.

(1) Die lang exakte Sequenz von $\operatorname{Tor}_k^A(A/I,-)$ auf der kurz exakten Sequenz $J \longrightarrow A \longrightarrow A/J$ endet

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Tor}_k^A(A/I,A) \longrightarrow \operatorname{Tor}_k^A(A/I,A/J) \longrightarrow A/I\otimes_A J \longrightarrow A/I\otimes_A A \longrightarrow A/I\otimes_A A/J\,,$$

was wegen A projektiv und daher $\operatorname{Tor}_1^A(A/I,A) \simeq 0$ zur Folge hat, daß $\operatorname{Tor}_1^A(A/I,A/J) \simeq \operatorname{Kern}(A/I \otimes_A J \longrightarrow A/I \otimes_A A \xrightarrow{\sim} A/I)$, wobei also insgesamt $A/I \otimes_A J \longrightarrow A/I$, $(a+I)\otimes j \longmapsto aj + I$.

Wenden wir den rechtsexakten Funktor $-\otimes_A J$ auf die kurz exakte Sequenz $I \longrightarrow A \longrightarrow A/I$ an, so erhalten wir eine exakte Sequenz

$$I \otimes_A J \longrightarrow A \otimes_A J \longrightarrow A/I \otimes_A J \longrightarrow 0\,.$$

Isomorphes Ersetzen von $A \otimes_A J$ durch J und nachfolgendes Einfügen des Bildes IJ von $I \otimes_A J \longrightarrow J$ liefert die kurz exakte Seuqenz $IJ \hookrightarrow J \longrightarrow A/I\otimes_A J$, wobei $J \longrightarrow A/I\otimes_A J$, $j \longmapsto (1+I)\otimes j$.

Wir haben einen Morphismus kurz exakter Sequenzen

$$\begin{array}{ccccc} IJ & \longrightarrow & J & \longrightarrow & A/I\otimes_A J \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/I\,, \end{array}$$

wobei die ersten beiden vertikalen Morphismen Inklusionen sind, und der verbleibende $(a+I)\otimes j \longmapsto aj + I$ abbildet. Interpretieren wir dieses Diagramm als kurz exakte Sequenz von Komplexen, so erhalten wir mit Aufgabe 20 und isomorpher Ersetzung die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^A(A/I,A/J) \longrightarrow I/IJ \longrightarrow A/J \longrightarrow A/(I+J) \longrightarrow 0\,.$$

Aber der Kern von $I/IJ \longrightarrow A/J$ ist gerade $(I\cap J)/(IJ)$, woraus die Behauptung folgt.

(2) Ist nun $A = RG$ und $I = J = \mathrm{Aug}_{G;R}$, so erhalten wir $A/I = A/J = RG/\mathrm{Aug}_{G;R} \simeq R$, und also

$$\mathrm{H}_1(G;R) \;=\; \mathrm{Tor}_1^{RG}(R,R) \;\simeq\; \mathrm{Tor}_1^{A}(A/I,A/I) \;\overset{(1)}{=}\; I/I^2 \;=\; \mathrm{Aug}_{G;R}/\mathrm{Aug}^2_{G;R}\,.$$

Ein Nachteil dieser Argumentation ist, daß wir nicht ohne weitere Anstrengungen die Abbildungsvorschrift auf den repräsentierenden 1-Zyklen bekommen.

Aufgabe 51. Die Tatsache, daß R ein Hauptidealbereich ist, und daß P aus endlich erzeugten projektiven Moduln besteht, wird nur insofern eingehen, als daß Teilmoduln endlich erzeugter projektiver Moduln wieder projektiv sind. Insbesondere gilt dies für $\mathrm{Z}_k(P)$ und $\mathrm{B}_k(P)$ (nicht aber für $\mathrm{H}_k(P)$).

(1) Es ist $I \hookrightarrow RG \longrightarrow R$ kurz exakt. Da M projektiv über R ist, oder aber, da unsere kurz exakte Sequenz über R spaltet, ist auch $I \otimes_R M \longrightarrow RG \otimes_R M \longrightarrow R \otimes_R M$ kurz exakt. Isomorphe Ersetzung liefert die kurz exakte Sequenz $I \otimes_R M \longrightarrow RG \otimes_R M \longrightarrow M$, wobei der zweite Morphismus durch die Multiplikation der Tensorfaktoren gegeben ist. Nach dem ersten Korollar aus §2.2.1 ist $RG \otimes_R M$ projektiv über RG. Die lang exakte Homologiesequenz liefert die exakte Sequenz

$$\mathrm{H}_k(G, RG \otimes_R M; R) \longrightarrow \mathrm{H}_k(G, M; R) \xrightarrow{\partial_k} \mathrm{H}_{k-1}(G, I \otimes_R M; R) \longrightarrow \mathrm{H}_{k-1}(G, RG \otimes_R M; R)\,,$$

in welcher die äußeren beiden Terme verschwinden, da insbesondere $k - 1 \geqslant 1$. Folglich ist ∂_k ein Isomorphismus.

(2) Die lang exakte Sequenz der Funktoren $\mathrm{Tor}_k^{RG}(-,M)$ für $k \geqslant 0$ angewandt auf die kurz exakte Sequenz $I \hookrightarrow RG \longrightarrow R$ gibt die exakte Sequenz

$$\mathrm{Tor}_1^{RG}(RG,M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{RG}(R,M) \xrightarrow{\partial_1} I \otimes_{RG} M \longrightarrow RG \otimes_{RG} M\,.$$

Die Behauptung folgt nach isomorpher Ersetzung von $RG \otimes_{RG} M$ durch M mit der Bemerkung, daß $\mathrm{Tor}_1^{RG}(RG,M) = 0$.

(3) Zunächst ist mit iterativer Anwendung von (1)

$$\mathrm{H}_k(G;R) \;=\; \mathrm{H}_k(G, I^{\otimes 0}; R) \;\simeq\; \mathrm{H}_{k-1}(G, I^{\otimes 1}; R) \;\simeq\; \mathrm{H}_{k-2}(G, I^{\otimes 2}; R) \;\simeq\; \cdots \;\simeq\; \mathrm{H}_1(G, I^{\otimes(k-1)}; R)\,.$$

Mit (2) können wir fortsetzen zu

$$\mathrm{H}_1(G, I^{\otimes(k-1)}; R) \;\simeq\; \mathrm{Kern}(I^{\otimes(k-1)} \otimes_{RG} I \xrightarrow{\mu} I^{\otimes(k-1)})\,.$$

Aufgabe 52.

(1) Wir haben punktweise die split kurz exakten Sequenzen $\mathrm{Z}_k(P) \longrightarrow P_k \longrightarrow \mathrm{B}_{k+1}(P)$ für $k \in \mathbf{Z}$. Wir müssen zeigen, daß sie sich zu einer kurz exakten Sequenz von Komplexen zusammensetzen lassen. Bei k und $k+1$ erhalten wir in der Tat die beiden kommutativen Vierecke

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Z}_{k+1}(P) \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & P_k \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & \mathrm{B}_{k-1}(P) \arrow[d, "0"'] \\ \mathrm{Z}_k(P) \arrow[r] & P_{k-1} \arrow[r] & \mathrm{B}_{k-2}(P)\,. \end{tikzcd}$$

(2) Die punktweise split kurz exakte Sequenz von Komplexen aus (1) bleibt nach Tensorieren mit M punktweise split kurz exakt. Die lang exakte Homologiesequenz auf dieser tensorierten Sequenz hat die Gestalt

$$\begin{array}{lclclc} \mathrm{H}_k(\mathrm{Z}(P) \otimes M) & \longrightarrow & \mathrm{H}_k(P \otimes M) & \longrightarrow & \mathrm{H}_k(\mathrm{B}(P)[1] \otimes M) & \xrightarrow{\partial_k} \\ \mathrm{H}_{k-1}(\mathrm{Z}(P) \otimes M) & \longrightarrow & \mathrm{H}_{k-1}(P \otimes M) & \longrightarrow & \mathrm{H}_{k-1}(\mathrm{B}(P)[1] \otimes M & , \end{array}$$

Wegen der Nulldifferentiale sind $\mathrm{H}_k(\mathrm{Z}(P)\otimes M) \simeq \mathrm{Z}_k(P)\otimes M$ und $\mathrm{H}_k(\mathrm{B}(P)[1]\otimes M) \simeq \mathrm{B}_{k-1}(P)\otimes M$ für $k \in \mathbf{Z}$, und wir erhalten nach isomorpher Ersetzung

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Z}_k(P)\otimes M & \longrightarrow & \mathrm{H}_k(P\otimes M) & \longrightarrow & \mathrm{B}_{k-1}(P)\otimes M & \xrightarrow{\partial_k} \\ \mathrm{Z}_{k-1}(P)\otimes M & \longrightarrow & \mathrm{H}_{k-1}(P\otimes M) & \longrightarrow & \mathrm{B}_{k-2}(P)\otimes M & . \end{array}$$

Berechnen wir darin das Bild von $x_k d\otimes m$ unter ∂_k, indem wir die isomorphe Ersetzungen entlanglaufen, und die Abbildungsvorschrift von ∂_k in der ursprünglichen lang exakten Homologiesequenz verwenden. Für das repräsentierende Element $x_k d$ in $\mathrm{H}_k(\mathrm{B}_{k-1}(P)[1]\otimes M)$ wählen wir das Urbild $x_k\otimes m$ in $P_k\otimes M$, bilden dies mit dem Komplexdifferential auf $x_k d\otimes m$ in $P_{k-1}\otimes M$ ab, und finden für dieses das Urbild $x_k d\otimes m$ in $\mathrm{Z}_{k-1}(P)\otimes M$, welches das gewünschte Element in $\mathrm{H}_k(\mathrm{Z}(P)\otimes M)$ repräsentiert (resp. mit diesem übereinstimmt, man kann identifizieren).

(3) Verwenden wir die projektive Auflösung $\mathrm{B}_{k-1}(P) \longrightarrow \mathrm{Z}_{k-1}(P)$ von $\mathrm{H}_{k-1}(P)$ zur Berechnung von $\mathrm{Tor}_1(\mathrm{H}_{k-1}(P), M)$ und von $\mathrm{Tor}_0(\mathrm{H}_{k-1}(P), M) \simeq \mathrm{H}_{k-1}(P)\otimes M$, und beachten, daß sich H_1 des Komplexes $(\mathrm{B}_{k-1}(P)\otimes M \longrightarrow \mathrm{Z}_{k-1}(P)\otimes M$ als Kern und H_0 als Cokern seines Differentials zwischen ebendiesen Objekten berechnet, so erhalten wir gerade die geforderte exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(\mathrm{H}_{k-1}(P), M) \longrightarrow \mathrm{B}_{k-1}(P)\otimes M \longrightarrow \mathrm{Z}_{k-1}(P)\otimes M \longrightarrow \mathrm{H}_{k-1}(P)\otimes M \longrightarrow 0\,.$$

(4) In der lang exakten Sequenz in (2) kennen wir nun bis auf Isomorphie dank (2) auch das Bild $\mathrm{Tor}_1(\mathrm{H}_{k-1}(P), M)$ von $\mathrm{H}_k(P\otimes M) \longrightarrow \mathrm{B}_{k-1}(P)\otimes M$ auch das Bild $\mathrm{H}_{k-1}(P)\otimes M$ von $\mathrm{Z}_{k-1}(P)\otimes M \longrightarrow \mathrm{H}_{k-1}(P\otimes M)$, und also, geshiftet um 1, auch das Bild $\mathrm{H}_k(P)\otimes M$ von $\mathrm{Z}_k(P)\otimes M \longrightarrow \mathrm{H}_{k-1}(P\otimes M)$. Genauer, bei letzterem wird ein repräsentierendes Element $x_k\otimes m$ von $\mathrm{H}_k(P)\otimes M$ auf das repräsentierende Element $x_k\otimes m$ von $\mathrm{H}_{k-1}(P\otimes M)$ geschickt.

Damit haben wir eine kurz exakte Sequenz

$$\mathrm{H}_k(P)\otimes M \rightarrowtail \mathrm{H}_k(P\otimes M) \twoheadrightarrow \mathrm{Tor}_1(\mathrm{H}_{k-1}(P), M)\,,$$

und es bleibt zu verifizieren, daß der Kern eine Coretraktion ist, oder, wie man auch sagt, split monomorph ist.

Es ist $\mathrm{Z}_k(P) \longrightarrow P_k \longrightarrow \mathrm{B}_{k-1}(P)$ split kurz exakt wegen $\mathrm{B}_{k-1}(P)$ projektiv. Also ist $\mathrm{Z}_k(P) \longrightarrow P_k$, und damit auch $\mathrm{Z}_k(P)\otimes M \longrightarrow P_k\otimes M$ split monomorph. Da wir eine Faktorisierung

$$\big(\mathrm{Z}_k(P)\otimes M \longrightarrow P_k\otimes M\big) \;=\; \big(\mathrm{Z}_k(P)\otimes M \longrightarrow \mathrm{Z}_k(P\otimes M) \longrightarrow P_k\otimes M\big)$$

haben, ist damit auch $\mathrm{Z}_k(P)\otimes M \longrightarrow \mathrm{Z}_k(P\otimes M)$ split monomorph. Dieser Monomorphismus schränkt zu einem Isomorphismus $\mathrm{B}_k(P)\otimes M \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}_k(P\otimes M)$ ein. Also schränkt eine beliebig gewählte zugehörige Retraktion $\mathrm{Z}_k(P)\otimes M \longleftarrow \mathrm{Z}_k(P\otimes M)$ auf den inversen Isomorphismus $\mathrm{B}_k(P)\otimes M \xleftarrow{\sim} \mathrm{B}_k(P\otimes M)$ ein, und induziert so eine zugehörige Retraktion $\mathrm{H}_k(P)\otimes M \longleftarrow \mathrm{H}_k(P\otimes M)$ zum fraglichen Monomorphismus.

(5) Die punktweise split kurz exakte Sequenz von Komplexen aus (1) bleibt nach Anwenden von $(-, M)$ punktweise split kurz exakt. Die lang exakte Homologiesequenz auf dieser tensorierten Sequenz hat die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{H}^k((\mathrm{Z}(P), M)) & \longleftarrow & \mathrm{H}^k((P, M)) & \longleftarrow & \mathrm{H}^k((\mathrm{B}(P)[1], M)) & \xleftarrow{\partial_{k-1}} \\ \mathrm{H}^{k-1}((\mathrm{Z}(P), M)) & \longleftarrow & \mathrm{H}^{k-1}((P, M)) & \longleftarrow & \mathrm{H}^{k-1}(\mathrm{B}(P)[1], M)) & , \end{array}$$

Wegen der Nulldifferentiale sind $\mathrm{H}^k((\mathrm{Z}(P), M)) \simeq (\mathrm{Z}_k(P), M)$ und $\mathrm{H}^k((\mathrm{B}(P)[1], M)) \simeq (\mathrm{B}_{k-1}(P), M)$ für $k \in \mathbf{Z}$, und wir erhalten nach isomorpher Ersetzung

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathrm{Z}_k(P), M) & \longleftarrow & \mathrm{H}^k((P, M)) & \longleftarrow & (\mathrm{B}_{k-1}(P), M) & \xleftarrow{\partial_{k-1}} \\ (\mathrm{Z}_{k-1}(P), M) & \longleftarrow & \mathrm{H}^{k-1}((P, M)) & \longleftarrow & (\mathrm{B}_{k-2}(P), M) & . \end{array}$$

Sei $\mathrm{Z}_{k-1}(P) \xleftarrow{s} P_{k-1}$ eine Retraktion zur Inklusion $\mathrm{Z}_{k-1}(P) \xrightarrow{i} P_{k-1}$. Bezeichnen $P_k \xrightarrow{p} \mathrm{B}_{k-1}(P) \xrightarrow{j} \mathrm{Z}_{k-1}(P)$ die gegebenen Morphismen. Der Verbindungsmorphismus ∂_{k-1} schickt $f \in (\mathrm{Z}_{k-1}(P), M)$ zunächst auf sf, ein Element in $\mathrm{H}^{k-1}((P, M))$ repräsentierend, dann auf $dsf = pjf$, ein Element in $\mathrm{H}^k((P, M))$ repräsentierend, und dann auf das Urbild jf in $(\mathrm{B}_{k-1}(P), M)$. Insgesamt ist also $\partial_{k-1} = j(-)$.

Verwenden wir die projektive Auflösung $\mathrm{B}_{k-1}(P) \longrightarrow \mathrm{Z}_{k-1}(P)$ von $\mathrm{H}_{k-1}(P)$ zur Berechnung von $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{H}_{k-1}(P), M)$ und von $\mathrm{Ext}^0(\mathrm{H}_{k-1}(P), M) \simeq (\mathrm{H}_{k-1}(P), M)$, so erhalten wir die exaxte Sequenz

$$0 \longleftarrow \mathrm{Ext}^1(\mathrm{H}_{k-1}(P), M) \longleftarrow (\mathrm{B}_{k-1}(P), M) \longleftarrow (\mathrm{Z}_{k-1}(P), M) \longleftarrow (\mathrm{H}_{k-1}(P), M) \longleftarrow 0\,.$$

Also ist in unserer lang exakten Sequenz das Bild von $\mathrm{H}^k((P, M)) \longleftarrow (\mathrm{B}_{k-1}(P), M)$ isomorph zu $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{H}_{k-1}(P), M)$.

Ferner ist das Bild von $(\mathrm{Z}_{k-1}(P), M) \longleftarrow \mathrm{H}^{k-1}((P, M))$ isomorph zu $(\mathrm{H}_{k-1}(P), M)$. Schreiben wir $\mathrm{Z}_{k-1}(P) \xrightarrow{q} \mathrm{B}_{k-1}(P)$, so schickt in

$$(\mathrm{Z}_{k-1}(P), M) \longleftarrow (\mathrm{H}_{k-1}(P), M) \longleftarrow \mathrm{H}^{k-1}((P, M))$$

der linke Morphismus ein $g \in (\mathrm{H}_{k-1}(P), M)$ auf $qg \in (\mathrm{Z}_{k-1}(P), M)$. Die Komposition schickt ein repräsentierendes Element $f \in (P_{k-1}, M)$ nach $if \in (\mathrm{Z}_{k-1}(P), M)$. Also schickt der rechte Morphismus dieses Element $f \in (P_{k-1}, M)$, welches $df = 0$ und also auch $jif = 0$ erfüllt, nach $g \in (\mathrm{H}_{k-1}(P), M)$ mit $qg = if$.

Zeigen wir sogleich, daß dieser rechte Morphismus eine Retraktion ist, oder, wie man auch sagt, split epimorph ist. Wir behaupten, daß $(\mathrm{H}_{k-1}(P), M) \longrightarrow \mathrm{H}^{k-1}((P, M))$, $g \longmapsto sqg$ eine zugehörige Coretraktion ist. Zunächst bemerken wir, daß wegen $d(sqg) = pji(sqg) = pjqg = 0$ in der Tat $sqg \in \mathrm{Z}^{k-1}((P, M))$ als repräsentierendes Element verwandt werden darf. Bilden wir nun sqg wieder in die umgekehrte Richtung ab, so erhalten wir wegen $i(sqg) = qg$ gemäß Abbildungsvorschrift auch das Ausgangselement g zurück.

Einsetzen dieser beiden Bilder, letzteres geshiftet um 1, in unsere lang exakte Sequenz liefert die kurz exakte Sequenz

$$\mathrm{Ext}^1(\mathrm{H}_{k-1}(P), M) \rightarrowtail \mathrm{H}^k((P, M)) \twoheadrightarrow (\mathrm{H}_k(P), M)\,,$$

welche split kurz exakt ist, da, wie eben hergeleitet, ihr Epimorphismus aufspaltet.

Aufgabe 53.

(1) Sei $X = \{1\}$. Es wird $c_1 = 2$, und also

$$(1,2)\,\mathrm{Tr}\!\downarrow_H^G \;=\; \prod_{x \in X} x(1,2)^{c_x} x^{-1} \;=\; 1 \cdot (1,2)^2 \cdot 1^{-1} \;=\; 1\,.$$

Das war wegen $G^{\mathrm{ab}} \simeq C_2$ und $H^{\mathrm{ab}} \simeq C_3$ von vorneherein klar – es gibt keine nichttrivialen Morphismen von C_2 nach C_3.

(2) Sei $X = \{1, (1,4)\}$. Es werden $c_1 = 2$ und $c_{(1,4)} = 1$, und also

$$(1,2)\,\mathrm{Tr}\!\downarrow_H^G \;=\; \prod_{x \in X} x(1,2)^{c_x} x^{-1} \;=\; (1 \cdot (1,2)^2 \cdot 1^{-1}) \cdot ((1,4) \cdot (1,2) \cdot (1,4)^{-1}) \;=\; (2,4)\,.$$

Hierbei ist $G' = \mathcal{A}_4$, also die Restklasse von $(1,2)$ ein Erzeuger von $G^{\mathrm{ab}} \simeq C_2$, und $H' = \langle (1,3)(2,4) \rangle$, so daß $H^{\mathrm{ab}} \simeq C_2 \times C_2$, und darin repräsentiert unser Bild $(2,4)$ ein nichttriviales Element.

Aufgabe 54. Wir nehmen Bezug auf die Notation von Aufgabe 52, schreiben aber nun wieder $-\otimes_R =$ und ${}_R(-,=)$. Schreibe RG-free für die Kategorie der endlich erzeugten freien RG-Moduln.

Die zu zeigende Aussagen (1-4) sind auch als *universelles Koeffiziententheorem* bekannt (genauer gesagt, als eine gruppen(co)homologische Fassung davon).

(0) Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte R-Moduln dürfen wir wegen der Additivität jeweils beider Seiten $T = R/tR$ mit $t \in R \smallsetminus \{0\}$ annehmen.

Zur Berechnung von $\mathrm{Ext}^*_R(T,M)$ verwenden wir die projektive Auflösung $R \xrightarrow{t} R$ von T. Anwenden von ${}_R(-,M)$ liefert $M \xleftarrow{t} M$. Folglich sind $\mathrm{Ext}^1_R(T,M) \simeq M/tM$ und $\mathrm{Ext}^0_R(T,M) \simeq M[t]$.

Zur Berechnung von $\mathrm{Tor}^R_*(T,M)$ verwenden wir die projektive Auflösung $R \xrightarrow{t} R$ von T. Anwenden von $-\otimes_R M$ liefert $M \xrightarrow{t} M$. Folglich sind $\mathrm{Tor}^R_1(T,M) \simeq M[t]$ und $\mathrm{Tor}^R_0(T,M) \simeq M/tM$.

Wir sehen, daß $\mathrm{Ext}^1_R(T,M) \simeq \mathrm{Tor}^R_0(T,M)$ und $\mathrm{Ext}^0_R(T,M) \simeq \mathrm{Tor}^R_1(T,M)$, wie behauptet.

Wir bemerken noch, daß die nach Standardkonstruktion endlich erzeugten R-Moduln $\mathrm{H}_k(G;R)$ und $\mathrm{H}^k(G;R)$ für $k \geqslant 1$ unter Multiplikation mit $|G|$ verschwinden, wie wir Aufgabe 36.(2, 3) oder aber dem jeweils ersten Korollar der §§ 2.5.4 und 2.5.5.1 entnehmen können. Wegen $|G| \neq 0$ in R liegen also endlich erzeugte R-Torsionsmoduln vor, und wir können (0) mit $T = \mathrm{H}_k(G;R)$ oder mit $T = \mathrm{H}^k(G;R)$ anwenden.

(1) Wir setzen $P = \mathrm{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} R$.

Wir behaupten, daß

$$\begin{array}{ccccccccc} (X & \otimes_{RG} & R) & \otimes_R & M & \longrightarrow & X & \otimes_{RG} & M \\ (x & \otimes & r) & \otimes & m & \longmapsto & x & \otimes & rm \end{array}$$

eine in X natürliche Isotransformation additiver Funktoren von RG-free nach R-Mod ist. Der Morphismus ist wegen $gx \otimes rm = x \otimes rm$ für $g \in G$ wohldefiniert, wofür wir die identische Operation von g auf M benötigt haben. Natürlichkeit in X ist ersichtlich durch Vergleich der Operation auf einem Morphismus $X \xrightarrow{u} X'$ auf beiden Seiten. Es genügt daher zu zeigen, daß für $X = RG$ ein Isomorphismus vorliegt. In diesem (wie in jedem) Fall ist eine Umkehrung gegeben durch $(x \otimes 1) \otimes m \longleftarrow\!\shortmid x \otimes m$, wohldefiniert dank $(gx \otimes 1) \otimes m = (x \otimes 1) \otimes m$ für $g \in G$.

Da $\mathrm{Bar}_{G;R}$ (wegen G endlich) aus endlich erzeugten freien RG-Moduln besteht, folgt, daß $(\mathrm{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} R) \otimes_R M \simeq \mathrm{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} M$. Einsetzen von P in die split kurz exakte Sequenz von Aufgabe 52.(4) und isomorphes Ersetzen liefert bei $k \geqslant 1$ also die split kurz exakte Sequenz

$$(*_1) \qquad \mathrm{H}_k(G;R) \otimes_R M \longrightarrow \mathrm{H}_k(G,M;R) \longrightarrow \mathrm{Tor}^R_1(\mathrm{H}_{k-1}(G;R), M)\ .$$

Ist nun $k \geqslant 2$, so ergibt eine Anwendung von (0) die behauptete split kurz exakte Sequenz

$$\mathrm{H}_k(G;R) \otimes_R M \longrightarrow \mathrm{H}_k(G,M;R) \longrightarrow {}_R(\mathrm{H}_{k-1}(G;R), M)\ .$$

(2) Wir setzen $P = {}_R(\mathrm{Bar}_{G;R}, R)$.

Wir behaupten, daß

$$\begin{array}{ccccc} {}_{RG}(X,R) & \otimes_R & M & \longrightarrow & {}_{RG}(X,M) \\ f & \otimes & m & \longmapsto & (x \longmapsto (xf)\cdot m) \end{array}$$

eine in X natürliche Isotransformation additiver Funktoren von $(RG\text{-free})^\circ$ nach R-Mod ist. Der Morphismus ist wegen $gx \longmapsto ((gx)f)\cdot m = ((xf)\cdot m)$ für $g \in G$ wohldefiniert, wofür wir die identische Operation von g auf M benötigt haben. Natürlichkeit in X ist ersichtlich. Es genügt daher zu zeigen, daß für $X = RG$ ein Isomorphismus vorliegt. In diesem Fall haben wir einen inversen Morphismus $(1 \longmapsto 1) \otimes 1h \;\longleftarrow\!\shortmid\; h$.

Es folgt, daß ${}_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R}, R) \otimes_R M \simeq {}_{RG}(\,\mathrm{Bar}_{G;R}, M)$. Ersetzen von unterer durch obere Indizierung und Einsetzen von P in die split kurz exakte Sequenz von Aufgabe 52.(4) und isomorphes Ersetzen liefert bei $k \geqslant 1$ also die split kurz exakte Sequenz

$$(*_2) \qquad \mathrm{H}^{k-1}(G;R) \otimes_R M \longrightarrow \mathrm{H}^{k-1}(G,M;R) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{H}^k(G;R), M)\ .$$

Eine Anwendung von (0) ergibt hieraus die behauptete split kurz exakte Sequenz

$$\mathrm{H}^{k-1}(G;R) \otimes_R M \longrightarrow \mathrm{H}^{k-1}(G,M;R) \longrightarrow {}_R(\mathrm{H}^k(G;R), M)\ .$$

(3) Wir setzen $P = \mathrm{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} R$.

Wir behaupten, daß

$$\begin{array}{rcl} {}_R(X \otimes_{RG} R, M) & \longrightarrow & {}_{RG}(X, M) \\ f & \longmapsto & (x \longmapsto (x \otimes 1)f) \end{array}$$

eine in X natürliche Isotransformation additiver Funktoren von $(RG\text{-free})^\circ$ nach R-Mod ist. Der Morphismus ist wegen $gx \longmapsto (gx \otimes 1)f = (x \otimes 1)f$ für $g \in G$ wohldefiniert, wofür wir die identische Operation von g auf M benötigt haben. Natürlichkeit in X ist ersichtlich. Es genügt daher zu zeigen, daß für $X = RG$ ein Isomorphismus vorliegt. In diesem (wie in jedem anderen) Fall haben wir einen inversen Morphismus $(x \otimes 1 \longmapsto xh) \longleftarrow\!\shortmid h$, welcher wegen $gx \otimes 1 \longmapsto (gx)h = xh$ wohldefiniert ist.

Es folgt, daß ${}_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} R, M) \simeq {}_{RG}(\,\mathrm{Bar}_{G;R}, M)$. Einsetzen von P in die split kurz exakte Sequenz von Aufgabe 52.(5) und isomorphes Ersetzen liefert bei $k \geqslant 1$ also die split kurz exakte Sequenz

$$(*_3) \qquad \mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{H}_{k-1}(G;R), M) \longrightarrow \mathrm{H}^k(G,M;R) \longrightarrow {}_R(\mathrm{H}_k(G;R), M)\ .$$

Ist nun $k \geqslant 2$, so ergibt eine Anwendung von (0) die behauptete split kurz exakte Sequenz

$$\mathrm{H}_{k-1}(G;R) \otimes_R M \longrightarrow \mathrm{H}^k(G,M;R) \longrightarrow {}_R(\mathrm{H}_k(G;R), M)\ .$$

(4) Wir setzen $P = {}_R(\,\mathrm{Bar}_{G;R}, R)$.

Wir behaupten, daß

$$\begin{array}{rcl} {}_R(\,{}_{RG}(X,R), M) & \longrightarrow & X \otimes_{RG} M \\ (f \longmapsto (xf) \cdot m) & \longleftarrow\!\shortmid & x \otimes m \end{array}$$

eine in X natürliche Isotransformation additiver Funktoren von RG-free nach R-Mod ist. Der Morphismus ist wegen $((gx)f) \cdot m = (xf) \cdot m$ für $g \in G$ wohldefiniert, wofür wir die identische Operation von g auf M benötigt haben. Natürlichkeit in X ist ersichtlich. Es genügt daher zu zeigen, daß für $X = RG$ ein Isomorphismus vorliegt. In diesem Fall haben wir einen inversen Morphismus $h \longmapsto 1 \otimes (1 \longmapsto 1)h$.

Es folgt, daß ${}_R(\,{}_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R}, R), M) \simeq \mathrm{Bar}_{G;R} \otimes_{RG} M$. Ersetzen von unterer durch obere Indizierung und umgekehrt, Einsetzen von P in die split kurz exakte Sequenz von Aufgabe 52.(5) und isomorphes Ersetzen liefert bei $k \geqslant 1$ also die split kurz exakte Sequenz

$$(*_4) \qquad \mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{H}^k(G;R), M) \longrightarrow \mathrm{H}_{k-1}(G,M;R) \longrightarrow {}_R(\mathrm{H}^{k-1}(G;R), M)\ .$$

Eine Anwendung von (0) ergibt hieraus die behauptete split kurz exakte Sequenz

$$\mathrm{H}^k(G;R) \otimes_R M \longrightarrow \mathrm{H}_{k-1}(G,M;R) \longrightarrow {}_R(\mathrm{H}^{k-1}(G;R), M)\ .$$

(5) In $(*_3)$ beobachten wir für $k = 1$ und $R = \mathbf{Z}$ zunächst, daß $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}}(\mathrm{H}_0(G), M) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}, M) \simeq 0$. Die kurz exakte Sequenz liefert daher den Isomorphismus

$$\mathrm{H}^1(G, M) \xrightarrow{\sim} {}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{H}_1(G), M) \simeq {}_{(\mathrm{AbGruppen})}(G^{\mathrm{ab}}, M) \;,$$

wie behauptet wurde.

(6) Setzen wir in $(*_3)$ $M = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, so erhalten wir zunächst wegen $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ injektiv (vgl. Aufgabe 5.(3)), daß $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}}(\mathrm{H}_{k-1}(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq 0$ (vgl. Aufgabe 26.(1)). Somit haben wir einen Isomorphismus $\mathrm{H}^k(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} {}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{H}_k(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Nun ist aber $\mathrm{H}_k(G)$ eine endliche abelsche Gruppe (vgl. Aufgabe 39.(1)), so daß mit dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen folgt, daß ${}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{H}_k(G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq \mathrm{H}_k(G)$, da dies für endliche zyklische Gruppen der Fall ist. Es folgt $\mathrm{H}_k(G) \simeq \mathrm{H}^k(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Mit Aufgabe 49.(3) folgt vollends $\mathrm{H}^k(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq \mathrm{H}^{k+1}(G)$.

Aus $\mathrm{H}_1(G) \simeq G^{\mathrm{ab}}$ folgt nun im Falle $k = 1$, daß $\mathrm{H}^2(G) \simeq G^{\mathrm{ab}}$.

Ist $G = \mathcal{S}_3$, so ist in der Tat $\mathrm{H}^2(\mathcal{S}_3) \simeq \mathbf{Z}/2 \simeq \mathcal{S}_3^{\mathrm{ab}}$ (vgl. Aufgabe 40.(3)).
Ist $G = C_n$ für $n \geqslant 2$, so ist in der Tat $\mathrm{H}^2(C_n) \simeq \mathbf{Z}/n \simeq C_n = C_n^{\mathrm{ab}}$ (vgl. Aufgabe 41).

(7) Sind T und M endlich erzeugte R-Torsionsmoduln, so behaupten wir, daß $T \otimes_R M \simeq {}_R(T, M)$. In der Tat können wir hierfür $T = R/tR$ und $M = R/mR$ mit $t,\, m \in R \smallsetminus \{0\}$ annehmen. Ferner können wir nach Lokalisierung annehmen, daß R ein diskreter Bewertungsring ist mit maximalem Ideal erzeugt von $r \in R$, und daß $t = r^\tau$ und $m = r^\mu$ für gewisse $\tau,\, \mu \geqslant 0$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} R/r^\tau R \otimes_R R/r^\mu R & \simeq & (R/r^\mu R)/r^\tau(R/r^\mu R) \\ & \simeq & R/(r^\mu R + r^\tau R) \\ & = & R/r^{\min(\tau,\mu)} R \\ & \simeq & r^{\mu - \min(\tau,\mu)} R/r^\mu R \\ & = & (R/r^\mu R)[r^\tau] \\ & \simeq & {}_R(R/r^\tau R, R/r^\mu R) \;. \end{array}$$

Wir erhalten also

$$\mathrm{H}_k(G, M; R) \overset{(4)}{\simeq} (\mathrm{H}^k(G; R) \oplus \mathrm{H}^{k+1}(G; R)) \otimes_R M \overset{(2)}{\simeq} \mathrm{H}^k(G, M; R) \;.$$

Beachte, daß dies nicht auf $M = R$ anwendbar ist.

Aufgabe 55. Sei angenommen, es existiere eine einfache Gruppe G von Ordnung $306 = 2 \cdot 3^2 \cdot 17$.

(1) Die 3-Sylowgruppen von G haben Ordnung 9, sind also insbesondere abelsch. Die Anzahl der 3-Sylowgruppen ist in den Teilern $\{1, 2, 17, 34\}$ von 34 und ist $\equiv_3 1$. Da G einfach ist, bleibt 34 als einzige mögliche Anzahl. Dies ist aber gemäß dem zweiten Korollar aus §2.5.5.3 ausgeschlossen. Somit kann es ein solches G nicht geben.

(2) Die 17-Sylowgruppen von G haben Ordnung 17, sind also zyklisch und insbesondere abelsch. Die Anzahl der 17-Sylowgruppen ist ein Teiler von 18 und ist $\equiv_{17} 1$. Da G einfach ist, bleibt 18 als einzige mögliche Anzahl. Dies ist aber gemäß dem zweiten Korollar aus §2.5.5.3 ausgeschlossen. Somit kann es ein solches G nicht geben.

Aufgabe 56. Wir zeigen die zweite, genauere Behauptung, aus der dann die Auflösbarkeit folgt. Wir führen eine Induktion nach $|G|$. Sei p der kleinste Primteiler von $|G|$. Mit Induktion genügt es zu zeigen, daß G einen Normalteiler von Index p hat. Denn dann können wir die Induktionsvoraussetzung auf diesen Normalteiler anwenden.

Nehmen wir an, G habe keinen Normalteiler von Index p. Die Ordnung einer p-Sylowgruppe H von G ist entweder gleich p oder gleich p^2. Jedenfalls ist H abelsch. Sei $N = \mathrm{N}_G(H)$. Nach dem ersten Korollar aus

§2.5.5.3 ist der ggT von $[N:H]$ und $(p-1)(p^2-1)$ ungleich 1. Nun ist aber $p \geqslant 3$, und alle Primteiler von $[N:H]$ sind größer als p, und somit auch $\geqslant p+2$. Die Primteiler von $(p-1)(p+1)$ sind aber entweder Teiler von $p-1$ oder von $p+1$ und so jedenfalls $\leqslant p+1$. Es folgt, daß der ggT mangels gemeinsamen Primteilers gleich 1 ist, und wir haben einen Widerspruch.

Gemäß einem Satz von Feit und Thompson (Pacific J. Math. 13, p. 775–1029, 1963) sind alle Gruppen ungerader Ordnung auflösbar.

Aufgabe 57. Sei $G = M \rtimes K$, wobei die Operation von K auf M durch die Modulmultiplikation gegeben ist. Es sei also $(m,k)(m',k') = (m+km', kk')$ für $m,\ m' \in M$ und $k,\ k' \in K$.

Es ist M eine normale, abelsche p-Sylowgruppe von G.

Wir behaupten, es habe G keinen Normalteiler von Index p, und nehmen dazu im Gegenteil an, es sei L normal in G von Index p. Dann teilt $[K : L\cap K]$ den Index $[G:L] = p$, woraus wegen Teilerfremdheit von $|K|$ und p folgt, daß $[K : L\cap K] = 1$, und also $K \leqslant L$. Da nun nicht auch noch $M \leqslant L$, ist der Index $[M : L\cap M]$, welcher ebenfalls ein Teiler von p ist, gerade gleich p. Nun ist $L \cap M$ insbesondere eine additive Untergruppe von M, und also auch ein $\mathbf{Z}_{(p)}$-Teilmodul. Wir wollen zeigen, daß ein $\mathbf{Z}_p K$-Teilmodul vorliegt. Da $L\cap M \trianglelefteq G$ als Schnitt zweier Normalteiler, folgt in der Tat

$$L\cap M \;\ni\; (1,k)(l,1)(1,k^{-1}) \;=\; (kl, kk^{-1}) \;=\; (kl,1)$$

für $l \in L\cap M$ und $k \in K$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme an M.

Wir können somit Teil (1) des Satz aus §2.5.5.3 anwenden, wobei nun $N = \mathrm{N}_G(M) = G$, und erhalten $M \cap \mathrm{Z}(G) = \{(0,1)\}$.

Ist $m \in M$ mit $km = m$ für alle $k \in K$, so folgt, daß auch stets $(1,k)(m,1)(1,k^{-1}) = (km,1) = (m,1)$ ist. Da $(m,1)$ mit allen Elementen der Untergruppe M selbst ebenfalls vertauscht, und $G = \langle M, K\rangle$, folgt $(m,1) \in M \cap \mathrm{Z}(G)$, und somit $m = 0$. Damit ist in der Tat $M^K = 0$.

Aufgabe 58. Für $k \in \mathbf{Z}$ schreiben wir $k = \underline{k}\cdot p + \overline{k}$ mit $\overline{k} \in [0, p-1]$.

(1) Es ist $\mathrm{v}_p(|\mathcal{S}_p|) = \mathrm{v}_p(p!) = 1$, wobei $z =: \prod_{p \text{ prim}} p^{\mathrm{v}_p(z)}$ für $z \in \mathbf{Z}\smallsetminus\{0\}$. Da $|P| = p$, ist P eine p-Sylowgruppe von $\mathcal{S}_p$.

Sei $\mathbf{F}_p^* = \langle\omega\rangle$. Alle Potenzen von ω seien als repräsentiert in $[1, p-1]$ zu lesen. Wir behaupten, daß

$$N \;=\; \langle (0,1,\dots,p-1),\ (\omega^0,\omega^1,\omega^2,\dots,\omega^{p-2})\rangle \;\simeq\; \langle c,a \;:\; c^p,\ a^{p-1},\ c^a = c^\omega\rangle\ .$$

Identifizieren wir dann entlang dieses Isomorphismus und schreiben $c := (0,1,\dots,p-1)$ (c wie cyclic) und $a := (\omega^0,\omega^1,\omega^2,\dots,\omega^{p-2})$ (a wie Automorphismus).

Für die Inklusion $\geqslant$ genügt es, $a \in N$ nachzuweisen. In der Tat ist

$$(*)\qquad (0,1,\dots,p-1)^{(\omega^0,\omega^1,\omega^2,\dots,\omega^{p-2})} \;=\; (0,\overline{\omega\cdot 1},\overline{\omega\cdot 2},\dots,\overline{\omega\cdot(p-1)}\,) \;=\; (0,1,\dots,p-1)^\omega\ .$$

Für die Inklusion $\leqslant$ bemerken wir, daß ein Element von N durch das Bild u von 1 und v von 2 festliegt, denn dann muß $k \in [1,n]$ auf $1 + \overline{(u-1)+(v-u)(k-1)}$ abgebildet werden. Mittels $(1,2,\dots,p)$ dürfen wir annehmen, daß $u = 1$ ist. Mittels $(1+\omega^1, 1+\omega^2,\dots,1+\omega^{p-1})$ dürfen wir nun dazuhin annehmen, daß $v = 2$.

Ferner haben wir dank $(*)$ einen surjektiven Gruppenmorphismus, der c nach $(0,1,\dots,p-1)$ und a nach $(\omega^0,\omega^1,\omega^2,\dots,\omega^{p-2})$ schickt. Da p und $p-1$ teilerfremd sind und da im Bild dieses Morphismus Untergruppen dieser Ordnungen liegen, hat das Bild mindestens Ordnung $p(p-1)$. Also liegt ein Isomorphismus vor.

(2) Es liegt ein Morphismus von graduierten R-Moduln vor.

Wie im letzten Lemma aus §2.5.4 ausgeführt, schickt $\mathrm{Res}\downarrow^G_H$ für $k \geqslant 0$ einen k-Cozykel $u : G^{\times k} \longrightarrow R$ nach $u|_{H^{\times k}}$. In der Interpretation als RG-lineare resp. RH-lineare Abbildung wird also $u : RG^{\otimes(k+1)} \longrightarrow R$ nach $u|_{RH^{\otimes(k+1)}}$ geschickt.

Seien ein k-Cozykel u und ein ℓ-Cozykel v gegeben für $k,\ \ell \geqslant 0$. Wir müssen

$$(u|_{RH^{\otimes(k+1)}}) \cup (v|_{RH^{\otimes(\ell+1)}}) \ \stackrel{!}{=}\ (u \cup v)|_{RH^{\otimes(k+\ell+1)}}$$

zeigen. Sei dazu $h_{[0,k+l]}$ ein Basiselement von $RH^{\otimes(k+\ell+1)}$. Tatsächlich wird

$$h_{[0,k+l]}((u|_{RH^{\otimes(k+1)}}) \cup (v|_{RH^{\otimes(\ell+1)}})) \ = \ (h_{[0,k]}u)\cdot(h_{[k,k+l]}v) \ = \ h_{[0,k+l]}(u \cup v)|_{RH^{\otimes(k+\ell+1)}} \ .$$

(3) Für die Operation von N fassen wir $\mathrm{H}^n(P;\mathbf{F}_p)$ als $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{F}_pP}(\mathbf{F}_p\downarrow^N_P, \mathbf{F}_p\downarrow^N_P)$ auf. Da $c \in P$, ist zunächst, wie in §2.5.6 angemerkt, ${}^cX = X$ und ${}^cY = Y$.

Zur Berechnung von ${}^aX$ und ${}^aY$ gehen wir zurück in die Konstruktion; vgl. Aufgabe 41 und Aufgabe 38.

Das Element X entspricht χ_2, was wiederum, via f_2, in Standardinterpretation zum Element repräsentiert von

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{F}_pP^{\otimes 3} & \longrightarrow & \mathbf{F}_p \\ [c^{i_1}, c^{i_2}] & \longmapsto & \underline{i_1 + i_2} \end{array}$$

korrespondiert, wobei $i_1,\ i_2 \in [0, p-1]$.

Das Element Y entspricht χ_1, was wiederum, via f_1, in Standardinterpretation zum Element repräsentiert von

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{F}_pP^{\otimes 2} & \longrightarrow & \mathbf{F}_p \\ [c^{i_1}] & \longmapsto & i_1 \end{array}$$

korrespondiert, wobei $i_1 \in [0, p-1]$.

Nun wechseln wir von der Standardauflösung von $\mathbf{F}_p$ über $\mathbf{F}_pP$ in die Standardauflösung von $\mathbf{F}_p$ über $\mathbf{F}_pN$ via $\mathrm{Bar}_{N;\mathbf{F}_p}\downarrow^N_P \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathrm{Bar}_{P;\mathbf{F}_p}$; vgl. §2.5.3. Hierzu wählen wir das Repräsentantensystem $\langle a\rangle \subseteq N$ von $P\backslash N$, und erhalten diesbezüglich $(c^ia^j)\alpha = c^i$ für $i,\ j \in \mathbf{Z}$. Insbesondere werden für $i_1,\ i_2 \in [0, p-1]$ und $j_0,\ j_1,\ j_2 \in \mathbf{Z}$

$$\begin{array}{rcl} (a^{j_0}[c^{i_1}a^{j_1}, c^{i_2}a^{j_2}])\alpha & = & \big(a^{j_0} \otimes a^{j_0}c^{i_1}a^{j_1} \otimes a^{j_0}c^{i_1}a^{j_1}c^{i_2}a^{j_2}\big)\alpha \\ & = & \big(a^{j_0} \otimes c^{i_1\omega^{-j_0}}a^{j_1} \otimes c^{i_1\omega^{-j_0}+i_2\omega^{-j_0-j_1}}a^{j_1+j_2}\big)\alpha \\ & = & \Big[c^{\overline{i_1\omega^{-j_0}}}, c^{\overline{i_2\omega^{-j_0-j_1}}}\Big] \ , \\ (a^{j_0}[c^{i_1}a^{j_1}])\alpha & = & \Big[c^{\overline{i_1\omega^{-j_0}}}\Big] \ . \end{array}$$

Komposition mit α zeigt nun, daß X zu

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{F}_pN^{\otimes 3}\downarrow^N_P & \longrightarrow & \mathbf{F}_p \\ [c^{i_1}a^{j_1}, c^{i_2}a^{j_2}] & \longmapsto & \underline{i_1 + \overline{i_2\omega^{-j_2}}} \ , \end{array}$$

und Y zu

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{F}_pN^{\otimes 2}\downarrow^N_P & \longrightarrow & \mathbf{F}_p \\ [c^{i_1}a^{j_1}] & \longmapsto & i_1 \end{array}$$

korrespondiert.

Das Element a auf diese $\mathbf{F}_pP$-linearen Abbildungen anzuwenden, heißt nun, das abzubildende Element zunächst mit a^{-1} zu multiplizieren, dann abzubilden, und dann, hier wirkungslos, das Resultat mit a zu multiplizieren; vgl. §2.5.6. Vgl. obige Rechnung mit $j_0 = -1$.

Somit korrespondiert ${}^aX$ zu

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{F}_p N^{\otimes 3}{\downarrow}_P^N & \longrightarrow & \mathbf{F}_p \\ [c^{i_1}a^{j_1}, c^{i_2}a^{j_2}] & \longmapsto & \underline{\overline{i_1\omega} + \overline{i_2\omega^{1-j_2}}}\ , \end{array}$$

und ${}^aY$ zu

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{F}_p N^{\otimes 2}{\downarrow}_P^N & \longrightarrow & \mathbf{F}_p \\ [c^{i_1}a^{j_1}] & \longmapsto & \overline{i_1\omega}\ . \end{array}$$

Wechseln wir nun wieder zurück zur Standardauflösung von $\mathbf{F}_p$ über P via $\operatorname{Bar}_{P;\mathbf{F}_p} \longrightarrow \operatorname{Bar}_{N;\mathbf{F}_p}{\downarrow}_P^N$, punktweise durch $P \hookrightarrow N$ induziert, so sehen wir durch Setzung von $j_1 = 0$ und $j_2 = 0$, daß ${}^aX$ zu

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{F}_p P^{\otimes 3} & \longrightarrow & \mathbf{F}_p \\ [c^{i_1}, c^{i_2}] & \longmapsto & \underline{\overline{i_1\omega} + \overline{i_2\omega}}\ , \end{array}$$

und ${}^aY$ zu

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{F}_p P^{\otimes 2} & \longrightarrow & \mathbf{F}_p \\ [c^{i_1}] & \longmapsto & \overline{i_1\omega} \end{array}$$

korrespondiert.

Wechseln wir nun zurück in die in den Aufgaben 38 und 41 verwandte periodische projektive Auflösung (die dort mit P bezeichnet wurde) via

$$g_2 \ :\ 1 \longmapsto \sum_{i\in[0,p-1]} 1 \otimes c^i \otimes c^{i+1} \ =\ \sum_{i\in[0,p-1]} [c^i, c]\ ,$$

resp. via

$$g_1 \ :\ 1 \longmapsto 1 \otimes c \ =\ [c]\ ,$$

und schreiben wir wieder X für χ_2, resp. Y für χ_1. Zum einen wird

$$\begin{array}{rcl} {}^aX & = & \left(\sum_{i\in[0,p-1]} \underline{\overline{i\omega} + \overline{1\cdot\omega}}\right)\cdot X \\ & = & \left(\sum_{i\in[0,p-1]} \underline{\overline{i\omega} + \omega}\right)\cdot X \\ & = & \left(\sum_{i\in[0,p-1]} p^{-1}(\overline{i\omega} + \omega - \overline{\overline{i\omega} + \omega})\right)\cdot X \\ & = & \left(\sum_{i\in[0,p-1]} p^{-1}(\overline{i\omega} + \omega - \overline{(i+1)\omega})\right)\cdot X \\ & = & \left(\sum_{i\in[0,p-1]} \{\overline{i\omega} + \omega \geqslant p\}\right)\cdot X \\ & \overset{i' = \overline{i\omega}}{=} & \left(\sum_{i'\in[0,p-1]} \{i' + \omega \geqslant p\}\right)\cdot X \\ & = & \omega X\ , \end{array}$$

wobei wir erst mit p^{-1} multiplizierten, und dann von $\mathbf{Z}$ nach $\mathbf{F}_p$ gingen, und wobei $\{A\} := 1$, falls A wahr, und $\{A\} := 0$, falls A falsch.

Zum anderen wird

$${}^aY \ =\ \overline{1\cdot\omega}\cdot Y \ =\ \omega Y\ .$$

Als Probe merken wir hier an, daß $X \longmapsto {}^aX = \omega X$, $Y \longmapsto {}^aY = \omega Y$ in der Tat ein Automorphismus von $\mathbf{F}_p[X]/(Y^2)$ ist, der zur $(p-1)$-sten Potenz die Identität ergibt.

(4) Um das Korollar aus §2.5.6 mit $G = \mathcal{S}_p$ verwenden zu können, müssen wir uns vergewissern, daß ${}^{\sigma}P \cap P = 1$ oder ${}^{\sigma}P \cap P = P$ für $\sigma \in \mathcal{S}_p$. Dies ist aber schon wegen $P \simeq C_p$ erfüllt.

Das Korollar findet nur Anwendung für Ext^k mit $k \geqslant 1$. Für $k = 0$ gibt aber im vorliegenden Fall die Restriktion von $\mathrm{H}^0(\mathcal{S}_p; \mathbf{F}_p)$ nach $\mathrm{H}^0(P, \mathbf{F}_p)^N$ die Identität auf $\mathbf{F}_p$.

Somit ist in der Tat

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{S}_p; \mathbf{F}_p) \;\simeq\; \mathrm{H}^*(P; \mathbf{F}_p)^N \;,$$

und dies dank (2) auch als graduierte $\mathbf{F}_p$-Algebren. Da alle Elemente von $\mathrm{H}^*(P; \mathbf{F}_p)$ unter Anwenden mit c festbleiben, sind die Fixpunkte von $\mathrm{H}^*(P; \mathbf{F}_p)$ unter N gerade die Fixpunkte dieses Ringes unter a.

Sei $\sum_{i \geqslant 0} X^i(s_i + t_i Y)$ mit $s_i,\, t_i \in \mathbf{F}_p$ ein Element in $\mathrm{H}^*(P; \mathbf{F}_p) = \mathbf{F}_p[X, Y]/(Y^2)$ (identifiziert). Wir müssen untersuchen, wann es unter Anwenden von a festbleibt, i.e. wann

$$\sum_{i \geqslant 0} X^i(\omega^i s_i + \omega^{i+1} t_i Y) \;=\; \sum_{i \geqslant 0} X^i(s_i + t_i Y) \;.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $s_i = 0$ wann immer $i \equiv_{p-1} 0$, und wenn $t_i = 0$ wann immer $i \equiv_{p-1} -1$. In anderen Worten, es ist

$$\mathrm{H}^*(P; \mathbf{F}_p)^N \;=\; \left\{ \left(\sum_{i \geqslant 0} s'_i X^{(p-1)i} \right) + \left(\sum_{i \geqslant 1} t'_i X^{(p-1)i-1} Y \right) \;:\; s'_i,\, t'_i \in \mathbf{F}_p \right\} \;\subseteq\; \mathbf{F}_p[X, Y]/(Y^2)$$

die von X^{p-1} und $X^{p-2}Y$ erzeugte Teilalgebra. Schicken wir X' auf X^{p-1} und Y' auf $X^{p-2}Y$, so erhalten wir insgesamt den Isomorphismus

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{S}_p; \mathbf{F}_p) \;\simeq\; \mathbf{F}_p[X', Y']/(Y'^2)$$

graduierter $\mathbf{F}_p$-Algebren, wobei X' den Grad $2p-2$ und Y' den Grad $2p-3$ hat.

(5) Wir betrachten $\mathcal{S}_p = \{\sigma \in \mathcal{S}_{p+1} \;:\; p\sigma = p\} \leqslant \mathcal{S}_{p+1}$ als Untergruppe und bemerken, daß P eine p-Sylowgruppe von $\mathcal{S}_{p+1}$ ist, sowie, daß $N = \mathrm{N}_{\mathcal{S}_p}(P) = \mathrm{N}_{\mathcal{S}_{p+1}}(P)$, da ein normalisierendes Element auf eine Permutation von $[0, p-1]$ einzuschränken hat, und somit auch auf eine Permutation von $[0, p] \smallsetminus [0, p-1] = \{p\}$; vgl. (1).

Wir haben folgendes kommutative Dreieck graduierter $\mathbf{F}_p$-Algebrenmorphismen.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^*(\mathcal{S}_{p+1}; \mathbf{F}_p) \arrow[d, "\mathrm{Res}\downarrow^{\mathcal{S}_{p+1}}_{\mathcal{S}_p}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Res}\downarrow^{\mathcal{S}_{p+1}}_{N}"] & \\
\mathrm{H}^*(\mathcal{S}_p; \mathbf{F}_p) \arrow[r, "\mathrm{Res}\downarrow^{\mathcal{S}_p}_{N}"'] & \mathrm{H}^*(N; \mathbf{F}_p)
\end{tikzcd}$$

Mit dem Korollar aus §2.5.6 sind darin $\mathrm{Res}\downarrow^{\mathcal{S}_{p+1}}_{N}$ und $\mathrm{Res}\downarrow^{\mathcal{S}_p}_{N}$ Isomorphismen, und folglich auch $\mathrm{Res}\downarrow^{\mathcal{S}_{p+1}}_{\mathcal{S}_p}$. Also gibt es genau wie in (4) auch einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{S}_{p+1}; \mathbf{F}_p) \;\simeq\; \mathbf{F}_p[X', Y']/(Y'^2)$$

graduierter $\mathbf{F}_p$-Algebren, wobei X' den Grad $2p-2$ und Y' den Grad $2p-3$ hat.

Aufgabe 59.

(1) Die Aussage ist richtig.

Zunächst haben wir eine direkte Zerlegung von RG als RH-RK-Bimodul,

$$RG \;=\; \bigoplus_{g \in H \backslash G / K} R(HgK) \;.$$

Dies folgt aus der Eindeutigkeit der Darstellung eines Elementes als eine Summe mit Summanden in den $R(HgK) := R\langle hgk \,:\, h \in H,\ k \in K\rangle$.

Sodann behaupten wir, daß

$$\begin{array}{rcccl} R(HgK) & \xrightarrow{\sim} & RH & \underset{R({}^{g}K\cap H)}{\otimes} & \downarrow^{{}^{g}K}_{{}^{g}K\cap H}(gRK) \\ hgk & \longmapsto & h & \otimes & gk \\ hgk & \longleftarrow\!\!| & h & \otimes & gk \end{array}$$

als RH-RK-Bimoduln. Hierbei ist gRK ein $R\,{}^{g}K$-RK-Teilbimodul von RG. Die Einschränkung bezieht sich auf die Operation auf der linken Seite und ist daher ausnahmsweise links notiert.

In der Tat ist $\longmapsto$ wohldefiniert, da aus $hgk = h'gk'$ für $h,\, h' \in H$ und $k,\, k' \in K$ folgt, daß $h'^{-1}h = {}^{g}(k'k^{-1}) \in {}^{g}K \cap H$, und somit $h \otimes gk = h' \otimes gk'$. Umgekehrt ist $\longleftarrow\!\!|$ wohldefiniert, da für ein Element $h_0 \in H$, welches sich als $h_0 = {}^{g}k_0$ für ein $k_0 \in K$ schreiben läßt, gilt, daß $(hh_0)gk = h\,{}^{g}k_0 gk = hg(k_0k)$. Beide Abbildungen sind dann nach Konstruktion RK-RH-Bimodulmorphismen.

Damit erhalten wir Isomorphismen von RH-Moduln

$$\begin{array}{rcl} M\uparrow_K^G\downarrow_H^G & = & {}_{RH}RG_{RK} \otimes_{RK} M \\ & = & \bigoplus_{g\in H\backslash G/K} R(HgK) \underset{RK}{\otimes} M \\ & \simeq & \bigoplus_{g\in H\backslash G/K} RH \underset{R({}^{g}K\cap H)}{\otimes} \downarrow^{{}^{g}K}_{{}^{g}K\cap H}(gRK) \underset{RK}{\otimes} M \\ & \simeq & \bigoplus_{g\in H\backslash G/K} RH \underset{R({}^{g}K\cap H)}{\otimes} ({}^{g}M)\downarrow^{{}^{g}K}_{{}^{g}K\cap H} \\ & = & \bigoplus_{g\in H\backslash G/K} ({}^{g}M)\downarrow^{{}^{g}K}_{{}^{g}K\cap H}\uparrow^{H}_{{}^{g}K\cap H}\,, \end{array}$$

unter Verwendung des $R\,{}^{g}K$-linearen Isomorphismus $gRK \underset{RK}{\otimes} M \xrightarrow{\sim} {}^{g}M$, $gk \otimes m \longmapsto km$.

(2) Die Aussage ist falsch. Sei z.B. $R = \mathbf{Q}$, sei $H = 1$, und sei $G = C_2$. Seien ferner $M = \mathbf{Q}$ und $N = \mathbf{Q}$ beide trivial. Es ist $\dim_{\mathbf{Q}} M\uparrow_H^G = [G : H]\cdot\dim_{\mathbf{Q}} M = 2$, dito $\dim_{\mathbf{Q}} N\uparrow_H^G = 2$. Also hat die linke Seite Dimension 4 über $\mathbf{Q}$. Auf der rechten Seite ist dagegen $\dim_{\mathbf{Q}}(M \otimes_{\mathbf{Q}H} N) = \dim_{\mathbf{Q}}(M \otimes_{\mathbf{Q}} N) = (\dim_{\mathbf{Q}} M)\cdot(\dim_{\mathbf{Q}} N) = 1$, und folglich $\dim_{\mathbf{Q}}(M \otimes_{\mathbf{Q}H} N)\uparrow_H^G = [G : H]\cdot 1 = 2$. Somit können die linke und die rechte Seite nicht isomorph über $\mathbf{Q}G$ sein, da dies eine Isomorphie über $\mathbf{Q}$ nach sich zöge.

Eine zutreffende Formel à la Mackey findet man in Benson, Cor. 3.3.5 (i).

(3) Die Aussage ist richtig. Wir erhalten mit zweimaliger Anwendung der Formel von Eckmann-Shapiro aus §2.5.2 und mit (1) die R-linearen Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Tor}_k^{RG}(M\uparrow_K^G, N\uparrow_H^G) & \simeq & \mathrm{Tor}_k^{RH}(M\uparrow_K^G\downarrow_H^G, N) \\ & \simeq & \bigoplus_{g\in H\backslash G/K} \mathrm{Tor}_k^{RH}(({}^{g}M)\downarrow^{{}^{g}K}_{{}^{g}K\cap H}\uparrow^{H}_{{}^{g}K\cap H}, N) \\ & \simeq & \bigoplus_{g\in H\backslash G/K} \mathrm{Tor}_k^{RH}(({}^{g}M)\downarrow^{{}^{g}K}_{{}^{g}K\cap H}\uparrow^{H}_{{}^{g}K\cap H}, N) \\ & \simeq & \bigoplus_{g\in H\backslash G/K} \mathrm{Tor}_k^{R({}^{g}K\cap H)}\big(({}^{g}M)\downarrow^{{}^{g}K}_{{}^{g}K\cap H}, N\downarrow^{H}_{{}^{g}K\cap H}\big)\,. \end{array}$$

Die Rollen von M und N darf man vertauschen, ohne den in Frage stehenden R-Modul zu ändern. In der resultierenden Formel sind dann auch die Rollen von H und K vertauscht.

Aufgabe 60. Elemente von $\mathrm{Z}^i(G, A)$ nennt man wieder *i-Cozyklen*, wobei $i \in \{0, 1\}$.

Verifizieren wir zuerst kurz, daß für $a \in A$ und $\partial \in \mathrm{Z}^1(G, A)$ die Abbildung $G \longrightarrow A$, $g \longmapsto g\partial' := {}^{g}a(g\partial)a^-$, wieder in $\mathrm{Z}^1(G, A)$ liegt. Für $g,\, h \in G$ erhalten wir

$${}^{g}(h\partial')(g\partial') \;=\; {}^{gh}a\,{}^{g}(h\partial)\,{}^{g}a^-\,{}^{g}a(g\partial)a^- \;=\; {}^{gh}a\,{}^{g}(h\partial)(g\partial)a^- \;=\; {}^{gh}a(gh)\partial a^- = (gh)\partial'\,.$$

(1) Sei $A \xrightarrow{f} A'$ ein G-Gruppenmorphismus. Schreibe zwecks besserer Unterscheidung $\partial_1 \in \mathrm{Z}^1(G,A)$, $\partial'_1 \in \mathrm{Z}^1(G,A')$ etc.

- Ist $a \in \mathrm{H}^0(G,A)$ (genauer, in dessen erstem Tupeleintrag), so setze $(a)\mathrm{H}^0(G,f) := af$. Dies ist wohldefiniert, da ${}^g(af) = ({}^ga)f = af$ für alle $g \in G$. Es ist ein Morphismus punktierter Mengen, da $1f = 1$. Ferner ist $\mathrm{H}^0(G,1) = 1$, und $\mathrm{H}^0(G,ff') = \mathrm{H}^0(G,f)\mathrm{H}^0(G,f')$ für komponierbare G-Gruppenmorphismen f und f'.
- Ist nun $\partial \in \mathrm{Z}^1(G,A)$, so sei das Bild $\partial' := (\partial)\mathrm{Z}^1(G,f) := \partial f$. Es ist $\partial' \in \mathrm{Z}^1(G,A')$, da für $g,\, h \in G$ gilt, daß

  $$(gh)\partial' \;=\; (gh)\partial f \;=\; ({}^g(h\partial)(g\partial))f \;=\; {}^g(h\partial f)(g\partial f) \;=\; {}^g(h\partial')(g\partial')\,.$$

  Es ist $\partial_1 f = \partial'_1$, da $1f = 1$.

  Ferner ist $\mathrm{Z}^1(G,1) = 1$, und $\mathrm{Z}^1(G,ff') = \mathrm{Z}^1(G,f)\mathrm{Z}^1(G,f')$ für komponierbare G-Gruppenmorphismen f und f'.

  Bleibt zu zeigen, daß äquivalente Element von $\mathrm{Z}^1(G,A)$ auf äquivalente Elemente von $\mathrm{Z}^1(G,A')$ abgebildet werden. Seien also $\partial,\, \tilde{\partial} \in \mathrm{Z}^1(G,A)$, und gebe es ein $a \in A$ mit $g\tilde{\partial} = {}^ga(g\partial)a^-$ für alle $g \in G$. Dann ist

  $$g\tilde{\partial}f \;=\; ({}^ga(g\partial)a^-)f \;=\; {}^g(af)(g\partial f)(af)^-$$

  für alle $g \in G$, und also ist $\partial f \sim \tilde{\partial} f$ vermöge $af \in A'$.

Setze nun noch $\mathrm{H}^0(G,A'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(G,A')$, $a'' \longmapsto [\delta_a]$ (leichter Mißbrauch der Bezeichnung δ), wobei $a \in A$ mit $af'' = a''$, und wobei $g\delta_a f' := {}^ga \cdot a^-$ für $g \in G$. Dies liefert in der Tat ein Element $g\delta_a \in A'$, da zunächst $({}^ga \cdot a^-)f'' = {}^ga'' \cdot a''^- = a'' \cdot a''^- = 1$. Ferner ist ${}^g(h\delta_a f')(g\delta_a f') = (gh)\delta_a f'$, und die Cozykelbedingung folgt mit der Injektivität von f'. Zeigen wir, daß diese Definition unabhängig ist von der Wahl von a. Seien also $a,\, \tilde{a} \in A$ mit $af'' = \tilde{a}f''$. Dann ist $\tilde{a} = (a'f')a$ für ein $a' \in A'$. Es wird

$$g\delta_{\tilde{a}}f' \;=\; {}^g\tilde{a} \cdot \tilde{a}^- \;=\; {}^g((a'f')a) \cdot ((a'f')a)^- \;=\; ({}^ga')f' \cdot ({}^ga \cdot a^-) \cdot (a'^-)f' \;=\; ({}^ga' \cdot (g\delta_a) \cdot (a'^-))f'\,,$$

und also $g\delta_{\tilde{a}} = {}^ga' \cdot (g\delta_a) \cdot (a'^-)$ für g in G.

Wählen wir das Urbild 1 von 1 unter f'', so beobachten wir, daß $\delta_1 = \partial'_1$. Es ist δ also ein Morphismus punktierter Mengen.

Prüfen wir die Exaktheit der Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}^0(G,A') \xrightarrow{\mathrm{H}^0(G,f')} \mathrm{H}^0(G,A) \xrightarrow{\mathrm{H}^0(G,f'')} \mathrm{H}^0(G,A'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(G,A') \xrightarrow{\mathrm{H}^1(G,f')} \mathrm{H}^1(G,A) \xrightarrow{\mathrm{H}^1(G,f'')} \mathrm{H}^1(G,A'')\,.$$

- Bei $\mathrm{H}^0(G,A')$ ist nur zu bemerken, daß $\mathrm{H}^0(G,f')$ injektiv ist, und also insbesondere das Urbild von $1 \in \mathrm{H}^0(G,A)$ in $\mathrm{H}^0(G,A')$ nur die 1 enthält (letztere Eigenschaft ist i.a. schwächer als Injektivität).
- Bei $\mathrm{H}^0(G,A)$. Die Komposition verschwindet. Sei umgekehrt $a \in \mathrm{H}^0(G,A)$ mit $af'' = 1$. Dann gibt es ein $a' \in A'$ mit $a'f' = a$. Bleibt zu zeigen, daß $a' \in \mathrm{H}^0(G,A')$, i.e., daß ${}^ga' = a'$ für $g \in G$. Aber $({}^ga')f' = {}^g(a'f') = {}^ga = a = a'f'$, und f' ist injektiv.
- Bei $\mathrm{H}^0(G,A'')$.

  Zeigen wir, daß die Komposition verschwindet. Sei $a \in \mathrm{H}^0(G,A)$. Es bleibt nach Wahl des Urbilds a von af'' zu zeigen, daß δ_a äquivalent ist zu ∂'_1 in $\mathrm{Z}^1(G,A')$. Nun ist aber sogar $g\delta_a = {}^ga \cdot a^- = a \cdot a^- = 1$.

  Sei umgekehrt $a'' \in \mathrm{H}^0(G,A'')$ so, daß δ_a äquivalent ist zu ∂'_1 für ein $a \in A$ mit $af'' = a''$. Sei also ${}^ga \cdot a^- = ({}^ga' \cdot a'^-)f'$ für ein $a' \in A'$. Mit $\tilde{a} := (a'f')^-a$ folgt ${}^g\tilde{a} = (({}^ga')f')^- \cdot {}^ga = (a'^-)f'a = \tilde{a}$, und also $\tilde{a} \in \mathrm{H}^0(G,A)$. Ferner ist $\tilde{a}f'' = (a'f'f'')^-af'' = a''$.

- Bei $\mathrm{H}^1(G,A')$.

  Zeigen wir, daß die Komposition verschwindet. Sei $a'' \in \mathrm{H}^0(G,A'')$. Sei $a \in A$ mit $a \in A$. Für $g \in G$ wird $g\delta_a f' = {}^g a \cdot a^-$, was in der Tat äquivalent zu ∂_1 in $\mathrm{Z}^1(G,A)$ ist.

  Sei umgekehrt $\partial' \in \mathrm{Z}^1(G,A')$ so, daß ein $a \in A$ existiert mit $g\partial' f' = {}^g a \cdot a^-$ für $g \in G$. Sei $a'' := af''$. Es ist
  $$ {}^g a'' \cdot a''^- \;=\; ({}^g a \cdot a^-)f'' \;=\; g\partial' f' f'' \;=\; 1 $$
  für $g \in G$, und folglich $a'' \in \mathrm{H}^0(G,A'')$. Da nun auch $g\delta_a f' = {}^g a \cdot a^- = g\partial' f'$ für $g \in G$, folgt $\delta_a = \partial'$.

- Bei $\mathrm{H}^1(G,A)$.

  Zeigen wir, daß die Komposition verschwindet. Es ist $\mathrm{H}^1(G,f')\mathrm{H}^1(G,f'') = \mathrm{H}^1(G,f'f'')$, und Nachkomposition mit $f'f''$ bringt jeden 1-Cozykel auf ∂_1''.

  Sei umgekehrt $\partial \in \mathrm{Z}^1(G,A)$ so gegeben, daß ein $a'' \in A''$ so existiert, daß $g\partial f'' = {}^g a'' \cdot a''^-$ für $g \in G$. Sei $a \in A$ mit $af'' = a''$. Sei $\tilde\partial \in \mathrm{Z}^1(G,A)$ definiert durch $g\tilde\partial = {}^g a^- \cdot (g\partial) \cdot a$ für $g \in G$. Dann ist $[\partial] = [\tilde\partial]$. Ferner ist stets $g\tilde\partial f'' = {}^g a''^- \cdot (g\partial f'') \cdot a'' = {}^g a''^- \cdot {}^g a'' \cdot a''^- \cdot a'' = 1$. Somit erhalten wir ein $\partial' \in \mathrm{Z}^1(G,A')$ mit $\partial' f' = \tilde\partial$, und insgesamt also $[\partial' f'] = [\partial]$.

(2) *Zeigen wir* $\mathrm{H}^1(G,\mathrm{GL}_n(L)) = 1$.

Sei $\Delta \in \mathrm{Z}^1(G,\mathrm{GL}_n(L))$. Wir wollen zeigen, daß Δ äquivalent zu ∂_1 ist. Sei $A_X := \sum_{\rho\in G} {}^\rho X \cdot (\rho\Delta)$ für ein $X \in L^{n\times n}$. Finden wir ein $X \in L^{n\times n}$ mit $A_X \in \mathrm{GL}_n(L)$, so ist
$$ {}^\sigma A_X \;=\; \sum_{\rho\in G} {}^{\sigma\rho}X \cdot {}^\sigma(\rho\Delta) \;=\; \sum_{\rho\in G} {}^{\sigma\rho}X \cdot (\sigma\rho\Delta)(\sigma\Delta)^- \;=\; A_X \cdot (\sigma\Delta)^- $$
für $\sigma \in G$, und somit ${}^\sigma A_X \cdot (\sigma\Delta) \cdot A_X^- = \mathrm{E}$.

Bleibt uns, ein geeignetes $X \in L^{n\times n}$ zu finden. Wiederholen wir zunächst ein Resultat aus der Algebra.

Lemma (Dedekind). *Sind $\mu_\sigma \in L$ für $\sigma \in G$ so, daß $\sum_{\sigma\in G} \mu_\sigma(\lambda\sigma) = 0$ für alle $\lambda \in L$, so ist $\mu_\sigma = 0$ für alle $\sigma \in G$. Kurz, G ist linear unabhängig über L in ${}_K(L,L)$.*

Beweis. Sei angenommen, es gebe ein Tupel $(\mu_\sigma)_\sigma \neq (0)_\sigma$ mit $\sum_{\sigma\in G}\mu_\sigma(\lambda\sigma) = 0$ für alle $\lambda \in L$. Wähle ein solches Tupel mit minimaler Anzahl nichtverschwindender Einträge μ_σ. Sei $\mu_\tau \neq 0$. Wähle o.E. $\mu_\tau = 1$. Es folgt $0 = \sum_{\sigma\in G}\mu_\sigma \cdot (\lambda\tau\sigma) = \sum_{\sigma\in G}\mu_{\tau^-\sigma}\cdot(\lambda\sigma)$ für alle $\lambda \in L$. Also ist o.E. $\tau = 1$, i.e. $\mu_1 = 1$, i.e.
$$ 0 \;=\; \lambda + \textstyle\sum_{\sigma\neq 1}\mu_\sigma\cdot(\lambda\sigma) $$
für alle $\lambda \in L$. Einsetzen von $\lambda = 1$ zeigt, daß es ein $\rho \neq 1$ mit $\mu_\rho \neq 0$ gibt. Für $\nu \in L$ folgen
$$ \begin{array}{rcl} 0 &=& \lambda\nu + \sum_{\sigma\neq 1}\mu_\sigma\nu\cdot(\lambda\sigma) \\ 0 &=& \lambda\nu + \sum_{\sigma\neq 1}\mu_\sigma\cdot((\lambda\nu)\sigma)\,, \end{array} $$
und also
$$ 0 \;=\; 0 + \textstyle\sum_{\sigma\neq 1}\mu_\sigma(\nu - \nu\sigma)\cdot(\lambda\sigma)\,. $$
für alle $\lambda \in L$. Wählen wir ν so, daß $\nu\rho \neq \nu$, so erhalten wir eine echt kürzere nichttriviale Linearkombination der Null, und also einen Widerspruch. □

Operiere $\sigma \in G$ von links auf $L^{1\times n}$ durch eintragsweise Anwendung von σ^-. Für $x \in L^{1\times n}$ setzen wir $a_x = \sum_{\rho\in G} {}^\rho x \cdot (\rho\Delta) \in L^{1\times n}$.

Lemma. *Es ist $\langle a_x \,:\, x \in L^{1\times n}\rangle_L = L^{1\times n}$.*

Beweis. Sei $y \in L^{n\times 1}$ mit $a_x y = 0$ für alle $x \in L^{1\times n}$. Es genügt zu zeigen, daß $y = 0$ folgt. Für alle $x \in L^{1\times n}$ und alle $\lambda \in L$ ist zunächst
$$ 0 \;=\; a_{\lambda x}y \;=\; \sum_{\rho\in G} {}^\rho(\lambda x)(\rho\Delta)y \;=\; \sum_{\rho\in G} {}^\rho x(\rho\Delta)y\cdot(\lambda\rho^-)\,, $$

und also mit vorigem Lemma ${}^{\rho}x(\rho\Delta)y = 0$ für alle $\rho \in G$ und alle $x \in L^{1\times n}$. Für $\rho = 1$ folgt $xy = 0$ für alle $x \in L^{1\times n}$, und also $y = 0$. ▫

Sei $(x_1, \ldots, x_n)$ ein Tupel so, daß $(a_{x_1}, \ldots, a_{x_n})$ linear unabhängig ist über L. Ist $X \in L^{n\times n}$ die Matrix mit dem Zeilentupel $(x_1, \ldots, x_n)$, so ist A_X die Matrix mit dem Zeilentupel $(a_{x_1}, \ldots, a_{x_n})$, und diese liegt mithin in $\mathrm{GL}_n(L)$.

Zeigen wir $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{SL}_n(L)) = 1$.

Nach (1) gibt die kurz exakte Sequenz $\mathrm{SL}_n(L) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(L) \xrightarrow{\det} \mathrm{GL}_1(L)$ die exakte Sequenz punktierter Mengen

$$\mathrm{H}^0(G, \mathrm{GL}_n(L)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(G, \mathrm{GL}_1(L)) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(G, \mathrm{SL}_n(L)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(G, \mathrm{GL}_n(L)) \,.$$

Da $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{GL}_n(L)) = 1$, ist δ surjektiv. Somit genügt es zu zeigen, daß $\mathrm{H}^0(G, \mathrm{GL}_n(L)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(G, \mathrm{GL}_1(L))$ surjektiv ist. Dies ist aber gerade die surjektive Abbildung $\mathrm{GL}_n(K) \xrightarrow{\det} \mathrm{GL}_1(K)$.

(3) Es operiert $\sigma \in G$ auf $\mathrm{O}_L(A)$ durch eintragsweise Anwendung von σ^-. In der Tat schränkt die ebenso definierte Operation auf $L^{n\times n}$ nach $\mathrm{O}_L(A)$ ein wegen

$${}^{\sigma}\!SA({}^{\sigma}\!S)^{\mathrm{t}} \;=\; ({}^{\sigma}\!S)({}^{\sigma}\!A)({}^{\sigma}(S^{\mathrm{t}})) \;=\; {}^{\sigma}(SAS^{\mathrm{t}}) \;=\; {}^{\sigma}\!A \;=\; A$$

für $S \in \mathrm{O}_L(A)$.

Wir definieren einen Morphismus punktierter Mengen $\mathrm{Fib}_{L|K}(A) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{H}^1(G, \mathrm{O}_L(A))$.

Sei $B \in K^{n\times n}$ symmetrisch, und so, daß $[B]_L = [A]_L$. Wir wollen $[B]_K$ abbilden. Sei $T \in \mathrm{GL}_n(L)$ mit $A = TBT^{\mathrm{t}}$. Setze

$$\begin{array}{rcl} G & \xrightarrow{\partial_T} & \mathrm{O}_L(A) \\ \sigma & \longmapsto & \sigma\partial_T \;:=\; {}^{\sigma}T \cdot T^- \,. \end{array}$$

Es ist in der Tat ${}^{\sigma}T \cdot T^- \in \mathrm{O}_L(A)$, da

$${}^{\sigma}T \cdot T^- \cdot A \cdot (T^-)^{\mathrm{t}} \cdot ({}^{\sigma}T)^{\mathrm{t}} \;=\; {}^{\sigma}T \cdot B \cdot ({}^{\sigma}T)^{\mathrm{t}} \;=\; {}^{\sigma}(TBT^{\mathrm{t}}) \;=\; {}^{\sigma}\!A \;=\; A \,.$$

Ferner ist ∂_T auch in der Tat ein 1-Cozykel, da

$${}^{\sigma}(\rho\partial_T)(\sigma\partial_T) \;=\; {}^{\sigma\rho}T \cdot {}^{\sigma}(T^-) \cdot {}^{\sigma}T \cdot T^- \;=\; {}^{\sigma\rho}T \cdot T^- \;=\; (\sigma\rho)\partial_T$$

für $\sigma,\, \rho \in G$.

Seien nun $B,\, \tilde{B} \in K^{n\times n}$ symmetrisch mit $[B]_K = [\tilde{B}]_K$. Sei $T \in \mathrm{GL}_n(L)$ mit $A = TBT^{\mathrm{t}}$. Sei $\tilde{T} \in \mathrm{GL}_n(L)$ mit $A = \tilde{T}\tilde{B}\tilde{T}^{\mathrm{t}}$. Wir haben zu zeigen, daß die Cozyklen ∂_T und $\partial_{\tilde{T}}$ in $\mathrm{Z}^1(G, \mathrm{O}_L(A))$ äquivalent sind. Es ist $B = S\tilde{B}S^{\mathrm{t}}$ für ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$. Somit wird

$$A \;=\; TBT^{\mathrm{t}} \;=\; TS\tilde{B}S^{\mathrm{t}}T^{\mathrm{t}} \;=\; TS\tilde{T}^- A(\tilde{T}^-)^{\mathrm{t}} S^{\mathrm{t}}T^{\mathrm{t}} \,,$$

d.h. $R := TS\tilde{T}^- \in \mathrm{O}_L(A)$. Damit ist tatsächlich

$${}^{\sigma}\!R \cdot (\sigma\partial_{\tilde{T}}) \cdot R^- \;=\; {}^{\sigma}\!R \cdot ({}^{\sigma}\tilde{T} \cdot \tilde{T}^-) \cdot R^- \;=\; {}^{\sigma}TS({}^{\sigma}\tilde{T})^- \cdot ({}^{\sigma}\tilde{T} \cdot \tilde{T}^-) \cdot \tilde{T}S^-T^- \;=\; {}^{\sigma}T \cdot T^- \;=\; \sigma\partial_T$$

für $\sigma \in G$.

Wir können also $[B]_K\Phi := [\partial_T]$ setzen. Mittels $T = \mathrm{E}$ ersehen wir, daß $[A]_K\Phi = \partial_{\mathrm{E}} = \partial_1$.

Wir definieren einen Morphismus punktierter Mengen $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{O}_L(A)) \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Fib}_{L|K}(A)$.

Sei $G \xrightarrow{\partial} \mathrm{O}_L(A)$ ein 1-Cozykel. Nach (2) ist $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{GL}_n(L)) = 1$. Folglich verschwindet auch das Bild von ∂ unter der von $\mathrm{O}_L(A) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(L)$ induzierten Abbildung

$\mathrm{H}^1(G, \mathrm{O}_L(A)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(G, \mathrm{GL}_n(L))$. In anderen Worten, es gibt ein $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $\sigma\partial = {}^{\sigma}U \cdot U^-$ für $\sigma \in G$. Wir behaupten, daß $UAU^{\mathrm{t}} \in K^{n\times n}$. Sei $\sigma \in G$. Die Tatsache, daß ${}^{\sigma}U \cdot U^-$ in $\mathrm{O}_L(A)$ liegt, besagt gerade, daß ${}^{\sigma}U \cdot U^- A(U^-)^{\mathrm{t}}({}^{\sigma}U)^{\mathrm{t}} = A$, i.e., daß

$$U^- A(U^-)^{\mathrm{t}} \;=\; {}^{\sigma}(U^-)A({}^{\sigma}(U^-))^{\mathrm{t}} \;=\; {}^{\sigma}(U^- A(U^-)^{\mathrm{t}})\,.$$

Seien $\partial,\, \tilde{\partial} \in \mathrm{Z}^1(G, \mathrm{O}_A(L))$ äquivalente Cozykel. Sei $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $\sigma\partial = {}^{\sigma}U \cdot U^-$ für $\sigma \in G$. Sei $\tilde{U} \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $\sigma\tilde{\partial} = {}^{\sigma}\tilde{U} \cdot \tilde{U}^-$ für $\sigma \in G$. Wir behaupten, daß $[U^- A(U^-)^{\mathrm{t}}]_K = [\tilde{U}^- A(\tilde{U}^-)^{\mathrm{t}}]_K$. Sei hierzu $R \in \mathrm{O}_L(A)$ mit ${}^{\sigma}R \cdot (\sigma\partial) \cdot R^- = \sigma\tilde{\partial}$ für $\sigma \in G$. Es folgt ${}^{\sigma}R\,{}^{\sigma}U \cdot U^- R^- = {}^{\sigma}\tilde{U} \cdot \tilde{U}^-$ für $\sigma \in G$, i.e. ${}^{\sigma}(\tilde{U}^- RU) = \tilde{U}^- RU$ für $\sigma \in G$, i.e. $\tilde{U}^- RU \in \mathrm{GL}_n(K)$. Wir erhalten

$$U^- A(U^-)^{\mathrm{t}} \;\sim_K\; (\tilde{U}^- RU)U^- A(U^-)^{\mathrm{t}}(\tilde{U}^- RU)^{\mathrm{t}} \;=\; \tilde{U}^- RAR^{\mathrm{t}}(\tilde{U}^-)^{\mathrm{t}} \;=\; \tilde{U}^- A(\tilde{U}^-)^{\mathrm{t}}\,.$$

Wir können also $[\partial]\Psi := [U^- A(U^-)^{\mathrm{t}}]_K$ setzen.

Mittels $U = \mathrm{E}$ ersehen wir, daß $[\partial_1]\Psi = [A]_K$.

Verifikation von $\Phi\Psi = 1$ *und* $\Psi\Phi = 1$.

Sei $B \in K^{n\times n}$ symmetrisch, und so, daß $[B]_L = [A]_L$. Sei $T \in \mathrm{GL}_n(L)$ mit $A = TBT^{\mathrm{t}}$. Es ist $[B]_K\Phi = [\partial_T]$. Wähle $U := T$. Es wird $[B]_K\Phi\Psi = [T^- A(T^-)^{\mathrm{t}}]_K = [B]_K$.

Sei $G \xrightarrow{\partial} \mathrm{O}_L(A)$ ein 1-Cozykel. Sei $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $\sigma\partial = {}^{\sigma}U \cdot U^-$ für $\sigma \in G$. Es ist $[\partial]\Psi = [U^- A(U^-)^{\mathrm{t}}]_K$. Wähle $T := U$. Es wird $[\partial]\Psi\Phi = [\partial_U] = [\partial]$.

Aufgabe 61.

(1) Mit Aufgabe 61.(3) ist $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{O}_{\mathbf{C}}(\mathrm{E}_n))$ als punktierte Menge isomorph zu

$$\mathrm{Fib}_{\mathbf{C}|\mathbf{R}}(\mathrm{E}_n) \;=\; \Big(\big\{[B]_{\mathbf{R}} \;:\; B \in \mathbf{R}^{n\times n} \text{ symmetrisch, } [B]_{\mathbf{C}} = [\mathrm{E}_n]_{\mathbf{C}}\big\},\ [\mathrm{E}_n]\Big)\,.$$

Mit dem beidseitigen Gaußverfahren sieht man, daß über einem Körper der Charakteristik 0 jede symmetrische Matrix äquivalent zu einer Diagonalmatrix ist. Das beidseitige Gaußverfahren besteht hierbei darin, mit dem Eintrag an Position $(1,1)$ sowohl die erste Spalte mittels Zeilenumformungen, als auch dann die erste Zeile mittels Spaltenumformungen zu säubern, sofern dieser Eintrag ungleich 0 ist; ist er Null und gibt es in der ersten Spalte einen Nichtnulleintrag an Position $(j,1)$, so addiere man die j-te Zeile zur ersten Zeile, und sodann die j-te Spalte zur ersten Spalte, und säubere dann erste Zeile und erste Spalte wie bisher. In jedem Fall sind nun alle Einträge der Matrix in der ersten Zeile und der ersten Spalte verschwunden, ausgenommen möglicherweise den an Position $(1,1)$. So fahre man fort mit dem Block in den Zeilen und Spalten von 2 bis n; etc.

Da jedes Element in $\mathbf{C}$ ein Quadrat ist, ist schließlich $[B]_{\mathbf{C}} = [\mathrm{E}_n]_{\mathbf{C}}$ genau dann, wenn B regulär ist.

Nach dem Trägheitssatz von Sylvester sind Repräsentanten der $\sim_{\mathbf{R}}$-Klassen regulärer symmetrischer Matrizen in $\mathbf{R}^{n\times n}$ gegeben durch $B_j := \mathrm{diag}(+1,\ldots,+1,-1,\ldots,-1)$, wobei j die Anzahl der Diagonaleinträge $+1$ bezeichne, und wobei $j \in [0,n]$. Insgesamt ist also

$$\big\{[B]_{\mathbf{R}} \;:\; B \in \mathbf{R}^{n\times n} \text{ symmetrisch, } [B]_{\mathbf{C}} = [\mathrm{E}_n]_{\mathbf{C}}\big\} \;=\; \big\{[B_j]_{\mathbf{R}} \;:\; j \in [0,n]\big\}\,,$$

und diese Menge enthält $n+1$ Elemente.

(2) Sei $A = (1) \in L^{1\times 1}$. Es ist $\mathrm{O}_A(L) = \{-1,+1\} =: \{\pm 1\}$ (trivial genau dann, wenn $\mathrm{char}\, K = 2$, isomorph zu C_2 sonst). Gemäß Aufgabe 60.(3) ist

$$\mathrm{H}^1(G, \{\pm 1\}) \;\simeq\; \mathrm{Fib}_{L|K}((1))$$

als punktierte Mengen. Für $b \in K$ ist $[(b)]_L = [(1)]_L$ genau dann, wenn $b \in K^* \cap (L^*)^2$. Und für $b,\, \tilde{b} \in K^*$ ist $[(b)]_K = [(\tilde{b})]_K$ genau dann, wenn $b(K^*)^2 = \tilde{b}(K^*)^2$. Also steht $\mathrm{Fib}_{L|K}((1))$ durch Betrachtung des einzigen Matrixeintrags eines Repräsentanten in Bijektion zu $\big(K^*\cap(L^*)^2\big)/(K^*)^2$, und unter dieser Bijektion entspricht $[(1)]_K$ der (Klasse der) 1.

Aufgabe 62.

(1) Es ist $\mathrm{Z}(G) = 1$, wie man sich überzeuge, und also G isomorph zu $\operatorname{Inn} G := \{g \longmapsto g^x \ : \ x \in G\} \leqslant \operatorname{Aut} G$ via $x \longmapsto \sigma_x = (-)^x$.

Es ist $\operatorname{Aut} G = \operatorname{Inn} G$, d.h. jeder Automorphismus gegeben durch Konjugation mit einem Element aus G. Denn ein Automorphismus $G \xrightarrow[\sim]{\alpha} G$ bringt $(1,2,3)$ auf ein Element der Ordnung 3, und $(1,2)$ auf ein Element der Ordnung 2, was uns nur 6 Möglichkeiten läßt. Aber es ist bereits $|\operatorname{Inn}(G)| = |G|/|\mathrm{Z}(G)| = 6$.

Es schränkt nur die Konjugation mit Elementen von N auf N zu id_N ein.

Jeder Automorphismus von G führt N in sich über und induziert die Identität auf $G/N \simeq C_2$. Für die Konjugation mit Elementen von N gilt dies ohnehin.

Also ist $\operatorname{Aut}(G,N) \simeq N$. Nun ist aber auch $\operatorname{Inn}(G,N) = \{\sigma_z \ : \ z \in \mathrm{Z}(N) = N\} \simeq N$ unter demselben Isomorphismus, was uns auf $\operatorname{Aut}(G,N)/\operatorname{Inn}(G,N) = 1$ führt.

Die kurz exakte Sequenz $N \hookrightarrow G \longrightarrow G/N$ ist also autostarr. D.h. jeder Automorphismus von G, der N identisch nach N und G/N identisch nach G/N überführt, ist durch Konjugation mit einem zentralen Element von N gegeben.

Ferner ist hier wegen $|G/N|$ teilerfremd zu $|\mathrm{Z}(N)| = |N|$ auch $\mathrm{H}^1(G/N, \mathrm{Z}(N)) = 1$, wie via Korollar auch schon in Beispiel (1) aus §3.1.2 verwandt.

(2) Es ist $\mathrm{Z}(G) = 1$, wie man sich überzeuge, und also G isomorph zu $\operatorname{Inn} G \leqslant \operatorname{Aut} G$

Wir behaupten, es ist $\operatorname{Aut} G = \operatorname{Inn} G$. Dazu genügt es zu zeigen, daß $|\operatorname{Aut} G| < 48$. Es kommt $(1,2)$ unter einem Automorphismus $G \xrightarrow[\sim]{\alpha} G$ auf ein Element der Ordnung 2 mit einer Konjugationsklasse der Länge 6. Dafür steht genau die Konjugationsklasse von $(1,2)$ zur Verfügung. Es kommt $(1,2,3,4)$ auf ein Element der Ordnung 4. Dazu steht genau die Konjugationsklasse von $(1,2,3,4)$ zur Verfügung, und diese hat Länge 6. Damit ist $|\operatorname{Aut} G| \leqslant 36$ gezeigt.

Es ist nun $\mathrm{C}_G(N) = \langle (1,2,3,4) \rangle$, und also $\operatorname{Aut}(G,N) \simeq N$. Die Betrachtung der induzierten Operation auf G/N lieferte keine weiteren Bedinungen.

Nun ist aber auch $\operatorname{Inn}(G,N) = \{\sigma_z \ : \ z \in \mathrm{Z}(N) = N\} \simeq N$ unter demselben Isomorphismus, was uns auf $\operatorname{Aut}(G,N)/\operatorname{Inn}(G,N) = 1$ führt.

Die kurz exakte Sequenz $N \hookrightarrow G \longrightarrow G/N$ ist also autostarr.

Ferner ist hier auch $\mathrm{H}^1(G/N, \mathrm{Z}(N)) = 1$, wie auch schon in Beispiel (2) aus §3.1.2 festgestellt.

(3) Es ist $\langle c,\, a \ : \ c^4,\, a^2,\, c^a = c^- \rangle \xrightarrow{\sim} G = D_8 = \langle (1,2,3,4),\, (1,3) \rangle$ via $c \longmapsto (1,2,3,4)$ und $a \longmapsto (1,3)$. Identifizieren wir entlang dieses Isomorphismus, so wird $N = \langle c \rangle$. Ein Automorphismus von G liegt in $\operatorname{Aut}(G,N)$, falls er c nach c schickt. Die Bedingung, daß er die Identität auf $G/N \simeq C_2$ induziere, ist dann ohne weiteres Zutun erfüllt. Da $c^{c^i a} = c^-$ für $i \in [0,3]$, haben wir genau die 4 Automorphismen $c \longmapsto c,\ a \longmapsto c^i a$ für $i \in [0,3]$ in $\operatorname{Aut}(G,N)$. Schreiben wir $\alpha : c \longmapsto c,\ a \longmapsto ca$, so wird $\operatorname{Aut}(G,N) = \langle \alpha \rangle \simeq C_4$.

Konjugation mit c liefert $c \longmapsto c^c = c$, $a \longmapsto a^c = c^- ac = c^2$, i.e. $\sigma_c = \alpha^2$. Also ist $\operatorname{Inn}(G,N) = \langle \alpha^2 \rangle$. Somit ist $\operatorname{Aut}(G,N)/\operatorname{Inn}(G,N) \simeq C_2$.

Die kurz exakte Sequenz $N \hookrightarrow G \longrightarrow G/N$ ist nicht autostarr. Es gibt einen Automorphismus von G, der N identisch nach N und G/N identisch nach G/N überführt, der nicht von der Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{Z}(N)$ herrührt.

Aufgabe 63. Wir identifizieren M mit $M \rtimes 1 \leqslant M \rtimes G = H$ und G mit $1 \rtimes G \leqslant M \rtimes G = H$.

Mit dem Beweis des Satzes aus aus §3.1.2 erkennen wir, daß wir eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Z}^1(H,M) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{K} \\ \partial & \longmapsto & K_\partial \end{array}$$

haben. In der Tat wurde beim Nachweis der Surjektivität von $\mathrm{H}^1(H,M) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{K}}$ tatsächlich gezeigt, daß jedes Komplement von der Form K_∂ ist für eine Derivation ∂, und nicht nur, daß in jeder Konjugationsklasse eines dieser Form liegt. Die Injektivität auf der Ebene $\mathrm{Z}^1(H,M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}$ folgt aus der Tatsache, daß jedes Komplement K für gegebenes $g \in G$ genau ein Element der Form (m,g) enthält.

Mit dem Satz aus §3.1.3 haben wir auch einen Gruppenisomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Aut}(G,N) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Z}^1(G,M) \\ \sigma & \longmapsto & (\partial_\sigma : g \longmapsto (g\sigma)g^-) \end{array}$$

wobei die Abbildungsvorschrift dem dortigen Beweis seiner Surjektivität entnommen ist, unter Verwendung des Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} H/M$, $g \longmapsto gM$.

Zusammengesetzt erhalten wir eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Aut}(G,N) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{K} \\ \sigma & \longmapsto & K_{\partial_\sigma} . \end{array}$$

Bleibt also zu zeigen, daß $K_{\partial_\sigma} = G\sigma$ für $\sigma \in \mathrm{Aut}(H,M)$. Sei dazu $g\sigma = (1,g)\sigma =: (m\hat{\sigma}, g)$ geschrieben, was möglich ist, da σ auf H/M die Identität induziert, d.h. ein Element der Form $(*,g)$ auf ein Element der Form $(*,g)$ abbildet. Es wird $g\partial_\sigma = (g\hat{\sigma},g)(1,g^-) = (g\hat{\sigma},1) = g\hat{\sigma} \in M$. Also ist

$$K_{\partial_\sigma} \;=\; \{(g\partial_\sigma, g) \;:\; g \in G\} \;=\; \{(g\partial_\sigma, g) \;:\; g \in G\} \;=\; \{(g\hat{\sigma}, g) \;:\; g \in G\} \;=\; \{(1,g)\sigma \;:\; g \in G\} \;=\; G\sigma \;.$$

Aufgabe 64.

(1) Nach dem dritten Lemma aus §2.5.5.3 ist das Bild von $\mathrm{Tr}\!\downarrow_H^G : G^{\mathrm{ab}} \longrightarrow H^{\mathrm{ab}} = H$ gleich $\mathrm{Z}(N) \cap H$. Da nun nach Voraussetzung $H \leqslant \mathrm{Z}(N)$, ist $\mathrm{Tr}\!\downarrow_H^G : G^{\mathrm{ab}} \longrightarrow H$ surjektiv. Komposition mit dem Epimorphismus $G \longrightarrow G^{\mathrm{ab}}$ liefert die Behauptung.

(2) Sei M der Kern des Epimorphismus $G \longrightarrow H$ aus (1). Da H eine p-Sylowgruppe von G ist, teilt p die Ordnung von M nicht. Aus Ordnungsgründen ist also $M \cap H = 1$. Somit ist

$$|MH| \;=\; |M||H|/|M \cap H| \;=\; |M||H| \;=\; |G| \,,$$

und also H ein Komplement zu M. Es folgt $G \simeq M \rtimes H$.

Vgl. auch den Satz von Schur-Zassenhaus aus §3.2.2.

(3) Es teilt p die Ordnung von N/H nicht, da H eine p-Sylowgruppe in G ist. Jeder Primteiler von $|N/H|$ ist also größer als p. Ferner operiert N/H via Konjugation auf H, i.e. wir haben einen Gruppenmorphismus $N/H \longrightarrow \mathrm{Aut}\, H$.

Fall $r = 1$. Nach dem ersten Lemma von §2.5.5.3 ist jeder Primteiler von $|\mathrm{Aut}\, H|$ ein Teiler von p oder von $p-1$. Also ist das Bild von $N/H \longrightarrow \mathrm{Aut}\, H$ gleich 1. In anderen Worten, jedes Element von N vertauscht mit jedem Element von H; d.h. $H \leqslant \mathrm{Z}(N)$.

Fall $r = 2$ *und* $p \geqslant 3$. Nach dem ersten Lemma von §2.5.5.3 ist jeder Primteiler von $|\mathrm{Aut}\, H|$ ein Teiler von p, von $p-1$ oder von $p+1$. Da $p \geqslant 3$, ist der kleinste Primteiler von $|N/H|$ aber sogar $\geqslant p+2$. Also ist auch diesenfalls das Bild von $N/H \longrightarrow \mathrm{Aut}\, H$ gleich 1.

Die Voraussetzung an p kann im Fall $r = 2$ nicht entfallen, wie das Beispiel $G = \mathcal{A}_4$ und $H = \langle (1,2)(3,4),\, (1,3)(2,4) \rangle$ zeigt. Denn hier ist $N = G$, und H nicht im Zentrum von G enthalten. Und in der Tat **hat** hier H zwar ein Komplement, aber es **ist** H kein Komplement.

Aufgabe 65.

(1) Sei $C_p = \langle c \rangle$. Wir verwenden die Auflösung aus Aufgabe 38. Schreiben wir, unter Mißbrauch von Bezeichnung, $M \xrightarrow{v} M$, $m \longmapsto mc - m$, und $M \xrightarrow{u} M$, $m \longmapsto \sum_{i\in[0,p-1]} mc^i$, so haben wir die erste und die zweite Cohomologiegruppe von

$$(\cdots \longleftarrow M \xleftarrow{u} M \xleftarrow{v} M \xleftarrow{u} M \xleftarrow{v} M)$$

der Größe nach zu vergleichen. Nun aber ist $\mathrm{H}^1(C_p, M) \simeq \operatorname{Kern} u/\operatorname{Im} v$ und, genauso, $\mathrm{H}^2(C_p, M) \simeq \operatorname{Kern} v/\operatorname{Im} u$. Der Vergleich liefert

$$|\operatorname{Kern} u/\operatorname{Im} v| \cdot |\operatorname{Kern} v/\operatorname{Im} u|^{-1} \;=\; |\operatorname{Kern} u||\operatorname{Im} u|(|\operatorname{Kern} v||\operatorname{Im} v|)^{-1} \;=\; |M||M|^{-1} \;=\; 1\;.$$

Die Aussage für beliebiges $k \geqslant 1$ folgt nun mit Periodizität.

(2) Wir verwenden die Bezeichnungen aus der Lösung zu Aufgabe 62.(3) und identifizieren $D_8 = \langle (1,2,3,4),\ (1,3) \rangle = \langle c,\, a \;:\; c^4,\, a^2,\, c^a = c^- \rangle$. Der Automorphismus $\alpha : c \longmapsto c,\ a \longmapsto ca$ ist nicht inner, da er $(1,3)$ nach $(1,2,3,4)(1,3) = (1,2)(3,4)$ schickt, und diese beiden Elemente noch nicht einmal in der Obergruppe $\mathcal{S}_4$ zueinander konjugiert sind. Wohl aber ist $\alpha^2 : c \longmapsto c,\ a \longmapsto c^2 a$ inner, da gegeben durch Konjugation mit $(1,2,3,4)$. Ferner schränkt α zur Identität auf $\mathrm{Z}(D_8) = \langle c^2 \rangle$ ein.

(3) Ausgehend von der kurz exakten Sequenz $N \longrightarrow G \longrightarrow H$ definieren wir den Morphismus

$$\begin{array}{rcl} H & \longrightarrow & \operatorname{Out} N \\ h & \longmapsto & ((-)^g|_N) \operatorname{Inn} N\;, \end{array}$$

wobei $g \in G$ ein Urbild von $h \in H$ sei. Zwei solche Wahlen differieren um ein Element in N, so daß die Repräsentanten der Bildelemente nur um einen inneren Automorphismus differieren. Also ist die Abbildung wohldefiniert, und sodann auch ein Gruppenmorphismus. Vgl. den Anfang von §3.2.1.

Beachte ferner, daß wir einen Operationsmorphismus

$$\begin{array}{rcl} H^\circ & \longrightarrow & \operatorname{Aut} \mathrm{Z}(N) \\ h & \longmapsto & {}^g(-)|_{\mathrm{Z}(N)}\;, \end{array}$$

haben, wobei $g \in G$ ein Urbild von $h \in H$ sei, welcher $\mathrm{Z}(N)$ zu einem multiplikativ geschriebenen $\mathbf{Z}H$-Modul macht.

Seien nun kurz exakte Sequenzen $N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} H$ und $N \xrightarrow{\iota'} G' \xrightarrow{\pi'} H$ gegeben, die denselben Morphismus $H \xrightarrow{\psi} \operatorname{Out} N$ liefern.

Sei durch elementweise Urbildwahl eine Mengenabbildung $H \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Aut} N$ gewählt, die mit der Restklassenabbildung $\operatorname{Aut} N \longrightarrow \operatorname{Out} N$ zu ψ komponiert. Sei φ so gewählt, daß $1\varphi = \mathrm{id}_N$. Wir fixieren φ.

Für jedes $h \in H$ und jedes $g \in G$ mit $g\pi = h$ ist $((-)^g|_N) \operatorname{Inn} N = h\psi = (h\varphi) \operatorname{Inn} N$. Also gibt es ein $m \in N$ mit $(-)^{gm}|_N = h\varphi$; und gm bildet ebenfalls unter π auf h ab. Dies erlaubt uns, eine Abbildung von Mengen $H \xrightarrow{s} G$ mit $s\pi = \mathrm{id}_H$ derart zu finden, daß $(-)^{hs}|_N = h\varphi$ stets. Dito finden wir eine Mengenabbildung $H \xrightarrow{s'} G'$ mit $s'\pi' = \mathrm{id}_H$ derart, daß $(-)^{hs'}|_N = h\varphi$ stets. Sei ferner $1s = 1$ und $1s' = 1$ gewählt, was wegen $1\varphi = \mathrm{id}_N$ möglich ist.

Setze

$$\begin{array}{rcl} H \times H & \xrightarrow{f} & \mathrm{Z}(N) \\ (h, \tilde{h}) & \longmapsto & (h,\tilde{h})f \;:=\; \big((hs)(\tilde{h}s)((h\tilde{h})s)^-\big)\iota^- \big((hs')(\tilde{h}s')((h\tilde{h})s')^-\big)^- \iota'^- \;. \end{array}$$

Zunächst halten wir fest, daß die Abbildung ein Element von N liefert, da $\big((hs)(\tilde{h}s)((h\tilde{h})s)^-\big)$ von π und $\big((hs')(\tilde{h}s')((h\tilde{h})s')^-\big)$ von π' zum Verschwinden gebracht wird.

Für alle $n \in N$ ist nun

$$n^{\big((hs)(\tilde{h}s)((h\tilde{h})s)^-\big)\iota^-} = n(h\varphi)(\tilde{h}\varphi)((h\tilde{h})\varphi)^- = n^{\big((hs')(\tilde{h}s')((h\tilde{h})s')^-\big)\iota'^-},$$

weswegen der Quotient $(h,\tilde{h})f$ dieser beiden Konjugatoren in der Tat in $\mathrm{Z}(N)$ zu liegen kommt.

Schreibe $(h,\tilde{h})f_0 := \big((hs)(\tilde{h}s)((h\tilde{h})s)^-\big)\iota^- \in N$ und $(h,\tilde{h})f_1 := \big((hs')(\tilde{h}s')((h\tilde{h})s')^-\big)\iota^- \in N$ für $h,\, \tilde{h} \in H$. Dann ist $(h,\tilde{h})f = (h,\tilde{h})f_0 \cdot ((h,\tilde{h})f_1)^-$.

Seien $h_1,\, h_2,\, h_3 \in H$. Wir beobachten, daß

$$\begin{array}{rl}
& \big({}^{h_1}((h_2,h_3)f_0) \cdot (h_1,h_2h_3)f_0\big)\iota \\
= & {}^{h_1 s}\big((h_2s)(h_3s)((h_2h_3)s)^-\big)(h_1s)((h_2h_3)s)((h_1h_2h_3)s)^- \\
= & (h_1s)(h_2s)(h_3s)((h_2h_3)s)^-(h_1s)^-(h_1s)((h_2h_3)s)((h_1h_2h_3)s)^- \\
= & (h_1s)(h_2s)(h_3s)((h_1h_2h_3)s)^- \\
= & (h_1s)(h_2s)((h_1h_2)s)^-((h_1h_2)s)(h_3s)((h_1h_2h_3)s)^- \\
= & \big((h_1,h_2)f_0) \cdot (h_1h_2,h_3)f_0\big)\iota\,,
\end{array}$$

und dito für f_1.

Wir behaupten, daß $f \in \mathrm{Z}^2(H,\mathrm{Z}(N))$. Da die Werte von f zentral in N sind, ist in der Tat für $h_1,\, h_2,\, h_3 \in H$

$$\begin{array}{rcl}
1 & = & \big({}^{h_1}((h_2,h_3)f_0) \cdot (h_1,h_2h_3)f_0\big)\big((h_1,h_2)f_0) \cdot (h_1h_2,h_3)f_0\big)^- \\
& = & \big({}^{h_1}((h_2,h_3)f) \cdot (h_1,h_2h_3)f\big)\big((h_1,h_2)f) \cdot (h_1h_2,h_3)f\big)^- \\
& & \cdot\big({}^{h_1}((h_2,h_3)f_1) \cdot (h_1,h_2h_3)f_1\big)\big((h_1,h_2)f_1) \cdot (h_1h_2,h_3)f_1\big)^- \\
& = & \big({}^{h_1}((h_2,h_3)f) \cdot (h_1,h_2h_3)f\big)\big((h_1,h_2)f) \cdot (h_1h_2,h_3)f\big)^-\,.
\end{array}$$

Sei die Restklasse von f in $\mathrm{H}^2(H,\mathrm{Z}(N))$ das unseren beiden kurz exakten Sequenzen (ι,π) und (ι',π') zugeordnete Element.

Wir behaupten, daß dieses f unabhängig von den Wahlen von s und s' ist. Seien hierzu alternative Abbildungen $\tilde{s}$ und $\tilde{s}'$ gewählt, und schreibe entsprechend $\tilde{f}$, $\tilde{f}_0$ und $\tilde{f}_1$.

Für alle $n \in N$ ist nun

$$n^{\big((hs)(\tilde{h}s)((h\tilde{h})s)^-\big)\iota^-} = n(h\varphi)(\tilde{h}\varphi)((h\tilde{h})\varphi)^- = n^{\big((h\tilde{s})(\tilde{h}\tilde{s})((h\tilde{h})\tilde{s})^-\big)\iota^-},$$

weswegen der Quotient $((h,\tilde{h})f_0)((h,\tilde{h})\tilde{f}_0)^-$ dieser beiden Konjugatoren in der Tat in $\mathrm{Z}(N)$ zu liegen kommt. Dito $((h,\tilde{h})f_1)^-((h,\tilde{h})\tilde{f}_1)$. Insbesondere ist stets

$$\begin{array}{rcl}
((h,\tilde{h})f)((h,\tilde{h})\tilde{f})^- & = & ((h,\tilde{h})f_0)((h,\tilde{h})f_1)^-((h,\tilde{h})\tilde{f}_1)((h,\tilde{h})\tilde{f}_0)^- \\
& = & ((h,\tilde{h})f_0)((h,\tilde{h})\tilde{f}_0)^-((h,\tilde{h})f_1)^-((h,\tilde{h})\tilde{f}_1)\,.
\end{array}$$

Beachte, daß stets $(hs)^-(h\tilde{s}) \in \mathrm{Z}(N)\iota$, da hs und $h\tilde{s}$ beide unter π nach h abgebildet werden und beide den Automorphismus $h\varphi$ auf N induzieren. Dito $(hs')^-(h\tilde{s}') \in \mathrm{Z}(N)\iota'$.

Sei

$$\begin{array}{rcl}
hu_0\iota & := & \big((h\tilde{s})(hs)^-\big) \\
hu_1\iota' & := & \big((hs')(h\tilde{s}')^-\big)
\end{array}$$

für $h \in H$. Dies definiert zwei Abbildungen $u_0,\, u_1\, :\, H \longrightarrow \mathrm{Z}(N)$. Es ist

$$\begin{array}{rcl}
\Big(((h,\tilde h)f_0)((h,\tilde h)\tilde f_0)^-\Big)\iota & = & (hs)(\tilde h s)((h\tilde h)s)^-((h\tilde h)\tilde s)(\tilde h\tilde s)^-(h\tilde s)^- \\
& = & (hs)(\tilde h s)\cdot {}^{((h\tilde h)s)^-}\big(((h\tilde h)\tilde s)((h\tilde h)s)^-\big)\cdot(\tilde h\tilde s)^-(h\tilde s)^- \\
& = & (hs)(\tilde h s)\cdot {}^{((h\tilde h)s)^-}\big((h\tilde h)u_0\iota\big)\cdot(\tilde h\tilde s)^-(h\tilde s)^- \\
& = & (hs)(\tilde h s)\cdot \big({}^{(h\tilde h)^-}((h\tilde h)u_0)\big)\iota\cdot(\tilde h\tilde s)^-(h\tilde s)^- \\
& = & (hs)(\tilde h s)\cdot \big({}^{\tilde h^- h^-}((h\tilde h)u_0)\big)\iota\cdot(\tilde h\tilde s)^-(h\tilde s)^- \\
& = & (hs)(\tilde h s)\cdot {}^{(\tilde h s)^-(hs)^-}\big((h\tilde h)u_0\iota\big)\cdot(\tilde h\tilde s)^-(h\tilde s)^- \\
& = & (h\tilde h)u_0\iota\cdot(hs)(\tilde h s)\cdot(\tilde h\tilde s)^-(h\tilde s)^- \\
& = & (h\tilde h)u_0\iota\cdot(hs)\cdot\big(\tilde h u_0\iota\big)^-\cdot(h\tilde s)^- \\
& = & (h\tilde h)u_0\iota\cdot\big(\big({}^{h}(\tilde h u_0)\big)\iota\big)^-\cdot(hs)(h\tilde s)^- \\
& = & (h\tilde h)u_0\iota\cdot\big(\big({}^{h}(\tilde h u_0)\big)\iota\big)^-\cdot\big(hu_0\iota\big)^- \\
& = & \Big((h\tilde h)u_0\cdot\big({}^{h}(\tilde h u_0)\big)^-\cdot\big(hu_0\big)^-\Big)\iota\;.
\end{array}$$

Analog ergibt sich

$$\begin{array}{rcl}
\Big(((h,\tilde h)f_1)^-((h,\tilde h)\tilde f_1)\Big)\iota' & = & ((h\tilde h)s')(\tilde h s')^-(hs')^-(h\tilde s')(\tilde h\tilde s')((h\tilde h)\tilde s')^- \\
& = & ((h\tilde h)s')(\tilde h s')^-\cdot\big(\big({}^{h^-}(hu_1)\big)\iota'\big)^-\cdot(\tilde h\tilde s')((h\tilde h)\tilde s')^- \\
& = & \big(\big({}^{h\tilde h\tilde h^- h^-}(hu_1)\big)\iota'\big)^-\cdot((h\tilde h)s')(\tilde h s')^-(\tilde h\tilde s')((h\tilde h)\tilde s')^- \\
& = & \big(hu_1\iota'\big)^-\cdot((h\tilde h)s')(\tilde h s')^-(\tilde h\tilde s')((h\tilde h)s')^- \\
& = & \big(hu_1\iota'\big)^-\cdot((h\tilde h)s')\cdot\big(\big({}^{\tilde h^-}(\tilde h u_1)\big)\iota'\big)^-\cdot((h\tilde h)\tilde s')^- \\
& = & \big(hu_1\iota'\big)^-\cdot\big(\big({}^{h\tilde h\tilde h^-}(\tilde h u_1)\big)\iota'\big)^-\cdot((h\tilde h)s')\cdot((h\tilde h)\tilde s')^- \\
& = & \big(hu_1\iota'\big)^-\cdot\big(\big({}^{h}(\tilde h u_1)\big)\iota'\big)^-\cdot((h\tilde h)s')\cdot((h\tilde h)\tilde s')^- \\
& = & \big(hu_1\iota'\big)^-\cdot\big(\big({}^{h}(\tilde h u_1)\big)\iota'\big)^-\cdot(h\tilde h)u_1\iota'\;. \\
& = & \Big(\big(hu_1\big)^-\cdot\big({}^{h}(\tilde h u_1)\big)^-\cdot(h\tilde h)u_1\Big)\iota'\;.
\end{array}$$

Setzen wir $hu := (hu_0)(hu_1)$, so wird unter Verwendung von $\mathrm{Z}(N)$ abelsch

$$\begin{array}{rcl}
((h,\tilde h)f)((h,\tilde h)\tilde f)^- & = & ((h,\tilde h)f_0)((h,\tilde h)\tilde f_0)^-((h,\tilde h)f_1)^-((h,\tilde h)\tilde f_1) \\
& = & (h\tilde h)u\cdot\big({}^{h}(\tilde h u)\big)^-\cdot\big(hu\big)^-\;,
\end{array}$$

was in der Tat zeigt, daß $(h,\tilde h)\longmapsto((h,\tilde h)f)((h,\tilde h)\tilde f)^-$ in $\mathrm{B}^2(H,\mathrm{Z}(N))$ liegt.

Zeigen wir nun, daß genau dann ein Isomorphismus $G\xrightarrow[\sim]{\vartheta}G'$ mit $\iota\vartheta=\iota'$ und $\vartheta\pi'=\pi$ existiert, wenn f in $H^2(H,\mathrm{Z}(N))$ verschwindet.

Existiere ϑ wie angegeben. Wähle s wie oben. Wähle $hs' := hs\vartheta$ für $h\in H$. Dann wird

$$\begin{array}{rcl}
(h,\tilde h)f\iota' & = & \big((hs)(\tilde h s)((h\tilde h)s)^-\big)\iota^-\iota'\cdot\big((hs')(\tilde h s')((h\tilde h)s')^-\big)^- \\
& = & \big((hs)(\tilde h s)((h\tilde h)s)^-\big)\vartheta\cdot\big((hs')(\tilde h s')((h\tilde h)s')^-\big)^- \\
& = & \big((hs')(\tilde h s')((h\tilde h)s')^-\big)\cdot\big((hs')(\tilde h s')((h\tilde h)s')^-\big)^- \\
& = & 1\;.
\end{array}$$

Sei nun umgekehrt vorausgesetzt, daß f in $H^2(H,\mathrm{Z}(N))$ verschwindet. Sei $u : H\longrightarrow\mathrm{Z}(N)$ mit

$$(h,\tilde h)f \;=\; {}^{h}(\tilde h u)\cdot\big((h\tilde h)u\big)^-\cdot hu\;,$$

d.h. mit

$$(*)\qquad (h\tilde h)u\cdot(h,\tilde h)f_0 \;=\; (hu)\cdot{}^{h}(\tilde h u)\cdot(h,\tilde h)f_1$$

stets.

Ein Element $g \in G$ können wir auf eindeutige Weise schreiben als $g = n\iota \cdot hs$ mit $n \in N$ und $h \in H$. In der Tat, es ist $h = g\pi$ und $n = g \cdot (g\pi s)^-$. Setze

$$g\vartheta \;=\; (n\iota \cdot hs)\vartheta \;:=\; (hu \cdot n)\iota' \cdot hs' \;.$$

Wie eingangs §3.2.1 bemerkt, genügt es zu zeigen, daß ϑ ein Gruppenmorphismus mit $\iota\vartheta = \iota'$ und $\vartheta\pi' = \pi$ ist, es folgt dann, daß ϑ ein Isomorphismus ist.

Hierbei erkennen wir, daß $\iota\vartheta = \iota'$ und $\vartheta\pi' = \pi$ gelten. In der Tat ist ersteres der Fall $h = 1$, und für zweiteres beachte man $g\pi = h = h's'\pi'$.

Seien nun $g = n\iota \cdot hs$ und $\tilde{g} = \tilde{n}\iota \cdot \tilde{h}s$ mit $n,\, \tilde{n} \in N$ und $h,\, \tilde{h} \in H$ gegeben. Es ist

$$\begin{array}{rcl} g\tilde{g} & = & n\iota \cdot hs \cdot \tilde{n}\iota \cdot \tilde{h}s \\ & = & \big(n \cdot \tilde{n}((h\varphi)^-)\big)\iota \cdot (hs \cdot \tilde{h}s) \\ & = & \big(n \cdot \tilde{n}((h\varphi)^-) \cdot (h,\tilde{h})f_0\big)\iota \cdot (h\tilde{h})s \;, \end{array}$$

was abgebildet wird auf

$$\big((h\tilde{h})u \cdot n \cdot \tilde{n}((h\varphi)^-) \cdot (h,\tilde{h})f_0\big)\iota' \cdot (h\tilde{h})s' \;.$$

Dagegen ergibt sich das Produkt der Bilder von g und $\tilde{g}$ zu

$$\begin{array}{rcl} (hu \cdot n)\iota' \cdot hs' \cdot (\tilde{h}u \cdot \tilde{n})\iota' \cdot \tilde{h}s' & = & \big(hu \cdot n \cdot {}^{h}(\tilde{h}u) \cdot \tilde{n}((h\varphi)^-)\big)\iota' \cdot hs' \cdot \tilde{h}s' \\ & = & \big(hu \cdot n \cdot {}^{h}(\tilde{h}u) \cdot \tilde{n}((h\varphi)^-) \cdot (h,\tilde{h})f_1\big)\iota' \cdot (h\tilde{h})s' \end{array}$$

Da das Bild von u in $\mathrm{Z}(N)$ liegt, ist das aber mit $(*)$ dasselbe Resultat.

(4) Zur ersten Behauptung. Wir führen eine Induktion nach $|P|$. Für $|P| = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei $|P| > 1$. Beachte, daß $\mathrm{Z}(P) \neq 1$, da P eine p-Gruppe ist. Sei $U < P$. Ist $\mathrm{Z}(P) \leqslant U$, so beachten wir, daß wir den Normalisator von U in P als Urbild des Normalisators von $U/\mathrm{Z}(P)$ in $P/\mathrm{Z}(P)$ bilden können. Da $|P/\mathrm{Z}(P)| < |P|$, ist nach Induktionsvoraussetzung aber $U/\mathrm{Z}(P)$ als echte Untergruppe von $P/\mathrm{Z}(P)$ auch echt in ihrem Normalisator enthalten. Ist hingegen $\mathrm{Z}(P) \not\leqslant U$, so ist $U < \mathrm{Z}(P)U \leqslant \mathrm{N}_P(U)$.

Zur zweiten Behauptung. Sei U eine maximale echte Untergruppe von P. Wäre U kein Normalteiler, so wäre $U < \mathrm{N}_P(U) < P$, im Widerspruch zur Maximalität von U. Also ist $U \lhd P$. Wäre $[P:U] > p$, so hätte die Gruppe P/U eine Element von Ordnung p (Satz von Cauchy), und also eine echte Untergruppe. Deren Urbild in P stünde im Widerspruch zur Maximalität von U.

(5) Wir verwenden Bezeichnungen wie in (1). Schreibe $M[p] := \{m \in M \;\;:\;\; pm = 0\}$ etc. Nach Voraussetzung ist $Mu = \operatorname{Kern} v = M^{C_p}$. Sei $m \in M \smallsetminus M^{C_p}$, i.e. sei $mc \neq m$. Dann ist M/M^{C_p} als abelsche Gruppe erzeugt von mM^{C_p}, und also $M = M^{C_p} + \mathbf{Z}m$. Daher ist auch $M^{C_p} = Mu = M^{C_p}u + \mathbf{Z}mu = pM^{C_p} + \mathbf{Z}mu$. Es folgt, daß M^{C_p}/pM^{C_p} von der Restklasse von mu als abelsche Gruppe erzeugt ist. Da M und C_p beides p-Gruppen sind, ist $M^{C_p} \neq 0$. Folglich ist $\dim_{\mathbf{F}_p} M^{C_p}/pM^{C_p} = 1$. Mit dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen ist daher auch M^{C_p} zyklisch, erzeugt von mu, und also $\dim_{\mathbf{F}_p} M^{C_p}[p] = 1$. Da M nicht zyklisch ist, ist $\dim_{\mathbf{F}_p} M[p] > 1$. Also gibt es ein $m \in M \smallsetminus M^{C_p}$ mit $pm = 0$, mit welchem wir das bisherige m ersetzen. Da $M^{C_p} = \mathbf{Z}mu$, folgen $|M^{C_p}| = p$ und $mu \neq 0$. Insbesondere ist $|M| = p^2$. Da C_p auf M/M^{C_p} wegen $|\mathrm{Aut}(M/M^{C_p})| = p-1 \not\equiv_p 0$ trivial operiert, ist $mc = m + m'$ mit einem $m' \in M^{C_p}$, und also $mc^i = m + im'$ für $i \geqslant 0$. Folglich ist

$$0 \;\neq\; mu \;=\; \sum_{i\in[0,p-1]} mc^i \;=\; pm + \tbinom{p}{2}\, m' \;=\; \tbinom{p}{2}\, m' \;.$$

Da $pm' = 0$, und da $\binom{p}{2}$ für $p \geqslant 3$ durch p teilbar ist, folgt $p = 2$ und $|M| = 4$.

(6) Sei das Gegenteil angenommen. Sei P ein Gegenbeispiel minimaler Ordnung. Es gibt also keinen Automorphismus von P, dessen Bild in $\operatorname{Out} P$ die Ordnung p hat, und welcher auf $\mathrm{Z}(P)$ zur Identität einschränkt. Einen solchen Automorphismus gibt es dagegen für alle echten nichtabelschen Untergruppen von P.

Sei Q eine maximale echte Untergruppe von P, welche $\mathrm{Z}(P)$ enthält. Nach (4) ist Q ein Normalteiler von Index p in P. Falls möglich, wähle Q nichtabelsch. Falls Q also abelsch gewählt werden mußte, sind alle maximalen Untergruppen in P, die $\mathrm{Z}(P)$ enthalten, abelsch.

Wäre $\mathrm{Z}(Q) = \mathrm{C}_P(Q) \cap Q < \mathrm{C}_P(Q)$, so wäre $\mathrm{C}_P(Q) \not\leqslant Q$, und also $P = Q\mathrm{C}_P(Q)$. Da $\mathrm{C}_P(Q)/\mathrm{Z}(Q)$ zyklisch wäre, sagen wir, erzeugt von $x\mathrm{Z}(Q)$, wäre jedes Element von $\mathrm{C}_P(Q)$ von der Form $x^i z$ für ein $i \in \mathbf{Z}$ und ein $z \in \mathrm{Z}(Q)$. Da insbesondere $x \in \mathrm{C}_P(\mathrm{Z}(Q))$, wäre $\mathrm{C}_P(Q)$ also abelsch. Wegen $P = Q\mathrm{C}_P(Q)$ wäre also $\mathrm{C}_P(Q)$ in $\mathrm{Z}(P)$ enthalten. Insgesamt wäre $\mathrm{Z}(Q) < \mathrm{C}_P(Q) \leqslant \mathrm{Z}(P) \leqslant \mathrm{Z}(Q)$, was nicht geht. Also ist $\mathrm{Z}(Q) = \mathrm{C}_P(Q)$.

Wäre nun $\mathrm{H}^1(P/Q, \mathrm{Z}(Q)) \neq 1$, so wäre nach dem Satz aus §3.1.3 $\mathrm{H}^1(P/Q, \mathrm{Z}(Q)) \simeq \operatorname{Aut}(P,Q)/\operatorname{Inn}(P,Q)$ eine nichttriviale p-Gruppe (annulliert von der p-Potenz $|\mathrm{Z}(Q)|$), und somit gäbe es ein $\alpha \in \operatorname{Aut}(P,Q)/\operatorname{Inn}(P,Q)$ von Ordnung p. Insbesondere wäre $\alpha|_Q = \mathrm{id}_Q$. Wäre nun α durch Konjugation mit einem Element $x \in P$ gegeben, so wäre demnach $x \in \mathrm{C}_P(Q) = \mathrm{Z}(Q)$. Dann aber wäre $\alpha \in \operatorname{Inn}(P,Q)$, was ausgeschlossen wurde. Somit ist α kein innerer Automorphismus von P, der zur p-ten Potenz inner wird, im Widerspruch zur Wahl von P als Gegenbeispiel. Also ist $\mathrm{H}^1(P/Q, \mathrm{Z}(Q)) = 1$, und mit (1) also auch $\mathrm{H}^2(P/Q, \mathrm{Z}(Q)) = 1$.

Es ist $\mathrm{Z}(P) < \mathrm{Z}(Q)$. Denn wäre $\mathrm{Z}(P) = \mathrm{Z}(Q)$, so wäre mit Aufgabe 49.(4) oder 54.(5) auch $1 = \mathrm{H}^1(P/Q, \mathrm{Z}(Q)) = {}_{\text{(Gruppen)}}(P/Q, \mathrm{Z}(Q))$, was wegen $P/Q \simeq C_p$ nach sich zöge, daß $\mathrm{Z}(Q) = 1$, was wiederum, da Q eine p-Gruppe ist, nach sich zöge, daß $Q = 1$ ist, und folglich $P \simeq C_p$ abelsch zur Konsequenz hätte, was nicht der Fall ist.

Fall Q nichtabelsch. Wir haben einen Morphismus

$$\begin{array}{rcl} P & \longrightarrow & \operatorname{Aut}(\operatorname{Aut} Q) \\ x & \longmapsto & \left(\beta \longmapsto \beta^x := \sigma_x^- \beta \sigma_x\right) , \end{array}$$

wobei $\sigma_x : Q \longrightarrow Q$, $y \longmapsto y^x$. Für $y \in Q$ ist nun $(\sigma_y)^x = \sigma_{x^- yx} = \sigma_{y^x}$ in $\operatorname{Inn} Q$. Wir erhalten so einen induzierten Operationsmorphismus $P \longrightarrow \operatorname{Aut}(\operatorname{Out} Q)$. Beachte, daß $\mathrm{Z}(Q)$ eine charakteristische Untergruppe von Q ist, i.e. eine von Automorphismen von Q in sich selbst überführte. Sei

$$U \;:=\; \{\beta \operatorname{Inn} Q \in \operatorname{Out} Q \;:\; \beta|_{\mathrm{Z}(Q)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Z}(Q)}\} \;.$$

Diese Definition ist von der Wahl des Repräsentanten β, da für $y \in Q$ bereits $\sigma_y|_{\mathrm{Z}(Q)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Z}(Q)}$. Wegen der Minimalität von P enthält U ein Element der Ordnung p, so daß p die Ordnung von U teilt.

Wir behaupten, daß unsere Operation von P auf $\operatorname{Out} Q$ einschränkt auf eine Operation von P auf U. Sei $x \in P$. Sei $\beta \operatorname{Inn} Q \in U$. Wir haben zu zeigen, daß $\sigma_x^- \beta \sigma_x|_{\mathrm{Z}(Q)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Z}(Q)}$. Sei $z \in \mathrm{Z}(Q)$. Es wird tatsächlich

$$z\sigma_x^- \beta\sigma_x \;=\; (\underbrace{{}^x z}_{\in \mathrm{Z}(Q),\ \text{da charakteristisch}})\beta\sigma_x \;=\; ({}^x z)\sigma_x \;=\; z \;.$$

Da P eine p-Gruppe ist, und da $1 \in U$ fix unter dieser Operation ist, zeigt eine Betrachtung von Bahnenlängen von P auf U, daß es wenigstens einen weiteren Fixpunkt gibt. Somit gibt es auch ein Element $\gamma \operatorname{Inn} Q \in U$ von Ordnung p mit $\gamma^x = \sigma_x^- \gamma \sigma_x = \gamma$ für alle $x \in P$.

Wir wollen nun ein Element $\delta \in \operatorname{Aut} P$ mit $\delta|_Q = \gamma$ konstruieren.

Schreibe unsere kurz exakte Sequenz $Q \xrightarrow{\iota} P \xrightarrow{\pi} P/Q$. Wir haben eine weitere kurz exakte Sequenz $Q \xrightarrow{\gamma\iota} P \xrightarrow{\pi} P/Q$. Da γ fix unter P ist, gilt für alle $y \in Q$ und alle $x \in P$, daß

$$(y^x)\gamma \;=\; (y\gamma)^x \;.$$

Die erste kurz exakte Sequenz liefert

$$\begin{array}{rcl} P/Q & \longrightarrow & \operatorname{Out} Q \\ xQ & \longmapsto & (y \longmapsto y^x) \operatorname{Inn} Q \ . \end{array}$$

Die zweite kurz exakte Sequenz liefert

$$\begin{array}{rcl} P/Q & \longrightarrow & \operatorname{Out} Q \\ xQ & \longmapsto & (y \longmapsto ((y\gamma)^x)\gamma^-) \operatorname{Inn} Q \ , \end{array}$$

was dasselbe ist. Da nun $\mathrm{H}^2(P/Q, \mathrm{Z}(Q)) = 1$, gibt es gemäß (3) einen Isomorphismus $P \xrightarrow[\sim]{\delta} P$ so, daß insbesondere $\iota\delta = \gamma\iota$, i.e. daß $\delta|_Q = \gamma$.

Wir behaupten, daß die Ordnung von $\delta \operatorname{Inn} P$ durch p teilbar ist.

Die Ordnung des Bildes von $P \longrightarrow \operatorname{Aut} Q$ ist das p-fache der Ordnung des Bildes von $Q \longrightarrow \operatorname{Aut} Q$, da die Kerne $\mathrm{C}_P(Q)$ und $\mathrm{Z}(Q)$ übereinstimmen. Herausfaktorisieren des letzteren Bildes liefert, daß die Ordnung des Bildes von $P \longrightarrow \operatorname{Out} Q$ gleich p ist.

Sei $k \in [1, p-1]$. Angenommen, es wäre $\delta^k \in \operatorname{Inn} P$. Dann ist $(\delta^k|_Q) \operatorname{Inn} Q = \gamma^k \operatorname{Inn} Q \neq 1 \cdot \operatorname{Inn} Q$ wegen $k \not\equiv_p 0$. Sei δ^k durch Konjugation mit $x \in P$ gegeben. Dann ist $x \notin Q$, da sonst $\delta^k|_Q \in \operatorname{Inn} Q$. Wegen $P/Q \simeq C_p$ ist $P = \langle Q, x\rangle$. Wegen $\mathrm{Z}(P) < \mathrm{Z}(Q)$ kann also x nicht trivial auf $\mathrm{Z}(Q)$ operieren, da sonst $\mathrm{Z}(Q) \leqslant \mathrm{Z}(P)$ folgte. Jedoch ist $\delta^k|_{\mathrm{Z}(Q)} = (\gamma|_{\mathrm{Z}(Q)})^k = \mathrm{id}_{\mathrm{Z}(Q)}$. Dieser Widerspruch zeigt $\delta^k \notin \operatorname{Inn} P$.

Per Übergang zu einer Potenz können wir also annehmen, daß die Ordnung von $\delta \operatorname{Inn} P$ gleich p ist. Ferner ist $\delta|_{\mathrm{Z}(Q)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Z}(Q)}$, a fortiori also $\delta|_{\mathrm{Z}(P)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Z}(P)}$. Also war P doch kein Gegenbeispiel.

Fall Q abelsch. Wegen $\mathrm{H}^2(P/Q, Q) = 1$ gibt es mit dem Satz aus §3.2.1 ein Komplement K zu Q in P, wobei $K \simeq C_p$. Es ist $\mathrm{Z}(P)K \simeq \mathrm{Z}(P) \times C_p$ nicht zyklisch. Sei R als maximale $\mathrm{Z}(P)K$ enthaltende echte Untergruppe von P gewählt. Dann ist R ebenfalls abelsch, aber nicht zyklisch. Durch Wiederholung dieses Arguments und Ersetzung der Gruppen können wir annehmen, daß weder Q noch R zyklisch sind.

Nun ist $Q \cap R = \mathrm{Z}(P)$, da ein Element, das in R und in Q liegt, wegen $K \leqslant R$ und R abelsch und wegen Q abelsch sowohl mit K als auch mit Q elementweise vertauscht.

Folglich ist $[Q : Q^K] = [Q : \mathrm{Z}(P)] = [Q : R \cap Q] = [QR : Q] = [P : Q] = p$. Da $\mathrm{H}^2(K, Q) = 1$, folgt mit (5), daß $|Q| = 4$, und also, daß $|P| = 8$. Also ist $P \simeq Q \rtimes K \simeq (C_2 \times C_2) \rtimes C_2 = (\mathbf{F}_2)^2 \rtimes C_2$. Da $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$ drei zueinander konjugierte Elemente der Ordnung 2 hat, ist P bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, und namentlich isomorph zu D_8, denn $D_8 \simeq \langle (1,2)(3,4),\, (1,3)(2,4)\rangle \rtimes \langle (1,3)\rangle$. Die Gruppe D_8 ist jedoch nach (2) kein Gegenbeispiel.

Aufgabe 66.

(1) Da $1 \equiv_{p^n} a^p \equiv_p a$, ist $a = 1 + pb$ für ein $b \in \mathbf{Z}$. Nun ist

$$(1+pb)^p \ \equiv_{p^3b^3} \ 1 + p^2 b + \tbinom{p}{2} p^2 b^2 \ \equiv_{p^3b^2} \ 1 + p^2 b \ ,$$

da $p \equiv_2 1$. Angenommen, es sei $\mathrm{v}_p(b) = k \leqslant n-3$. Es folgt

$$1 \ \equiv_{p^n} \ (1+pb)^p \ \equiv_{p^{2k+3}} \ 1 + p^2 b \ .$$

Setzen wir $m := \min\{n-2,\, 2k+1\}$, so wird $0 \equiv_{p^m} b$. Daraus erhalten wir wiederum $m \leqslant k$. Da $2k+1 > k$, folgt $n-2 \leqslant k$, und wir haben einen Widerspruch.

(2) Wie in (1) ist $(1 + p \cdot p^{n-3})^p \equiv_{p^3(p^{n-3})^2} 1 + p^2 \cdot p^{n-3} \equiv_{p^{n-1}} 1$, woraus wegen $3 + 2(n-3) \geqslant n-1$ folgt, daß $(1+p^{n-2})^p = 1$. Somit können wir mittels $d \longmapsto \alpha$ das semidirekte Produkt $C_{p^{n-1}} \rtimes_\alpha C_p$ bilden. Da $\alpha \neq \mathrm{id}$, ist $C_{p^{n-1}} \rtimes_\alpha C_p$ nicht abelsch, und also $C_{p^{n-1}} \rtimes_\alpha C_p \not\simeq C_{p^{n-1}} \times C_p$. Bleibt

uns zu zeigen, daß für jeden Automorphismus β von $C_{p^{n-1}}$ von Ordnung p das mittels $d \longmapsto \beta$ gebildete semidirekte Produkt isomorph zu $C_{p^{n-1}} \rtimes_\alpha C_p$ ist.

Sei der Automorphismus $C_{p^{n-1}} \xrightarrow[\sim]{\beta} C_{p^{n-1}}$ von Ordnung p gegeben durch $c \longmapsto c^a$, wobei $a \not\equiv_{p^{n-1}} 1$. Aus $a^p \equiv_{p^{n-1}} 1$ folgt mit (1), daß $a \equiv_{p^{n-2}} 1$. Somit können wir $a = 1 + p^{n-2}b$ mit einem $b \not\equiv_p 0$ schreiben. Beachten wir, daß

$$C_{p^{n-1}} \rtimes_\alpha C_p \;=\; \langle c,\, d \;:\; c^{p^{n-1}},\, d^p,\, c^d = c^{1+p^{n-2}} \rangle\;,$$

und schreiben wir das via $d \longmapsto \beta$ gebildete semidirekte Produkt

$$C_{p^{n-1}} \rtimes_\beta C_p \;=\; \langle c,\, d \;:\; c^{p^{n-1}},\, d^p,\, c^d = c^{1+bp^{n-2}} \rangle\;,$$

so erhalten wir in der Tat einen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} C_{p^{n-1}} \rtimes_\beta C_p & \xrightarrow{\sim} & C_{p^{n-1}} \rtimes_\alpha C_p \\ c & \longmapsto & c \\ d & \longmapsto & d^b\;, \end{array}$$

denn α^b schickt c auf die $(1+p^{n-2})^b$-te Potenz von c, und

$$(1+p^{n-2})^b \;\equiv_{p^{2(n-2)}}\; 1 + bp^{n-2}$$

impliziert wegen $2(n-2) \geqslant n-1$, daß $(1+p^{n-2})^b \equiv_{p^{n-1}} 1 + bp^{n-2}$.

(3) Die drei angeführten Gruppen sind paarweise nichtisomorph, da $C_{p^{n-1}} \rtimes_\alpha C_p$ nichtabelsch und $C_{p^{n-1}} \times C_p$ nichtzyklisch ist. Ist P abelsch, so ist P isomorph zu C_{p^n} oder zu $C_{p^{n-1}} \times C_p$. Wir dürfen also voraussetzen, daß P nichtabelsch ist.

Beachte ferner, daß die als existent vorausgesetzte zyklische Untergruppe von Index p normal in P ist (entweder, da p der kleinste Primteiler von $|P|$ ist, oder aber mit Aufgabe 65.(4)).

Mit (2) genügt es vollends zu zeigen, daß jede kurz exakte Sequenz der Form

$$C_{p^{n-1}} \longrightarrow P \longrightarrow C_p$$

aufspaltet. Wäre die durch eine solche kurz exakte Sequenz auf $C_{p^{n-1}}$ induzierte Modulstruktur durch $d \longmapsto \mathrm{id}$ gegeben, so würde jedes Element von P den Normalteiler $C_{p^{n-1}}$ zentralisieren, i.e. via Konjugation elementweise festlassen. Sei $x \in P \smallsetminus C_{p^{n-1}}$. Da jedes Element von P von der Form $x^i z$ mit einem $z \in C_{p^{n-1}}$ wäre, würde P abelsch folgen, was aber nicht der Fall ist. Also ist die Modulstruktur durch $d \longmapsto (c \longmapsto c^{1+bp^{n-2}})$ gegeben für ein gewisses $b \not\equiv_p 0$, da, wie bereits in (2) gesehen, alle Automorphismen von $C_{p^{n-1}}$ von Ordnung p von dieser Gestalt sind. Sei $bb' \equiv_p 1$ und ersetzen wir den Erzeuger d von C_p durch $d^{b'}$, so sehen wir, daß wir $b = 1$ annehmen dürfen.

Mit dem Satz aus §3.2.1 folgt nun das Aufspalten unserer kurz exakten Sequenz, wenn wir $\mathrm{H}^2(C_p, C_{p^{n-1}}) = 1$ zeigen können. Verwenden wir die periodische Auflösung aus Aufgabe 38.(1) zur Berechnung dieser Cohomologiegruppe, so sehen wir, daß wir zu zeigen haben, daß das Bild von

$$\begin{array}{rcl} C_{p^{n-1}} & \xrightarrow{u} & C_{p^{n-1}} \\ c & \longmapsto & c^{1+0\cdot p^{n-2}} \cdot c^{1+1\cdot p^{n-2}} \;\cdots\; c^{1+(p-1)\cdot p^{n-2}} \end{array}$$

gleich dem Kern von

$$\begin{array}{rcl} C_{p^{n-1}} & \xrightarrow{v} & C_{p^{n-1}} \\ c & \longmapsto & c^{1+p^{n-2}} \cdot c^{-} \end{array}$$

ist. Letzterer ist $\langle c^p \rangle$. Ferner ist

$$\sum_{i \in [0,p-1]} (1 + i \cdot p^{n-2}) \;=\; p + \tbinom{p}{2}\, p^{n-2} \equiv_{p^{n-1}} p\;,$$

da p ungerade ist. Also ist auch ersteres gleich $\langle c^p \rangle$.

(4) Sei ein Gegenbeispiel P minimaler Ordnung als existent angenommen. Da eine p-Gruppe von Ordnung $\leqslant p^2$ isomorph zu 1, zu C_p, zu C_{p^2} oder zu $C_p \times C_p$ ist, und sich unter diesen kein Gegenbeispiel befindet, können wir $|P| = p^n$ mit $n \geqslant 3$ annehmen.

Da auch jede Untergruppe von P ungleich P und ungleich 1 genau ein Element der Ordnung p enthält, ist wegen der Minimalität von P jede solche Untergruppe zyklisch.

Sei Q ein Normalteiler von Index p in P; cf. Aufgabe 65.(4). Nach dem eben Gesagten ist Q zyklisch, so daß mit (3) die Gruppe P isomorph zu einer der drei dort angegebenen Gruppen ist.

In $C_{p^{n-1}} \times C_p$ und in $C^{p^{n-1}} \rtimes C_p$ haben wir jedoch die beiden verschiedenen Untergruppen $\langle c^{p^{n-2}} \rangle$ und $\langle d \rangle$ von Ordnung p. Also ist P isomorph zu C_{p^n}.

Der Fall $p = 2$ führt zu Komplikationen. Vgl. [**6,** IV (4.1-3)]. Ferner wird in loc. cit. angemerkt, daß Burnsides Beweis seines Theorems von 1911 implizit Cohomologie zyklischer Gruppen verwendet. Explizit eingeführt wurden Cohomologiegruppen von Gruppen erst in den 1940er Jahren von MacLane und Eilenberg.

Aufgabe 67.

(1) Die Aussage ist falsch. Sei $G := D_8 = \langle (1,2,3,4), (1,3) \rangle \leqslant \mathcal{S}_4$ (cf. Aufgabe 62.(3)), sei $N = \mathrm{Z}(D_8) = \langle (1,3)(2,4) \rangle$, und sei $H = G/N \simeq C_2 \times C_2$; beachte hierzu, daß in G/N kein Element der Ordnung 4 existiert. Die induzierte $\mathbf{Z}H$-Modulstruktur von H auf N ist trivial, da N im Zentrum von G liegt. Ferner ist die genannte Erweiterung nicht semidirekt, da sonst $G \simeq N \times H$ abelsch folgen würde. Und D_8 ist nichtabelsch, da etwa $(1,2,3,4)^{(1,3)} = (1,4,3,2) \neq (1,2,3,4)$.

(2) Die Aussage ist falsch. So etwa ist die kurz exakte Sequenz

$$C_2 \longrightarrow C_4 \longrightarrow C_2$$

nicht semidirekt. Denn wäre die Erweiterung semidirekt, so läge wegen C_4 abelsch ein direktes Produkt vor. In $C_2 \times C_2$ gibt es aber kein Element der Ordnung 4.

Da $C_2 \leqslant \mathrm{Z}(C_4)$, ist auch die induzierte Modulstruktur von C_2 auf C_2 trivial.

Nichtsdestotrotz ist C_4 abelsch.

Aufgabe 68.

Es ist $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$. Sei H eine 7-Sylowgruppe in G. Sei $N := \mathrm{N}_G(H)$. Es ist die Anzahl $[G : N]$ der 7-Sylowgruppen kongruent zu 1 modulo 7, ein Teiler von 21 und ungleich 1. Also ist $[G : N] = 8$, i.e. $|N| = 21$. Das Theorem von Schur-Zassenhaus aus §3.2.2 ([6]) impliziert nun, daß $G \simeq C_7 \rtimes C_3$. Da mit dem Satz aus §2.5.5.3, Teil (1), der Schnitt $\mathrm{Z}(N) \cap H$ verschwindet, kann N nicht abelsch, und also dieses semidirekte Produkt nicht trivial sein. Schreibe $C_7 = \langle c \rangle$ und $C_3 = \langle a \rangle$. Es hat C_7 wegen $\operatorname{Aut} C_7 \simeq (\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^* \simeq C_6$ zwei Automorphismen von Ordnung 3, namentlich $c \longmapsto c^2$ und $c \longmapsto c^4$. Durch eventuelle Ersetzung von a durch a^2 dürfen wir annehmen, daß ${}^a c = c^2$.

Sei X die Menge der 7-Sylowgruppen von G. Es operiert $\langle a \rangle$ via Konjugation auf X. Da $A := \langle a \rangle$ das Element $H \in X$ festläßt, und da $X \smallsetminus \{H\}$ aus 7 Elementen besteht, hat A einen weiteren Fixpunkt $K \neq H$ in X.

Es operiert H via Konjugation auf X. Dabei ist H ein Fixpunkt. Schreibe $K = {}^g H$ mit einem geeigneten $g \in G$. Es ist $\mathrm{N}_G(K) = \mathrm{N}_G({}^g H) = {}^g\mathrm{N}_G(H)$ von Ordnung 21 (man hätte hierfür auch das Argument für $|\mathrm{N}_G(H)| = 21$ mit K statt H zitieren können). Wäre $H \leqslant \mathrm{N}_G(K)$, so wäre auch die Menge $K \cdot H$ in $\mathrm{N}_G(K)$ enthalten. Wegen $H \cap K = 1$ enthält $K \cdot H$ aber 7^2 Elemente, was dann nicht sein kann. Also ist $H \not\leqslant \mathrm{N}_G(K)$, i.e. $K \in X$ ist kein Fixpunkt von H. Insgesamt ist $H \in X$ also der einzige Fixpunkt von H, und X zerfällt in die beiden Bahnen

$$X \;=\; \{H\} \sqcup \{\, {}^{c^0}K,\; {}^{c^1}K, \,\ldots,\; {}^{c^6}K\}$$

[6]Es genügte auch das Korollar aus §3.2.1. Ebenso kann man zitieren, daß ein Element der Ordnung 3 in einer Gruppe von durch 3 teilbarer Gruppenordnung existiert (Satz von Cauchy).

unter der Operation von H.

Wir erinnern an die Definition der projektiven Geraden $\mathrm{P}^1(\mathbf{F}_7)$ als der Menge der eindimensionalen Teilräume des $\mathbf{F}_7$-Vektorraums $\mathbf{F}_7^2$. Hierbei schreibt man $(u:v) := \langle\binom{u}{v}\rangle$ für $\binom{u}{v} \in \mathbf{F}_7^2 \smallsetminus \{0\}$. Es operiert $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_7)$ geradenbewahrend auf $\mathbf{F}_7^2$, und folglich auf $\mathrm{P}^1(\mathbf{F}_7)$. Ausgeschrieben wird

$$\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \cdot (u:v) \;=\; (\alpha u + \beta v \,:\, \gamma u + \delta v)\;.$$

Die Elemente aus $\mathrm{Z}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_7)) = \{\left(\begin{smallmatrix}a & 0 \\ 0 & a\end{smallmatrix}\right) \;:\; a \in \mathbf{F}_7 \smallsetminus \{0\}\}$ operieren hierbei trivial, so daß wir auch eine Operation von $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_7) = \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_7)/\mathrm{Z}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_7))$ auf $\mathrm{P}^1(\mathbf{F}_7)$ erhalten. Diese Operation ist treu, d.h. gegeben durch einen injektiven Gruppenmorphismus von $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_7)$ in die entgegengesetzte Gruppe symmetrischen Gruppe auf der Menge $\mathrm{P}^1(\mathbf{F}_7)$.

Wir identifizieren nun $\mathrm{P}^1(\mathbf{F}_7)$ mit X, indem wir $(1:0)$ mit H und $(u:1)$ mit ${}^{c^u}K$ identifizieren, wobei $u \in [1,6]$. Insbesondere operiert nun G auf $\mathrm{P}^1(\mathbf{F}_7)$.

Wir behaupten, daß das Bild des Operationsmorphismus von G auf $\mathrm{P}^1(\mathbf{F}_7)$ mit dem Bild des Operationsmorphismus von $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$ ($\leqslant \mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_7)$) übereinstimmt. Wegen der Einfachheit von G operiert auch G treu auf $\mathrm{P}^1(\mathbf{F}_7)$, sofern nur nicht jedes Element von G identisch operiert. Dies ist aber nicht der Fall, wie bereits gesehen (und wie aus der Transitivität von X auch a priori bekannt ist). Für die behauptete Übereinstimmung der Bilder muß wegen

$$|G| \;=\; 168 \;=\; (7^2-1)(7^2-7)\cdot \underbrace{(7-1)}_{\text{Kern det}}{}^{-1} \cdot \underbrace{2}_{\mathrm{Z(SL)}}{}^{-1} \;=\; |\,\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)|$$

nur noch gezeigt werden, daß jede Operation eines Elementes von G durch die Operation eines Elementes von $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$ geschrieben werden kann. Ferner kann man sich auf die Betrachtung einer Erzeugermenge von G beschränken.

Die Operation von c schickt $(1:0)$ nach $(1:0)$ und $(u:1)$ nach $(u+1:1)$, stimmt also mit der Operation von $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ überein.

Die Operation von a schickt H nach H und ${}^{c^u}K$ nach ${}^{ac^u}K = {}^{c^{2u}a}K = {}^{c^{2u}}K$, i.e. es kommt $(1:0)$ nach $(1:0)$ und $(u:1)$ nach $(2u:1)$. In anderen Worten, die Operation von a stimmt mit der Operation von $\left(\begin{smallmatrix}2 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ überein, und also auch mit der Operation von $\left(\begin{smallmatrix}4 & 0 \\ 0 & 2\end{smallmatrix}\right)$. Unter der Operation von A haben wir die Bahnenzerlegung

$$\mathrm{P}^1(\mathbf{F}_7) \;=\; \{(1:0)\} \sqcup \{(0:1)\} \sqcup \{(1:1),\,(2:1),\,(4:1)\} \sqcup \{(3:1),\,(5:1),\,(6:1)\}$$

Sei $M := \mathrm{N}_G(A)$. Die Anzahl $[G:M]$ der 3-Sylowgruppen in G ist kongruent zu 1 modulo 3, ein Teiler von 56 und ungleich 1. Also $[G:M] \in \{4,\,7,\,28\}$, d.h. $[M:A] \in \{14,\,8,\,2\}$.

(Nach dem ersten Beispiel in §2.5.5.3, Teil (4), ist $[M:A] \equiv_2 0$. Das liefert aber keine neuen Erkenntnisse.)

Da mit dem Satz aus §2.5.5.3, Teil (1), der Schnitt $\mathrm{Z}(M) \cap A$ verschwindet, gibt es ein $m \in M$, welches auf A nichtidentisch operiert, i.e., für welches ${}^{m}a = a^-$ ist. Da das Bild von m in $\mathrm{Aut}\,A$ von Ordnung 2 ist, teilt 2 die Ordnung von m. Durch Übergang zu einer ungeraden Potenz können wir annehmen, daß die Ordnung von m eine Potenz von 2 ist.

Da für $(u:v) \in \mathrm{P}^1(\mathbf{F}_7)$ und $i \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ es sich ergibt, daß ${}^{m}(u:v)$ und ${}^{m}({}^{a^i}(u:v)) = {}^{a^{-i}}({}^{m}(u:v))$ in der selben Bahn unter A liegen, operiert m auf der Menge der A-Bahnen von $\mathrm{P}^1(\mathbf{F}_7)$.

Auf der anderen Seite hat m keinen Fixpunkt in $\mathrm{P}^1(\mathbf{F}_7)$, i.e. keinen Fixpunkt in X. Denn sonst wäre m in einem Normalisator einer 7-Sylowgruppe enthalten. Diese haben aber alle die ungerade Ordnung 21, so daß das nicht möglich ist. Also muß ${}^{m}(1:0) = (0:1)$ sein, und ${}^{m}(0:1) = (1:0)$. Insbesondere folgt ${}^{m^2}(1:0) = (1:0)$, und somit auch $m^2 \in N$. Da aber auch die Ordnung von m^2 eine Potenz von 2 ist, folgt mit $|N| = 21 \equiv_2 1$, daß $m^2 = 1$. Es hat m also die Ordnung 2.

Nun kann m die A-Bahn $\{(1:1),\,(2:1),\,(4:1)\}$ nicht in sich selbst überführen, da diese sonst wegen der Fixpunktfreiheit von m in $\langle m\rangle$-Bahnen der Länge 2 zu zerfallen hätte. Also schickt m die A-Bahn $\{(1:1),\,(2:1),\,(4:1)\}$ auf die A-Bahn $\{(3:1),\,(5:1),\,(6:1)\}$, und umgekehrt. Schreibe ${}^{m}(1:1) =: (w:1)$ mit $w \in \{3,\,5,\,6\}$.

Allgemein wird für $u \in \mathbf{F}_7 \smallsetminus \{0\}$

$$ {}^{m}(2u:1) \;=\; {}^{ma}(u:1) \;=\; {}^{a^-}\big({}^{m}(u:1)\big)\,. $$

Zusammengefaßt wird somit

$$ \begin{array}{rcl} {}^{m}(0:1) & = & (1:0) \\ {}^{m}(1:1) & = & (w:1) \\ {}^{m}(2:1) & = & (w/2:1) \\ {}^{m}(4:1) & = & (w/4:1)\,, \end{array} $$

und die Operation von m ist von Ordnung 2.

Sei nun $w' \in \mathbf{F}_7$ mit $w'^2 = -w$ gewählt. Dann ist die Operation von m gegeben durch $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -w' \\ w'^- & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Denn letztere ist von Ordnung 2 und schickt für $u \in \mathbf{F}_7$ das Element $(u:1)$ auf $(-w':uw'^-) = (w:u)$, was für $u \neq 0$ gleich $(w/u:1)$ ist.

Da nun die Operationen von c, a und m auf $\mathrm{P}^1(\mathbf{F}_7)$ alle als Operationen von Elementen in $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$ geschrieben werden konnten, bleibt zu zeigen, daß $G = \langle c,\,a,\,m\rangle$. Da bereits $\langle c,\,a\rangle = N$ die Ordnung 21 hat und da $m \notin N$ aus Ordnungsgründen, ist der Index von $\langle c,\,a,\,m\rangle$ in G in $\{1,2,4\}$. Nun hat G aber keine Untergruppe U von Index $1 < [G:U] \leqslant 5$, da die transitive Operation von G auf G/U einen nichtverschwindenden und also injektiven Morphismus von G nach $\mathcal{S}_{[G:U]}$ lieferte, was wegen $|G| > |\mathcal{S}_5| \geqslant |\mathcal{S}_{[G:U]}|$ ausgeschlossen ist. Insbesondere ist der Index von $\langle c,\,n,\,m\rangle$ in G gleich 1.

Aufgabe 69.

Sei K ein Komplement von N in G, i.e. es sei $N \cap K = 1$ und $NK = G$. Dann ist $N \cap (H \cap K) = 1$ und $N(H \cap K) = H \cap NK = H$ mit der ersten Bemerkung in §3.2.2, und also $H \cap K$ ein Komplement von N in H.

Bleibt zu zeigen, daß die Erweiterung

$$ N \longrightarrow G \longrightarrow G/N $$

semidirekt ist, falls nur die Erweiterung

$$ N \longrightarrow H \longrightarrow H/N $$

semidirekt ist.

Schreibe $\bar{G} := G/N$ und $\bar{H} := H/N$. Mit dem Satz aus §3.2.1 genügt es zu zeigen, daß

$$ \mathrm{H}^2(\bar{G},N) \xrightarrow{\mathrm{Res}\downarrow^{\bar{G}}_{\bar{H}}} \mathrm{H}^2(\bar{H},N) $$

injektiv ist; cf. das Lemma am Ende von §2.5.4 für die Tatsache, daß hier tatsächlich $\mathrm{Res}\downarrow^{\bar{G}}_{\bar{H}}$ anzuwenden ist. Mit dem Satz aus §2.5.4 ist aber die Komposition

$$ \mathrm{H}^2(\bar{G},N) \xrightarrow{\mathrm{Res}\downarrow^{\bar{G}}_{\bar{H}}} \mathrm{H}^2(\bar{H},N) \xrightarrow{\mathrm{Tr}\uparrow^{\bar{G}}_{\bar{H}}} \mathrm{H}^2(\bar{G},N) $$

durch Multiplikation mit $[\bar{G}:\bar{H}] = [G:H]$ auf $\mathrm{H}^2(\bar{G},N)$ gegeben. Diese Multiplikation gibt aber wegen $[G:H]$ teilerfremd zu $|N|$ einen Automorphismus von $\mathrm{H}^2(\bar{G},N)$; cf. die Lösung zu Aufgabe 39.(3). Damit folgt die Injektivität des ersten Teilnehmers an dieser Komposition.

Die Voraussetzung N abelsch ist nicht entbehrlich; vgl. [**13,** I.18.7].

Die Aussage ist eine Verallgemeinerung des Korollars in §3.2.1, in welchem der Spezialfall $N = H$ behandelt wird. Ein ähnlicher Übergang zum nichtabelschen Fall, wie er von diesem Korollar in §3.2.1 zum Theorem von Schur-Zassenhaus in §3.2.2 durchgeführt wird, ist also in dieser Allgemeinheit nicht möglich. (Es bleibt natürlich dennoch die Frage, ob mit Schur-Zassenhaus bereits die maximale vom abelschen zum nichtabelschen Fall hebbare Aussage erreicht ist.)

Aufgabe 70.

(1) Nach Voraussetzung ist $\mathrm{E}(\alpha/\alpha-1/\!\!/\alpha/\alpha-1)^{+m} = 0$ für alle $m \in \mathbf{Z}$ und alle $\alpha \in \mathbf{Z}$ mit $m+\alpha \in [1, k-1]$.

Wir behaupten zunächst, es ist $\mathrm{E}(\delta/\eta-1/\!\!/\eta/\alpha)^{+m} = 0$ für $\alpha,\, \delta \in \bar{\mathbf{Z}}_\infty$, $\eta \in \mathbf{Z}$ und $m \in \mathbf{Z}$ so, daß $\delta^{-1} \leqslant \alpha \leqslant \eta \leqslant \delta \leqslant \alpha^{+1}$ und $m+\eta \in [1, k-1]$.

In der Tat können wir $\alpha < \eta$ annehmen und erhalten

$$\mathrm{E}(\delta/\eta-1/\!\!/\eta/\alpha)^{+m} \rightarrowtail \mathrm{E}(\delta/\eta-1/\!\!/\eta/\eta-1)^{+m} \twoheadleftarrow \mathrm{E}(\eta/\eta-1/\!\!/\eta/\eta-1)^{+m} \;=\; 0\,,$$

was die Behauptung zeigt.

Seien $\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta \in \bar{\mathbf{Z}}_\infty$ mit $\delta^{-1} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \alpha^{+1}$ gegeben. Wir dürfen $\beta < \gamma$ annehmen. Wir haben eine Filtrierung

$$0 \;=\; \mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\beta/\alpha)^{+m} \rightarrowtail \mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\beta+1/\alpha)^{+m} \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail \mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\gamma/\alpha)^{+m}\,,$$

und diese ist graduiert mit

$$\big(\mathrm{E}(\delta/\eta/\!\!/\eta+1/\alpha)^{+m}\big)_{\eta\in[\beta,\gamma-1]} \;=\; \big(\mathrm{E}(\delta/\eta-1/\!\!/\eta/\alpha)^{+m}\big)_{\eta\in[\beta+1,\gamma]}\,.$$

Da nach Voraussetzung $[m+\beta+1, m+\gamma] \subseteq [1, k-1]$, verschwindet diese Graduierung dank vorstehender Behauptung. Also verschwindet auch $\mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\gamma/\alpha)^{+m}$.

(2) Sei $A \in \mathrm{C}^+(R\text{-Mod})$ eine (F,G)-azyklische Auflösung von X. Da $(\mathrm{R}^\ell F)(X) \simeq \mathrm{H}^\ell(FA)$ für $\ell \geqslant 0$ nach dem zweiten Lemma in §4.3, ist insbesondere $\mathrm{H}^\ell(FA) = 0$ für $\ell \in [1, k-1]$. Wir können also eine Cartan-Eilenberg-Auflösung $J \in \mathrm{CC}^{\llcorner}(S\text{-Mod})$ von FA so wählen, daß

$$\mathrm{H}^\ell(GJ^{-,*}) \;=\; 0$$

für $\ell \in [1, k-1]$; vgl. deren Konstruktion im ersten Lemma in loc. cit.

Sei $\mathrm{E} := \mathrm{E}_{\mathrm{I}}(GJ) = \mathrm{E}^{\mathrm{Gr}}_{F,G}(X)$ die vermittels J konstruierte Grothendieck-Spektralsequenz zu X bzgl. F und G. Nach dem Satz aus loc. cit. ist die Existenz einer exakten Sequenz

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \mathrm{E}(-k+1/-k-1/\!\!/-k/-k-2)^{+k} \longrightarrow \mathrm{E}(\infty/-\infty/\!\!/\infty/-\infty)^{+k} \longrightarrow \mathrm{E}(1/-1/\!\!/0/-2)^{+k} \\ \longrightarrow \mathrm{E}(-k/-k-2/\!\!/-k-1/-k-3)^{+k+1} \longrightarrow \mathrm{E}(\infty/-\infty/\!\!/\infty/-\infty)^{+k+1} \end{array}$$

nachzuweisen. Vermittels der letzten Bemerkung in §4.2.1.2 ist $\mathrm{E}(\infty/-\infty/\!\!/\infty/-\infty)^{+k}$ dasselbe wie $\mathrm{E}(0/-k-2/\!\!/0/-k-2)^{+k}$, was seinerseits mit dem Lemma aus §4.2.1.3 dasselbe ist wie $\mathrm{E}(0/-k-1/\!\!/0/-k-2)^{+k}$. Ferner ist mit dem Lemma aus loc. cit. auch $\mathrm{E}(1/-1/\!\!/0/-2)^{+k}$ dasselbe wie $\mathrm{E}(0/-1/\!\!/0/-2)^{+k}$. Somit ist die Existenz einer exakten Sequenz

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \mathrm{E}(-k+1/-k-1/\!\!/-k/-k-2)^{+k} \longrightarrow \mathrm{E}(0/-k-1/\!\!/0/-k-2)^{+k} \longrightarrow \mathrm{E}(0/-1/\!\!/0/-2)^{+k} \\ \longrightarrow \mathrm{E}(-k/-k-2/\!\!/-k-1/-k-3)^{+k+1} \longrightarrow \mathrm{E}(0/-k-2/\!\!/0/-k-3)^{+k+1} \end{array}$$

nachzuweisen.

Betrachte hierzu die folgenden kurz exakten Fundamentalsequenzen in erster und zweiter Notation; cf. Satz und Korollar aus §4.1.3.4.

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{E}(0/-k-1/\!\!/-k/-k-2)^{+k} & \rightarrowtail & \mathrm{E}(0/-k-1/\!\!/0/-k-2)^{+k} & \twoheadrightarrow & \mathrm{E}(0/-k/\!\!/0/-k-2)^{+k} \\ \mathrm{E}(0/-1/\!\!/0/-k-2)^{+k} & \rightarrowtail & \mathrm{E}(0/-1/\!\!/0/-2)^{+k} & \twoheadrightarrow & \mathrm{E}((-k-2)^{+1}/-1/\!\!/0/-2)^{+k} \\ \mathrm{E}(-k/-k-2/\!\!/-k-1/0^{-1})^{+k+1} & \rightarrowtail & \mathrm{E}(-k/-k-2/\!\!/-k-1/-k-3)^{+k+1} & \twoheadrightarrow & \mathrm{E}(0/-k-2/\!\!/-k-1/-k-3)^{+k+1} \\ \mathrm{E}(0/-k-2/\!\!/-k-1/-k-3)^{+k+1} & \rightarrowtail & \mathrm{E}(0/-k-2/\!\!/0/-k-3)^{+k+1} & \twoheadrightarrow & \mathrm{E}(0/-k-1/\!\!/0/-k-3)^{+k+1} \end{array}$$

Zusammen mit den folgenden Isomorphismen werden diese sich zu einer exakten Sequenz wie gewünscht zusammensetzen.

Bemerken wir zunächst, daß

$$\mathrm{H}^m\left(\mathrm{t}GJ(\alpha/\alpha-1)\right) \;=\; \mathrm{H}^{m+\alpha}(GJ^{-\alpha,*}) \;=\; 0$$

für alle $m \geqslant 0$ und alle $\alpha \leqslant 0$ mit $m+\alpha \in [1, k-1]$; cf. erstes Lemma in §4.2.3. Ferner verschwindet $\mathrm{H}^m(\mathrm{t}GJ(\alpha/\alpha-1))$, falls $M < 0$ oder $\alpha < 0$. Somit findet (1) Anwendung.

Wir behaupten, daß $\mathrm{E}(-k+1/-k-1/\!\!/-k/-k-2)^{+k} \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}(0/-k-1/\!\!/-k/-k-2)^{+k}$. In der Tat ergibt sich nach (1) als Kern dieses Epimorphismus

$$\mathrm{E}(-k+1/-k-1/\!\!/-k/0^{-1})^{+k} \;=\; \mathrm{E}((-k-1)^{+1}/-k+1/\!\!/0/-k)^{+k-1} \;=\; 0\,.$$

Wir behaupten, daß $\mathrm{E}(0/-k/\!\!/0/-k-2)^{+k} \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}(0/-1/\!\!/0/-k-2)^{+k}$. In der Tat ergibt sich nach (1) als Kern dieses Epimorphismus

$$\mathrm{E}(0/-k/\!\!/-1/-k-2)^{+k} \;=\; 0\,.$$

Wir behaupten, daß

$$\begin{array}{cl} & \mathrm{E}(-k/-k-2/\!\!/-k-1/0^{-1})^{+k+1} \\ \xrightarrow{\sim} & \mathrm{E}(-1/-k-2/\!\!/-k-1/0^{-1})^{+k+1} \\ \xrightarrow{\sim} & \mathrm{E}(-1/-k-2/\!\!/-2/0^{-1})^{+k+1} \\ = & \mathrm{E}((-k-2)^{+1}/-1/\!\!/0/-2)^{+k} \end{array}$$

Der erste Morphismus ist epimorph und hat nach (1) den Kern

$$\mathrm{E}(-k/-k-2/\!\!/-k-1/(-1)^{-1})^{+k+1} \;=\; \mathrm{E}((-k-2)^{+1}/-k/\!\!/-1/-k-1)^{+k} \;=\; 0\,.$$

Der zweite Morphismus ist monomorph und hat nach (1) den Cokern

$$\mathrm{E}(-1/-k-1/\!\!/-2/0^{-1})^{+k+1} \;=\; 0\,.$$

(3) Wir dürfen $P \neq 1$ annehmen.

Mit Aufgabe 65.(4) ist eine maximale echte Untergruppe von P notwendig ein Normalteiler von Index p. Können wir die Aussage für P und jeden Normalteiler in P von Index p zeigen, so mit Einfügen einer zwischen Q und P liegenden maximalen Untergruppe und Induktion über die Ordnung von P auch für alle Untergruppen von P. In anderen Worten, wir dürfen annehmen, daß Q gleich P ist oder ein Normalteiler darin mit $P/Q \simeq C_p$.

Spezialfall $k=1$. Wir haben zu zeigen, daß aus $\mathrm{H}^1(P,M)=0$ folgt, daß $\mathrm{H}^1(Q,M)=0$ für alle Normalteiler Q in P von Index p.

Die exakte Fünftermsequenz lautet gemäß dem zweiten Korollar von §4.4.2 in unserer Situation

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(P/Q, M^Q) \longrightarrow \mathrm{H}^1(P,M) \longrightarrow \mathrm{H}^1(Q, M{\downarrow_Q})^{P/Q} \longrightarrow \mathrm{H}^2(P/Q, M^Q) \longrightarrow \mathrm{H}^2(P,M)\,.$$

Wir werden ihren letzten Term $\mathrm{H}^2(P,M)$ nicht benötigen.

Da $\mathrm{H}^1(P,M)=0$, folgt mit der Fünftermsequenz $\mathrm{H}^1(P/Q,M^Q)=0$. Da mit Aufgabe 65.(1) aber $|\mathrm{H}^1(P/Q,M^Q)| = |\mathrm{H}^2(P/Q,M^Q)|$ ist, folgt auch $|\mathrm{H}^2(P/Q,M^Q)|=0$. Abermals mit der Fünftermsequenz folgt $\mathrm{H}^1(Q,M{\downarrow_Q})^{P/Q}=0$. Da in $\mathrm{H}^1(Q,M{\downarrow_Q})$ aber wenigstens ein Orbit Länge 1 hat, viz. der der Null, und $|\mathrm{H}^1(Q,M{\downarrow_Q})|$ eine Potenz von p ist, gäbe es noch weitere Orbits der Länge 1, wäre $\mathrm{H}^1(Q,M{\downarrow_Q}) \neq 0$. Da es diese aber nicht gibt, folgt $\mathrm{H}^1(Q,M{\downarrow_Q})=0$.

Allgemeiner Fall $k \geqslant 1$. Mit dem Fall $k=1$ und mit Induktion über die Ordnung von P dürfen wir annehmen, daß $\mathrm{H}^k(Q,M{\downarrow_Q})=0$ für alle Normalteiler Q von Index p in P und alle $k \geqslant 1$. Zu zeigen bleibt, daß $\mathrm{H}^k(P,M)=0$ für alle $k \geqslant 1$. Dazu wählen wir einen Normalteiler Q in P von Index p, i.e. eine maximale echte Untergruppe.

Spezialisieren wir wie in §4.4 die Aussage von (2) zur Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralsequenz mit $F = (-)^Q$ und $G = (-)^{P/Q}$, so ist die Voraussetzung $(\mathrm{R}^\ell F)(M) = \mathrm{H}^\ell(Q, M{\downarrow_Q}) = 0$ für $\ell \in [1, k-1]$ a fortiori erfüllt, sie gilt ja sogar für alle $\ell \geqslant 1$. Somit haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^k(P/Q, M^Q) \longrightarrow \mathrm{H}^k(P, M) \longrightarrow \mathrm{H}^k(Q, M{\downarrow_Q})^{P/Q} \longrightarrow \mathrm{H}^{k+1}(P/Q, M^Q) \longrightarrow \mathrm{H}^{k+1}(P, M)\ .$$

Wir werden ihre letzten beiden Terme nicht benötigen.

Wir haben schon im Fall $k = 1$ gesehen, daß $\mathrm{H}^1(P/Q, M^Q) \simeq 0$. Mit Aufgabe 65.(1) ist also auch $\mathrm{H}^k(P/Q, M^Q) \simeq 0$. Da nun auch $\mathrm{H}^k(Q, M{\downarrow_Q}) = 0$, i.e. $\mathrm{H}^k(Q, M{\downarrow_Q})^{P/Q} = 0$, liefert die angeführte exakte Sequenz, daß $\mathrm{H}^k(P, M) = 0$.

In [**13,** III, Satz 19.5] wird ein Beweis der Fälle $k = 1$ und $k = 2$ gegeben, der die Verwendung von Fünftermsequenzen absichtlich vermeidet.

Aufgabe 71. Nach Voraussetzung gibt $\mathrm{E}(\beta+1/\beta-1/\!\!/\beta/\beta-2)^{+k}$, angewandt auf f, einen Isomorphismus für alle $k \in \mathbf{Z}$ und alle $\beta \in \mathbf{Z}$.

Schritt 1. Wir behaupten, daß $\mathrm{E}(\gamma/\beta-1/\!\!/\beta/\beta-2)^{+k}$ und $\mathrm{E}(\beta+1/\beta-1/\!\!/\beta/\alpha)^{+k}$ je einen Isomorphismus gibt für alle $k \in \mathbf{Z}$, alle $\beta \in \mathbf{Z}$, alle $\gamma \in \mathbf{Z}$ mit $\gamma > \beta$ und alle $\alpha \in \mathbf{Z}$ mit $\beta - 1 > \alpha$.

Sei $n \geqslant 1$ und die Aussage für alle $k \in \mathbf{Z}$ und alle α, β, γ mit $\gamma - \beta \in [1, n]$ und $\beta - 1 - \alpha \in [1, n]$ bekannt. Mittels Fundamentalsequenzen erhalten wir die exakte Sequenzen

$$\mathrm{E}(\gamma+2/\gamma/\!\!/\gamma+1/\beta)^{+k-1} \xrightarrow{e} \mathrm{E}(\gamma/\beta-1/\!\!/\beta/\beta-2)^{+k} \xrightarrow{e} \mathrm{E}(\gamma+1/\beta-1/\!\!/\beta/\beta-2)^{+k} \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow \mathrm{E}(\beta+1/\beta-1/\!\!/\beta/\alpha-1)^{+k} \xrightarrow{e} \mathrm{E}(\beta+1/\beta-1/\!\!/\beta/\alpha)^{+k} \xrightarrow{e} \mathrm{E}(\beta-1/\alpha-1/\!\!/\alpha/\alpha-2)^{+k+1}\ .$$

Somit gilt die Aussage auch für alle α, β, γ mit $\gamma - \beta \in [1, n+1]$ und $\beta - 1 - \alpha \in [1, n+1]$. Mit Induktion ist die Behauptung gezeigt.

Schritt 2. Wir behaupten, daß $\mathrm{E}(\gamma/\beta-1/\!\!/\beta/\alpha)^{+k}$ einen Isomorphismus gibt für alle $k \in \mathbf{Z}$ und alle α, β, $\gamma \in \mathbf{Z}$ mit $\alpha < \beta - 1 < \beta < \gamma$. Wir führen eine Induktion nach $\gamma - \alpha$. Mit Schritt 1 dürfen wir $\alpha < \beta - 2 < \beta + 1 < \gamma$ annehmen. Wir haben

$$\mathrm{E}(\gamma-1/\beta-1/\!\!/\beta/\alpha)^{+k} \xrightarrow{e} \mathrm{E}(\gamma/\beta-1/\!\!/\beta/\alpha)^{+k} \xrightarrow{e} \mathrm{E}(\gamma/\beta-1/\!\!/\beta/\alpha+1)^{+k}\ .$$

Da nach Induktionsvoraussetzung die äußeren beiden Terme einen Isomorphismus ergeben, gilt dies auch für den mittleren.

Schritt 3. Wir behaupten, daß $\mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\gamma/\alpha)^{+k}$ einen Isomorphismus gibt für alle $k \in \mathbf{Z}$ und alle α, β, γ, $\delta \in \mathbf{Z}$ mit $\alpha < \beta \leqslant \gamma < \delta$.

Mit dem Beispiel in §4.1.3.2 dürfen wir $\beta < \gamma$ annehmen. Wir führen eine Induktion nach $\gamma - \beta$. Der Fall $\gamma - \beta = 1$ ist mit Schritt 2 erledigt. Sei $\gamma - \beta \geqslant 2$. Wir haben die kurz exakte Fundamentalsequenz

$$\mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\gamma-1/\alpha)^{+k} \xrightarrow{e} \mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\gamma/\alpha)^{+k} \xrightarrow{e} \mathrm{E}(\delta/\gamma-1/\!\!/\gamma/\alpha)^{+k}$$

und sind mithin fertig mit Induktion und Aufgabe 20.(2).

Schritt 4. Wir behaupten, daß $\mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\gamma/\alpha)^{+k}$ einen Isomorphismus gibt für alle $k \in \mathbf{Z}$ und alle α, β, γ, $\delta \in \mathbf{Z}_\infty$ mit $\alpha < \beta \leqslant \gamma < \delta$. In der Tat können wir $\alpha \in\,]-\infty, \beta[$ so klein wählen, daß $\mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\gamma/-\infty)^{+k} = \mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\gamma/\alpha)^{+k}$. Analog können wir $\delta \in\,]\gamma, \infty[$ so groß wählen, daß $\mathrm{E}(\infty/\beta/\!\!/\gamma/\alpha)^{+k} = \mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\gamma/\alpha)^{+k}$. Sowie beides.

Schritt 5. Wir behaupten, daß $\mathrm{E}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)^{+k}$ einen Isomorphismus gibt für alle $k \in \mathbf{Z}$ und alle $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{Z}_\infty$ mit $\alpha \mathrel{\dot{<}} \beta \leqslant \gamma \mathrel{\dot{<}} \delta$. Wir dürfen wieder $\beta < \gamma$ annehmen. Ist nun $\alpha = -\infty$, so können wir $\beta \in]-\infty, \gamma[$ so klein wählen, daß $\mathrm{E}(\delta/-\infty /\!\!/ \gamma/-\infty)^{+k} = \mathrm{E}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/-\infty)^{+k}$. Analog können wir $\gamma \in]\beta, \infty[$ so groß wählen, daß $\mathrm{E}(\infty/\beta /\!\!/ \infty/\alpha)^{+k} = \mathrm{E}(\infty/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)^{+k}$. Sowie beides.

Schritt 6. Wir behaupten, daß $\mathrm{E}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)^{+k}$ einen Isomorphismus gibt für alle $k \in \mathbf{Z}$ und alle $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \bar{\mathbf{Z}}_\infty$ mit $-\infty \leqslant \delta^{-1} \leqslant \alpha \mathrel{\dot{<}} \beta \leqslant \gamma \leqslant \infty < -\infty^{+1} \leqslant \delta \leqslant \alpha^{+1}$. Dazu betrachten wir die kurz exakte Fundamentalsequenz

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E}(\infty/\beta /\!\!/ \gamma/\delta^{-1})^{+k} \arrow[r, tail, "e"] & \mathrm{E}(\infty/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)^{+k} \arrow[r, two heads, "e"] & \mathrm{E}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)^{+k} \end{tikzcd} .$$

Schritt 7. Wir behaupten, daß $\mathrm{E}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)^{+k}$ einen Isomorphismus gibt für alle $k \in \mathbf{Z}$ und alle $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \bar{\mathbf{Z}}_\infty$ mit $\delta^{-1} \leqslant \alpha \mathrel{\dot{<}} \beta \leqslant \gamma \mathrel{\dot{<}} \delta \leqslant \alpha^{+1}$. Mittels eines Shifts können wir annehmen, daß $-\infty \leqslant \delta^{-1} \leqslant \alpha \mathrel{\dot{<}} \beta \leqslant \gamma \leqslant \infty < -\infty^{+1} \leqslant \delta \leqslant \alpha^{+1}$ oder $-\infty \leqslant \alpha \mathrel{\dot{<}} \beta \leqslant \gamma \mathrel{\dot{<}} \delta \leqslant \infty$, und sind somit fertig mit den Schritten 5 und 6.

Aufgabe 72.

(1) Wir zeigen, daß (a) $\Longrightarrow$ ((b) und (c)). Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$ rein kurz exakt. Ihre lang exakte Homologiesequenz hat also als Verbindungsmorphismen lauter Nullmorphismen; in anderen Worten, es ist

$$\mathrm{H}^k X' \xrightarrow{\mathrm{H}^k i} \mathrm{H}^k X \xrightarrow{\mathrm{H}^k p} \mathrm{H}^k X''$$

kurz exakt für alle $k \in \mathbf{Z}$. Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}^k X' \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & \mathrm{Z}^k X' \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & \mathrm{H}^k X' \arrow[d, tail] \\
\mathrm{B}^k X \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Z}^k X \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathrm{H}^k X \arrow[d, two heads] \\
\mathrm{B}^k X'' \arrow[r, tail] & \mathrm{Z}^k X'' \arrow[r, two heads] & \mathrm{H}^k X''
\end{tikzcd}$$

als kurz exakte Sequenz von vertikal eingezeichneten Komplexen. Deren lang exakte Homologiesequenz zeigt, daß die linke Spalte in der Mitte exakt ist und daß $\mathrm{Z}^k X \longrightarrow \mathrm{Z}^k X''$ ein Epimorphismus ist.

Wir zeigen, daß (b) $\Longrightarrow$ (a). Sei also $\mathrm{B}^k X' \xrightarrow{\mathrm{B}^k i} \mathrm{B}^k X \xrightarrow{\mathrm{B}^k p} \mathrm{B}^k X''$ kurz exakt ist für alle $k \in \mathbf{Z}$. Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}^k X' \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & \mathrm{Z}^k X' \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & \mathrm{H}^k X' \arrow[d] \\
\mathrm{B}^k X \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Z}^k X \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathrm{H}^k X \arrow[d] \\
\mathrm{B}^k X'' \arrow[r, tail] & \mathrm{Z}^k X'' \arrow[r, two heads] & \mathrm{H}^k X''
\end{tikzcd}$$

als kurz exakte Sequenz von vertikal eingezeichneten Komplexen. Deren lang exakte Homologiesequenz zeigt, daß $\mathrm{H}^k X' \longrightarrow \mathrm{H}^k X$ monomorph ist, daß also der Verbindungsmorphismus $\mathrm{H}^{k-1} X'' \longrightarrow \mathrm{H}^k X'$ verschwindet.

Wir zeigen, daß (c) $\Longrightarrow$ (a). Sei also $\mathrm{Z}^k X \xrightarrow{\mathrm{Z}^k p} \mathrm{Z}^k X''$ epimorph für alle $k \in \mathbf{Z}$. Betrachte das

Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}^k X' \arrow[r, "\bullet" marking] \arrow[d, "\bullet" marking] & \mathrm{Z}^k X' \arrow[r, "|" marking] \arrow[d, "\bullet" marking] & \mathrm{H}^k X' \arrow[d] \\
\mathrm{B}^k X \arrow[r, "\bullet" marking] \arrow[d, "-" marking] & \mathrm{Z}^k X \arrow[r, "|" marking] \arrow[d, "-" marking] & \mathrm{H}^k X \arrow[d] \\
\mathrm{B}^k X'' \arrow[r, "\bullet" marking] & \mathrm{Z}^k X'' \arrow[r, "|" marking] & \mathrm{H}^k X'' .
\end{tikzcd}$$

Komposition (oder, wahlweise, eine lang exakte Homologiesequenz) zeigt, daß $\mathrm{H}^k X \longrightarrow \mathrm{H}^k X''$ epimorph ist, daß also der Verbindungsmorphismus $\mathrm{H}^k X'' \longrightarrow \mathrm{H}^{k+1} X'$ verschwindet.

(2) Es ist $\mathrm{H}^k X'' \simeq 0$ für alle $k \in \mathbf{Z}$. Insbesondere verschwinden alle Verbindungsmorphismen in der lang exakten Homologiesequenz.

(3) Wir zeigen die erste Aussage.

Sei $X' \xrightarrow{i} X$ rein. Wir ergänzen zu einer kurz exakten Sequenz $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$ von Komplexen. Sei $k \in \mathbf{Z}$. Dank (b) aus (1) ist $\mathrm{B}^k X''$ Cokern von $\mathrm{B}^k X' \longrightarrow \mathrm{B}^k X$. Dank (c) aus (1) ist $\mathrm{Z}^k X''$ Cokern von $\mathrm{Z}^k X' \longrightarrow \mathrm{Z}^k X$. Ferner ist $\mathrm{B}^k X'' \longrightarrow \mathrm{Z}^k X''$ monomorph. Mit Aufgabe 18.(3) folgt, daß das kommutative Viereck $(\mathrm{B}^k X',\, X'^k,\, \mathrm{B}^k X,\, X^k)$ ein Pullback ist.

Sei umgekehrt das kommutative Viereck $(\mathrm{B}^k X',\, X'^k,\, \mathrm{B}^k X,\, X^k)$ ein Pullback für alle $k \in \mathbf{Z}$. Wir ergänzen zu einer kurz exakten Sequenz $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$ von Komplexen. Nach Aufgabe 18.(3) haben wir dann einen induzierten Monomorphismus vom Cokern von $\mathrm{B}^k X' \longrightarrow \mathrm{B}^k X$ nach X''^k, was dazu führt, daß besagter Cokern das Bild des Differentials $X''^{k-1} \longrightarrow X''^k$ ist. Mit (b) aus (1) zeigt das die Behauptung.

Zur Illustration hier eine rein kurz exakte Sequenz von Komplexen mit eingetragenen Pullbacks und Pushouts.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \boxed{X'^{k-1}} \arrow[r, "|" marking] \arrow[d, "\bullet" marking] & \mathrm{B}^k X' \arrow[r, "\bullet" marking] \arrow[d, "\bullet" marking] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \boxed{X'^k} \arrow[r, "|" marking] \arrow[d, "\bullet" marking] & \mathrm{B}^{k+1} X' \arrow[r, "\bullet" marking] \arrow[d, "\bullet" marking] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \boxed{X'^{k+1}} \arrow[r] \arrow[d, "\bullet" marking] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \boxed{X^{k-1}} \arrow[r, "|" marking] \arrow[d, "-" marking] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{B}^k X \arrow[r, "\bullet" marking] \arrow[d, "-" marking] & \boxed{X^k} \arrow[r, "|" marking] \arrow[d, "-" marking] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{B}^{k+1} X \arrow[r, "\bullet" marking] \arrow[d, "-" marking] & \boxed{X^{k+1}} \arrow[r] \arrow[d, "-" marking] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \boxed{X''^{k-1}} \arrow[r, "|" marking] & \mathrm{B}^k X'' \arrow[r, "\bullet" marking] & \boxed{X''^k} \arrow[r, "|" marking] & \mathrm{B}^{k+1} X'' \arrow[r, "\bullet" marking] & \boxed{X''^{k+1}} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(4) (i) Wegen Dualität genügt es, die ersten beiden Behauptungen zu zeigen. Liege also ein punktweise Pushout vor, und sei x rein monomorph. Ergänze zu rein kurz exakten Sequenzen (X', X, X'') und (Y', Y, Y''), und betrachte den auf den Cokernen induzierten Morphismus $X'' \xrightarrow{f''} Y''$. Sei $k \in \mathbf{Z}$. Nach (b) aus (1) ist $\mathrm{B}^k X''$ der Cokern zu $\mathrm{B}^k X' \rightarrowtail \mathrm{B}^k X$. Sei ferner C der Cokern zu $\mathrm{B}^k Y' \rightarrowtail \mathrm{B}^k Y$.

Wir behaupten, daß $(\mathrm{B}^k X',\, \mathrm{B}^k Y',\, \mathrm{B}^k X,\, \mathrm{B}^k Y)$ ein Pushout ist. Dazu genügt es nach Aufgabe 18.(5) zu zeigen, daß $\mathrm{B}^k X'' \longrightarrow C$ isomorph ist. In der Tat komponiert

$$(\mathrm{B}^k X'' \longrightarrow C \longrightarrow Y''^k) \;=\; (\mathrm{B}^k X'' \rightarrowtail X''^k \xrightarrow{\sim} Y''^k)$$

sowie

$$(X''^{k-1} \longrightarrow \mathrm{B}^k X'' \longrightarrow C) \;=\; (X''^{k-1} \xrightarrow{\sim} Y''^{k-1} \twoheadrightarrow C)\,,$$

die angegebenen Isomorphien jeweils gemäß Aufgabe 18.(5). Nun zeigt

$$(\mathrm{B}^k X'' \xrightarrow{\sim} C \longrightarrow Y''^k) \;=\; (\mathrm{B}^k X'' \rightarrowtail X''^k \xrightarrow{\sim} Y''^k)$$

auch, daß $C \longrightarrow Y''^k$ monomorph und also $C = \mathrm{B}^k Y''$ sowie $(\mathrm{B}^k Y',\, Y'^k,\, \mathrm{B}^k Y,\, Y^k)$ Pullback. Letzteres zeigt mit (3), daß $Y' \xrightarrow{y} Y$ rein monomorph ist.
Sei nun dazuhin f' rein epimorph. Dank Aufgabe 18.(5) ist f dann epimorph, i.e. punktweise epimorph. Da die Diagonalsequenz jeweils kurz exakt ist, sind die kommutativen Vierecke

$$\begin{tikzcd}
X^{k-1} \arrow[r, "f^{k-1}"] & Y^{k-1} \\
X'^{k-1} \arrow[u, "x^{k-1}"] \arrow[r, "f'^{k-1}"] & Y'^{k-1} \arrow[u, "y^{k-1}"']
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}^k X \arrow[r, "\mathrm{B}^k f"] & \mathrm{B}^k Y \\
\mathrm{B}^k X' \arrow[u, "\mathrm{B}^k x"] \arrow[r, "\mathrm{B}^k f'"] & \mathrm{B}^k Y' \arrow[u, "\mathrm{B}^k y"']
\end{tikzcd}$$

Pullbacks und Pushouts (auch *Quadrate* genannt). Insbesondere ist der auf den horizontal genommenen Kernen induzierte Morphismus jeweils ein Isomorphismus. Also folgt aus der Epimorphie des induzierten Morphismus vom Kern von $X'^{k-1} \longrightarrow Y'^{k-1}$ zum Kern von $\mathrm{B}^k X' \longrightarrow \mathrm{B}^k Y'$ auch die Epimorphie des induzierten Morphismus vom Kern von $X^{k-1} \longrightarrow Y^{k-1}$ zum Kern von $\mathrm{B}^k X \longrightarrow \mathrm{B}^k Y$, und damit, daß $(X^{k-1},\, \mathrm{B}^k X,\, Y^{k-1},\, \mathrm{B}^k Y)$ ein Pushout ist. Dies zeigt mit (3), daß $X \xrightarrow{f} Y$ rein epimorph ist.

(ii) Wegen Dualität genügt es, die erste Aussage zu zeigen. Mittels (i) und Aufgabe 18.(3, 5) können wir den gegebenen Morphismus durch Einfügen eines Pushouts und eines Pullbacks in folgende Morphismen rein kurz exakter Sequenzen von Komplexen faktorisieren.

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\bullet" marking] \arrow[d, "f'"', "\bullet" marking] & X \arrow[r, "+" marking] \arrow[d, "\bullet" marking] & X'' \arrow[d, equal] \\
Y' \arrow[r, "\bullet" marking] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "+" marking] \arrow[d] & X'' \arrow[d, equal] \\
Y' \arrow[r, "\bullet" marking] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "+" marking] \arrow[d, "\bullet" marking] & X'' \arrow[d, "f''"', "\bullet" marking] \\
Y' \arrow[r, "\bullet" marking] & X \arrow[r, "+" marking] & Y''
\end{tikzcd}$$

Somit dürfen wir $f' = 1_{X'}$ und $f'' = 1_{X''}$ annehmen. Dann aber folgt f isomorph.

(5) Wir behaupten, daß I Produkt von Komplexen der Form $(0 \longrightarrow J = J \longrightarrow 0)$ und $(0 \longrightarrow J \longrightarrow 0)$ ist, mit $J \in \operatorname{Ob} R\text{-Inj}$ an beliebiger Position.

Hierzu schreiben wir die Faktorisierung eines Differentials über sein Bild als $I^{k-1} \xrightarrow{\bar d} \mathrm{B}^k I \xrightarrow{\dot d} I^k$ und wählen i mit $i\bar d = 1$ und s mit $\dot d s = 1$. Das liefert

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & B^{k-1} I \oplus \mathrm{B}^k I \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, shift left, "\left(\begin{smallmatrix} \dot d \\ i \end{smallmatrix}\right)"] & B^k I \oplus \mathrm{B}^{k+1} I \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\left(\begin{smallmatrix} \dot d \\ i \end{smallmatrix}\right)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & I^{k-1} \arrow[r, "d = \bar d \dot d"] \arrow[u, shift left, "(s\ \bar d)"] & I^k \arrow[r] \arrow[u, shift left, "(s\ \bar d)"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Wegen $\begin{pmatrix} d \\ i \end{pmatrix} (\, s \;\bar{d}\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ is & 1 \end{pmatrix}$ isomorph geben die Morphismen $(\, s \;\bar{d}\,)$ einen spaltenden Epimorphismus von Komplexen. Sein Kern ist ein Komplex mit lauter Nulldifferentialen. Dies zeigt die Behauptung.

Da der Homfunktor in zweiter Stelle ein Produkt im Homfunktor zu einem Produkt außerhalb des Homfunktors verwandelt, und da der Homfunktor ohnehin linksexakt ist, genügt es zu zeigen, daß für $I = (0 \longrightarrow J = J \longrightarrow 0)$ und für $I = (0 \longrightarrow J \longrightarrow 0)$ der Funktor $(-, I)$ reine Monomorphismen in Epimorphismen überführt.

Für $I = (0 \longrightarrow J = J \longrightarrow 0)$ mit dem zweiten $J \in \operatorname{Ob} R\operatorname{Inj}$ an Position k ist $(X, I) = (X^k, J)$ für $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(R\text{-Mod})$. Somit überführt $(-, I)$ jeden Monomorphismus von Komplexen, rein oder nicht, in einen Epimorphismus.

Für einen Komplex X' und $I = (0 \longrightarrow J \longrightarrow 0)$ mit J an Position k ist $(X', I) = \{f \in (X'^k, J) \;:\; df = 0\}$. Sei $X' \xrightarrow{i} X$ ein reiner Monomorphismus. Sei $f \in (X'^k, J)$ mit $df = 0$ vorgegeben. Es faktorisiert f über den Cokern $\mathrm{Z}'^k X'$ des Differentials. Nach Aufgabe 18.(5) haben wir wegen der Reinheit des Monomorphismus einen induzierten Monomorphismus $\mathrm{Z}'^k X' \longrightarrow \mathrm{Z}'^k X$. Wegen der Injektivität von J faktorisiert nun $\mathrm{Z}'^k X' \longrightarrow J$ weiter über $\mathrm{Z}'^k X$. Insgesamt faktorisiert f über X^k, und dieser Faktor verschwindet unter Vorschalten von $X^{k-1} \xrightarrow{d} X^k$.

(6) Sei J eine Cartan-Eilenberg-Auflösung von X. Zunächst einmal ist für alle $\ell \geqslant 0$ die Zeile $J^{\ell,*}$ split und in $\operatorname{Ob} \mathrm{C}(R\text{-Inj})$.

Für $k \in \mathbf{Z}$ ist $\mathrm{H}^k J^{*,-}$ eine injektive Auflösung von $\mathrm{H}^k X$. Wir betrachten die kurz exakte Sequenz von Komplexen $(X,\ J^{0,-},\ \mathrm{B}^1 J^{*,-})$. Ihre lang exakte Homologiesequenz hat Monomorphismen $\mathrm{H}^k X \longrightarrow \mathrm{H}^k J^{0,-}$, und also auch Epimorphismen $\mathrm{H}^k J^{0,-} \longrightarrow \mathrm{H}^k(\mathrm{B}^1 J^{*,-})$ für $k \in \mathbf{Z}$. Somit ist diese kurz exakte Sequenz rein.

Betrachten wir nun die kurz exakte Sequenz von Komplexen $(\mathrm{B}^1 J^{*,-},\ J^{1,-},\ \mathrm{B}^2 J^{*,-})$. Nach dem eben Gesagten und nach der Voraussetzung der injektiven Aufgelöstheit von $\mathrm{H}^k X$ hat ihre lang exakte Homologiesequenz Monomorphismen $\mathrm{H}^k \mathrm{B}^1 J^{*,-} \longrightarrow \mathrm{H}^k J^{1,-}$, und also auch Epimorphismen $\mathrm{H}^k J^{1,-} \longrightarrow \mathrm{H}^k(\mathrm{B}^2 J^{*,-})$ für $k \in \mathbf{Z}$. Somit ist auch diese kurz exakte Sequenz rein.

Und so fort.

Sei umgekehrt I eine relativ injektive Auflösung von X. Wir wollen zeigen, daß es eine Cartan-Eilenberg-Auflösung ist. Die Bedingungen (1), (2) und (4) aus §4.3 sind nach Voraussetzung erfüllt. Bleibt (3) aus loc. cit. zu zeigen; i.e. daß $\mathrm{H}^k(I^{*,-})$ eine injektive Auflösung von $\mathrm{H}^k X$ ist. Injektivität der Einträge folgt aus der Tatsache, daß der Komplex $I^{\ell,-}$ split ist für $\ell \geqslant 0$. Azyklizität des noch um $\mathrm{H}^k X$ ergänzten Komplexes folgt daraus, daß er sich wegen Reinheit der zugrundeliegenden kurz exakten Sequenzen von Komplexen wie folgt aus kurz exakten Sequenzen von R-Moduln zusammensetzt.

$$\mathrm{H}^k X \longrightarrow \mathrm{H}^k I^0 \longrightarrow \mathrm{H}^k(\mathrm{B}^1 I) \longrightarrow \mathrm{H}^k I^1 \longrightarrow \mathrm{H}^k(\mathrm{B}^2 I) \longrightarrow \mathrm{H}^k I^2 \longrightarrow \mathrm{H}^k(\mathrm{B}^3 I) \longrightarrow \cdots$$

(7) *Konstruktionsschritt.* Konstruiere

$$\begin{tikzcd}
I'^0 \arrow[r, "(1\ 0)"] & I'^0 \oplus I''^0 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] & I''^0 \\
X' \arrow[u, "s"] \arrow[r, "i"] & X \arrow[u, "(\,\tilde{s}'\ ps''\,)"'] \arrow[r, "p"] & X'' \arrow[u, "s''"']
\end{tikzcd}$$

Hierzu sei $\tilde{s}'$ mit $i\tilde{s}' = s'$ gewählt; dies ist möglich, da I relativ injektiv und i rein monomorph ist. Dank (4.ii) ist $(\,\tilde{s}'\ ps''\,)$ rein monomorph. Vervollständige diesen Morphismus kurz exakter Sequenzen um seinen punktweise genommenen Cokern. Ende des Konstruktionsschrittes.

Wende den Konstruktionsschritt erneut auf die soeben erhaltene kurz exakte Sequenz von Cokernen an; usf.

Trifft die Aussage von (7) für eine kurz exakte Sequenz von Komplexen $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$ auch dann noch zu, wenn diese nicht mehr als rein kurz exakt vorausgesetzt wird? Ich tendiere dazu zu glauben, daß nicht.

(8) Da J^0 relativ injektiv ist, und da $X \longrightarrow I^0$ rein monomorph ist, existiert ein Morphismus rein kurz exakter Sequenzen

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & I^0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{B}^1 I \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & J^0 \arrow[r] & \mathrm{B}^1 J\,. \end{tikzcd}$$

Setze mit demselben Argument fort um einen Morphismus kurz exakter Sequenzen von $(\mathrm{B}^1 I,\ I^1,\ \mathrm{B}^2 I)$ nach $(\mathrm{B}^1 J,\ J^1,\ \mathrm{B}^2 J)$; usf.

(9) Da split azyklische Komplexe mit Werten in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$ unter $\mathrm{H}^0\left((-)^{*,-}\right)$ verschwinden, faktorisiert dieser Funktor über $\mathrm{K}(\mathrm{C}(R\text{-Mod})) \longrightarrow \mathrm{C}(R\text{-Mod})$.

Die Einschränkung dieser Faktorisierung auf

$$\mathrm{K}^{+,\,\mathrm{CE}}(\mathrm{C}(R\text{-Inj})) \xrightarrow{\mathrm{H}^0\left((-)^{*,-}\right)} \mathrm{C}(R\text{-Mod})$$

ist dicht nach dem ersten Lemma aus §4.3. Sie ist voll nach (8).

Zu zeigen bleibt, daß er treu ist; cf. Lemma aus §1.3.2.2.

Sei $I \xrightarrow{g} J$ ein Morphismus in $\mathrm{K}^{+,\,\mathrm{CE}}(\mathrm{C}(R\text{-Inj}))$ mit $\mathrm{H}^0(g^{*,-}) = 0$. Wir haben zu zeigen, daß $g = 0$. Dazu dürfen wir mit Aufgabe 16 wie folgt eine Homotopie konstruieren, die diesen Morphismus g ergibt.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Z}^0 I \arrow[r, "\bullet" marking] \arrow[d, "0"'] & I^0 \arrow[r, "+" marking] \arrow[d, dotted, "g^0"] & \mathrm{B}^1 I \arrow[r, "\bullet" marking] \arrow[dl, dotted] & I^1 \arrow[r, "+" marking] \arrow[d, dotted, "g^1"] \arrow[dll, dotted, "h^1"'] & \mathrm{B}^2 I \arrow[r, "\bullet" marking] \arrow[dl, dotted] & I^2 \arrow[r, "+" marking] \arrow[d, dotted, "g^2"] \arrow[dll, dotted, "h^2"'] & \cdots \\ \mathrm{Z}^0 J \arrow[r, "\bullet" marking] & J^0 \arrow[rr, "d"] & & J^1 \arrow[rr, "d"] & & J^2 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Wegen $\mathrm{B}^1 I$ Cokern von $\mathrm{Z}^0 I \longrightarrow I^0$ und $(\mathrm{Z}^0 I \longrightarrow I^0 \xrightarrow{g^0} J^0) = 0$ faktorisiert g^0 über einen Morphismus $\mathrm{B}^1 I \longrightarrow J^0$.

Wegen $\mathrm{B}^1 I \longrightarrow I^1$ rein monomorph und J^0 relativ injektiv faktorisiert dieses $\mathrm{B}^1 I \longrightarrow J^0$ über einen Morphismus $I^1 \xrightarrow{h^1} J^0$. Insgesamt ist also $g^0 = dh^1$.

Wegen $(I^0 \xrightarrow{d} I^1 \xrightarrow{g^1 - h^1 d} J^1) = 0$ faktorisiert $g^1 - h^1 d$ über einen Morphismus $\mathrm{B}^2 I \longrightarrow J^1$.

Wegen $\mathrm{B}^2 I \longrightarrow I^2$ rein monomorph und J^1 relativ injektiv faktorisiert dieses $\mathrm{B}^2 I \longrightarrow J^1$ über einen Morphismus $I^2 \xrightarrow{h^2} J^1$. Insgesamt ist also $g^1 - h^1 d = dh^2$, oder, in anderen Worten, $g^1 = h^1 d + dh^2$.

Da I bei I^2 exakt ist, ist $\mathrm{B}^3 I$ Cokern von $I^1 \xrightarrow{d} I^2$. Wegen $(I^1 \xrightarrow{d} I^2 \xrightarrow{g^2 - h^2 d} J^2) = 0$ faktorisiert $g^2 - h^2 d$ über einen Morphismus $\mathrm{B}^3 I \longrightarrow J^2$.

Und so fort.

(10) Aus Symmetriegründen muß von (i, ii) nur die Aussage (i) gezeigt werden. Die Aussage (iii) folgt aus (i, ii), da ein Morphismus in $\mathrm{CC}(R\text{-Mod})$ genau dann den Nullmorphismus in $\mathrm{KK}(R\text{-Mod})$ repräsentiert, wenn er über die direkte Summe eines vertikal und eines horizontal split azyklischen Doppelkomplexes in $\mathrm{CC}(R\text{-Mod})$ faktorisiert, i.e. wenn er Summe eines über einen vertikal azyklischen Doppelkomplex faktorisierenden und eines über einen horizontal azyklischen Doppelkomplex faktorisierenden Morphismus ist.

Zu (i). Zu zeigen bleibt, daß $I \xrightarrow{f} J$ genau dann über einen horizontal split azyklischen Doppelkomplex in $\mathrm{CC}(R\text{-Mod})$ faktorisiert, wenn es für $\ell \in \mathbf{Z}$ Morphismen von Komplexen $I^{*,\ell} \xrightarrow{h} J^{*,\ell-1}$ gibt, für die $hd + dh = f$ stets. Dies aber folgt aus Aufgabe 16.

(11) Nach Voraussetzung und nach Konstruktion ist $\bar{F}$ voll und dicht. Gemäß dem Lemma aus §1.3.2.2 bleibt zu zeigen, daß $\bar{F}$ treu ist. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{A}$ mit

$$(FX \xrightarrow{Ff} FY) \;=\; (FX \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} FY)$$

und $N \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$ gegeben. Sei $M \in F^{-1}(\mathcal{N})$ mit $FM \simeq N$ gewählt, was nach Voraussetzung möglich ist. Durch isomorphe Ersetzung von N durch FM dürfen wir $FM = N$ annehmen. Da F voll ist, finden wir u' und v' mit

$$(FX \xrightarrow{Ff} FY) \;=\; (FX \xrightarrow{Fu'} FM \xrightarrow{Fv'} FY)\,.$$

Da $F(f - u'v') = 0$, faktorisiert $f - u'v'$ über ein Objekt von $\mathcal{M}$. Da $\mathcal{M}$ additiv ist, gilt dies dann auch für f selbst.

(12) Wir verwenden die Bezeichnungen von (11).
Aus (9) kennen wir die Äquivalenz

$$(\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}) \;:=\; \Big(\mathrm{K}^{+,\,\mathrm{CE}}(\mathrm{C}(R\text{-Inj})) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{H}^0\left((-)^{*,-}\right)} \mathrm{C}(R\text{-Mod})\Big)\,.$$

Sei $\mathcal{M}$ die volle additive Teilkategorie von $\mathcal{A}$ der horizontal split azyklischen Cartan-Eilenberg-Auflösungen. Sei $\mathcal{N}$ die volle additive Teilkategorie von $\mathcal{B}$ der split azyklischen Komplexe.

Die Einschränkung von F auf $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ ist dicht. Denn für einen Komplex der Form $(0 \longrightarrow T = T \longrightarrow 0)$ können wir durch Wahl derselben Auflösung auf den beiden Kopien von T eine horizontal split azyklische Cartan-Eilenberg-Auflösung angeben. Somit gilt dies auch für direkte Summen von Komplexen dieser Form, i.e. für beliebige azyklische Komplexe.

Ein Morphismus $I \xrightarrow{f} J$ von Cartan-Eilenberg-Auflösungen, für welchen $Ff = 0$ ist, verschwindet aber wegen F treu bereits in $\mathrm{K}^{+,\,\mathrm{CE}}(\mathrm{C}(R\text{-Inj}))$, faktorisiert also insbesondere über ein Objekt von $\mathcal{M}$, namentlich das Nullobjekt.

Gemäß (11) ist also der von F induzierte Funktor $\mathcal{A}/\mathcal{M} \xrightarrow{\bar{F}} \mathcal{B}/\mathcal{N}$ eine Äquivalenz.

Bleibt zu zeigen, daß $\mathcal{A}/\mathcal{M} = \mathrm{KK}^{\perp,\,\mathrm{CE}}(R\text{-Inj})$, i.e. daß der volle Funktor $\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{KK}(R\text{-Mod})$ einen voll treuen Funktor $\mathcal{A}/\mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{KK}(R\text{-Mod})$ induziert. Dazu ist zu zeigen, daß ein Morphismus $I \xrightarrow{f} J$ von Cartan-Eilenberg-Auflösungen, der über eine direkte Summe eines vertikal und eines horizontal split azyklischen Doppelkomplexes faktorisiert, bereits in $\mathcal{A}$ über ein Objekt von $\mathcal{M}$ faktorisiert, i.e. daß er in $\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ über eine direkte Summe eines vertikal split azyklischen Doppelkomplexes und einer horizontal split azyklischen Cartan-Eilenberg-Auflösung faktorisiert.

Es genügt also zu zeigen, daß falls $I \xrightarrow{f} J$ über einen horizontal split azyklischen Komplex faktorisiert, dann auch über eine horizontal split azyklische Cartan-Eilenberg-Auflösung.

Wenden wir hierzu Aufgabe 16 an. Im zweiten Diagramm von deren Lösung finden wir für $X = I$ und $Y = J$ einen horizontal split azyklischen Doppelkomplex, über den $I \xrightarrow{f} J$ diesenfalls faktorisiert. Dieser ist aber eine Cartan-Eilenberg-Auflösung, da er das Coprodukt von Doppelkomplexen der Form $(0 \longrightarrow U = U \longrightarrow 0)$ ist, wobei die Spalte U aus $\mathrm{C}^{+,0}(R\text{-Inj})$ ist. Damit ist die behauptete Äquivalenz gezeigt.

Sind schließlich zwei Cartan-Eilenberg-Auflösungen $J,\, J' \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{KK}^{\perp,\,\mathrm{CE}}(R\text{-Inj})$ von $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}(R\text{-Mod})$ gegeben, so bilden diese unter $\mathrm{H}^0\left((-)^{*,-}\right)$ auf X ab. Die inverse Äquivalenz bildet X somit auf ein Objekt ab, das in $\mathrm{KK}^{\perp,\,\mathrm{CE}}(R\text{-Inj})$ sowohl zu J als auch zu J' isomorph ist. Insbesondere sind J und J' in $\mathrm{KK}^{\perp,\,\mathrm{CE}}(R\text{-Inj})$ zueinander isomorph.

Aufgabe 73.

(1) Es ist $X \xrightarrow{(f\ a)} X' \oplus A$ punktweise split monomorph, falls dies auf $X \xrightarrow{a} A$ zutrifft. Für $X \xrightarrow{a} A$ können wir einen Morphismus aus dem zweiten Diagramm der Lösung zu Aufgabe 16 ersehen, viz.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "a"'] \\
A
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\left(
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d"] & X^{i-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\ d)"'] & X^i \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\ d)"'] & X^{i+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\ d)"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & X^{i-1} \oplus X^i \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & X^i \oplus X^{i+1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & X^{i+1} \oplus X^{i+2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & \cdots
\end{tikzcd}
\right)
$$

Ist $X^i = 0$ für $i \leqslant 0$, so ist, bei dieser Wahl von A, auch $A^i = 0$ für $i \leqslant -1$.

(2) (i) Betrachte

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & X^0 \arrow[r] \arrow[d] & X^1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & \cdots\ .
\end{tikzcd}
$$

Da X azyklisch ist, faktorisiert $X^0 \longrightarrow I^0$ über $\mathrm{Z}^1 X$. Da I^0 injektiv ist, faktorisiert $X^0 \longrightarrow I^0$ sogar über X^1. Die Differenz $(X^1 \longrightarrow I^1) - (X^1 \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1)$ verschwindet bei Vorkomposition mit $X^0 \longrightarrow X^1$. Daher können wir das Argument erneut anwenden und erhalten einen Morphismus $X^2 \longrightarrow I^1$ mit $(X^1 \longrightarrow I^1) = (X^1 \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1) + (X^1 \longrightarrow X^2 \longrightarrow I^1)$. Usf.

(ii) Sei $I \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}^+(R\text{-Inj})$ azyklisch. Die kurz exakte Sequenz $I^0 \rightarrowtail I^1 \twoheadrightarrow \mathrm{B}^2 I$ ist wegen I^0 injektiv split kurz exakt. Insbesondere ist auch $\mathrm{B}^2 I$ injektiv. Folglich ist die kurz exakte Sequenz $\mathrm{B}^2 I \rightarrowtail I^2 \twoheadrightarrow \mathrm{B}^3 I$ split kurz exakt. Insbesondere ist auch $\mathrm{B}^3 I$ injektiv. Usf.

Und ein azyklischer Komplex, der sich in split kurz exakte Sequenzen zerlegt, ist split azyklisch, da eine split kurz exakte Sequenz isomorph zu einer Sequenz der Form $U \xrightarrow{(1\ 0)} U \oplus V \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} V$ ist, und dies mittels eines Diagrammisomorphismus, der auf dem ersten und dem dritten Term eine Identität stehen hat.

(3) Sei $L' \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} L''$ unsere punktweise split kurz exakte Sequenz. Schreibe d' resp. d'' für die Differentiale von L' resp. L''.

Mittels isomorpher Ersetzung der Einträge von L dürfen wir annehmen, daß sie an der Stelle $i \in \mathbf{Z}$ von der Form $L'^i \xrightarrow{(1\ 0)} L'^i \oplus L''^i \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} L''^i$ ist. Für $i \in \mathbf{Z}$ gibt es gemäß Aufgabe 16 Morphismen $L''^{i+1} \xrightarrow{h} L''^i$ so, daß $d''h + hd'' = 1_{L''^i}$ für alle $i \in \mathbf{Z}$; unter Mißbrauch von Bezeichnung sparen wir uns die Indizierungen.

Wir behaupten, daß p eine Retraktion ist. Betrachte

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\begin{pmatrix} d' & 0 \\ x & d'' \end{pmatrix}"] & L'^i \oplus L''^i \arrow[r, "\begin{pmatrix} d' & 0 \\ x & d'' \end{pmatrix}"] \arrow[d, shift left, "\binom{0}{1}"] & L'^{i+1} \oplus L''^{i+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} d' & 0 \\ x & d'' \end{pmatrix}"] \arrow[d, shift left, "\binom{0}{1}"] & L'^{i+2} \oplus L''^{i+2} \arrow[r, "\begin{pmatrix} d' & 0 \\ x & d'' \end{pmatrix}"] \arrow[d, shift left, "\binom{0}{1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d''"] & L''^i \arrow[r, "d''"] \arrow[u, shift left, "(y\ 1)"] & L''^{i+1} \arrow[r, "d''"] \arrow[u, shift left, "(y\ 1)"] & L''^{i+2} \arrow[r, "d''"] \arrow[u, shift left, "(y\ 1)"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Wir müssen y so finden, daß $yd' + x \overset{!}{=} d''y$. Beachte, daß aus der Differentialbedingung des oberen Komplexes $xd' + d''x = 0$ folgt. Setze

$$(L''^i \xrightarrow{y} L'^i) \;:=\; (L''^i \xrightarrow{h} L''^{i-1} \xrightarrow{x} L'^i)$$

für $i \in \mathbf{Z}$. Damit ergibt sich in der Tat

$$d''y - yd' \;=\; d''hx - hxd' \;=\; d''hx + hd''x \;=\; (d''h + hd'')x \;=\; x\,.$$

Dies zeigt die Behauptung.

Sei nun $L \xleftarrow{s} L''$ eine zu p gehörige Coretraktion, i.e. sei $sp = 1_{L''}$; z.B. die eben konstruierte. Wir haben einen Morphismus kurz exakter Sequenzen von Komplexen

$$\begin{tikzcd}
L' \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "1"] & L' \oplus L'' \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\binom{i}{s}"] & L'' \arrow[d, "1"] \\
L' \arrow[r, "i"] & L \arrow[r, "p"] & L''\,.
\end{tikzcd}$$

Darin ist mit $\binom{i}{s}$ mit Aufgabe 20.(1) punktweise ein Isomorphismus. Folglich ist $\binom{i}{s}$ ein Isomorphismus.

(4) Mit einem Shift dürfen wir annehmen, daß $I^k = 0$ und $I'^k = 0$ für $k \leqslant 0$.

Aus (1) wissen wir, daß $I \xrightarrow{f} I'$ als Diagramm in $\mathrm{K}(R\text{-Inj})$ isomorph ist zu einem Diagramm, welches von einem punktweise split monomorphen Morphismus repräsentiert wird. Denn ein split azyklischer Komplex ist isomorph zu 0 in $\mathrm{K}(R\text{-Inj})$.

Da f ein Quasiisomorphismus ist, und da ein Isomorphismus in $\mathrm{K}(R\text{-Inj})$ insbesondere ein Quasiisomorphismus ist, ist diese Ersetzung ebenfalls ein Quasiisomorphismus. Ferner ist $I \xrightarrow{f} I'$ genau dann ein Homotopismus, wenn diese Ersetzung dies ist. Also dürfen wir o.E. $I \xrightarrow{f} I'$ als punktweise split monomorph voraussetzen, wobei dann wieder nur noch $I^k = 0$ und $I'^k = 0$ für $k < 0$ gelte.

Sei $I \xrightarrow{f} I' \longrightarrow C$ punktweise split kurz exakt. Die lange exakte Homologiesequenz aus Aufgabe 20.(1) zeigt, daß C azyklisch ist. Da I und I' injektive Einträge haben, und da die Sequenz punktweise split kurz exakt ist, hat aber auch C injektive Einträge. Mit (2) ist C also split ayklisch. Mit (3) ist $I \xrightarrow{f} I'$ isomorph zu $I \xrightarrow{(1\,0)} I \oplus C$. Da C split azyklisch ist, repräsentiert $I \oplus C \xrightarrow{\binom{1}{0}} I$ dessen Inverses in $\mathrm{K}(R\text{-Inj})$.

(5) Zunächst halten wir fest, daß s' punktweise split monomorph ist. Denn der Pushout eines split monomorphen Morphismus in R-Mod ist split monomorph, da man den zu bildenden Pushout in die Summe zweier Pushouts zerlegen kann, einen mit horizontalen und einen mit vertikalen Identitäten.

Gemäß Aufgabe 18.(5) können wir folgenden Morphismus punktweise split kurz exakter Sequenzen bilden.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "y"] & C \arrow[d, equal] \\ X' \arrow[r, "s'"] & Y' \arrow[r] & C\,. \end{tikzcd}$$

Dank der lang exakten Homologiesequenz aus Aufgabe 20.(1), angewandt auf (X, Y, C), ist C azyklisch. Dank selbiger Homologiesequenz, angewandt auf (X', Y', C), ist s' ein Quasiisomorphismus.

(6) Mit (1) gibt es eine Faktorisierung

$$(X \xrightarrow{s} Y) \;=\; (X \xrightarrow{\tilde{s}} \tilde{Y} \xrightarrow{p} Y)$$

mit p Retraktion in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$ und Homotopismus, und $\tilde{s}$ punktweise split monomorph. Da s und p Quasiisomorphismen sind, gilt dies auch für $\tilde{s}$.

Sei $ip = 1_Y$. Beachte, daß $pi = 1_{\tilde{Y}}$ in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$. Können wir die Aufgabe für $(\tilde{s}, t)$ mit einem Quasiisomorphismus $\tilde{Y} \xrightarrow{u} I$ lösen, so auch für (s, t), da $\tilde{s}u = t$ in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$ zur Folge hat, daß $s(iu) = \tilde{s}piu = \tilde{s}u = t$. Somit dürfen wir annehmen, daß s punktweise split monomorph ist.

Bilden wir punktweise folgenden Pushout.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & Y \arrow[d, "y"] \\ I \arrow[r, "s'"] & Y' \end{tikzcd}$$

Mit (5) ist auch s' ein Quasiisomorphismus. Aus $sy = ts'$ und s quasiisomorph folgt die Quasiisomorphie von y. Sei J eine Cartan-Eilenberg-Auflösung von Y'. Dann gibt es einen Quasiisomorphismus $Y' \xrightarrow{v} \mathrm{t}J$; cf. Beweis zum zweiten Lemma in §4.3. Nach (4) ist $s'v$ ein Homotopismus. Sei w sein Inverses in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$. Mit $u := yvw$ wird

$$su \;=\; syvw \;=\; ts'vw \;=\; t$$

in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$.

Aufgabe 74.

(1) Dank Aufgabe 72.(12) ist eine beliebig gewählte Cartan-Eilenberg-Auflösung $\tilde{J}$ von X isomorph zu J in $\mathrm{KK}(R\text{-Mod})$.

Es genügt also zu zeigen, daß eine Cartan-Eilenberg-Auflösung $\tilde{J}$ von X existiert, welche zeilenweise split azyklisch ist. Um $\tilde{J}$ zu konstruieren, dürfen wir für $k \in \mathbf{Z}$ eine beliebige injektive Auflösung von $\mathrm{H}^k X$ als $\mathrm{H}^k(\tilde{J}^{-,*})$ vorgeben; cf. Beweis zum Satz in §4.3. Da $\mathrm{H}^k X = 0$, dürfen wir die Nullauflösung vorgeben. Also ist $\mathrm{H}^k(\tilde{J}^{\ell,*}) = 0$ für $\ell \geqslant 0$, i.e. es ist $\tilde{J}^{\ell,*}$ azyklisch. Da $\tilde{J}$ eine Cartan-Eilenberg-Auflösung ist, ist $J^{\ell,*}$ auch split. Insgesamt ist $\tilde{J}^{\ell,*}$ also split azyklisch. Somit ist $\tilde{J}$ als zeilenweise split azyklisch nachgewiesen.

(2) Mit Aufgabe 73.(1) gibt es einen split azyklischen Komplex $A \in \mathrm{C}(R\text{-Mod})$ und einen split monomorphen Komplexmorphismus $X \xrightarrow{(f\ a)} X' \oplus A$. Wir haben ein kommutatives Dreieck

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(f\ a)"] \arrow[dr, "f"'] & X' \oplus A \arrow[d, "\binom{1}{0}"] \\ & X' \end{tikzcd}$$

in $\mathrm{C}(R\text{-Mod})$, also a fortiori auch in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$. Sei B eine Cartan-Eilenberg-Auflösung von A. Mit Aufgabe 72.(12) erhalten wir ein kommutatives Dreieck

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "(\hat{f}\ b)"] \arrow[dr, "\hat{f}"'] & J' \oplus B \arrow[d, "\binom{1}{0}"] \\ & J' \end{tikzcd}$$

in $\mathrm{KK}^{\perp,\,\mathrm{CE}}(R\text{-Inj})$, welches unter $\mathrm{H}^0\left((-)^{*,-}\right)$ auf jenes kommutative Dreieck abbildet.

Da A split azyklisch ist, ist $X' \oplus A \xrightarrow{\binom{1}{0}} X'$ ein Homotopismus. Dank loc. cit. ist $J' \oplus B \xrightarrow{\binom{1}{0}} J'$ ein Doppelhomotopismus. Insbesondere ist $\hat{f}$ genau dann eine Komposition von Doppel- und zeilenweisen Homotopismen, wenn dies für $(\hat{f}\ b)$ zutrifft. Somit dürfen wir annehmen, daß $X \xrightarrow{f} X'$ punktweise split monomorph ist.

Ferner dürfen wir dank loc. cit. auch die Cartan-Eilenberg-Auflösung des Morphismus $X \xrightarrow{f} X'$ beliebig wählen, ohne das Zutreffen ihrer fraglichen Eigenschaft, Komposition von Doppel- und zeilenweisen Homotopismen zu sein, zu ändern. Unter Mißbrauch von Bezeichnungen werden wir für diese beliebig gewählte Auflösung ebenfalls den Namen $\hat{f}$ verwenden.

Sei $X \xrightarrow{f} X' \longrightarrow C$ die Vervollständigung zu einer punktweise split kurz exakten Sequenz. Mit der lang exakten Homologiesequenz aus Aufgabe 20.(1) erkennen wir, daß $C \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}(R\text{-Mod})$ azyklisch ist. Mit Aufgabe 72.(2, 7; cf. 6) finden wir, zu beliebig gewählten Cartan-Eilenberg-Auflösungen J von X und $\tilde{J}$ von C, eine punktweise kurz exakte Sequenz von Cartan-Eilenberg-Auflösungen $J \xrightarrow{\hat{f}} J' \longrightarrow \tilde{J}$, welche unter $\mathrm{H}^0((-)^{*,-})$ auf $X \xrightarrow{f} X' \longrightarrow C$ abbildet. Mit (1) ist $\tilde{J}$ zeilenweise split azyklisch wählbar.

Betrachte nun deren k-te Zeile $J^{k,*} \xrightarrow{\hat{f}^{k,*}} J'^{k,*} \longrightarrow \tilde{J}^{k,*}$ für ein $k \geqslant 0$. Mit Aufgabe 73.(3) ist $J^{k,*} \xrightarrow{\hat{f}^{k,*}} J'^{k,*}$ isomorph zu $J^{k,*} \xrightarrow{(1\ 0)} J^{k,*} \oplus \tilde{J}^{k,*}$, und das ist wegen $\tilde{J}^{k,*}$ split azyklisch ein Homotopismus.

Aufgabe 75.

(1) Dazu ist zu zeigen, daß für gegebene Doppelkomplexe $I,\, J \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ ein Morphismus $I \longrightarrow J$, der über einen horizontal azyklischen Doppelkomplex T in $\mathrm{CC}(R\text{-Mod})$ faktorisiert, bereits über einen horizontal azyklischen Doppelkomplex in $\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ faktorisiert; und dito für vertikal statt horizontal.

Wir dürfen uns auf einen zweispaltigen horizontal azyklischen Doppelkomplex T beschränken, i.e. einen, der außerhalb zweier benachbarter Spalten verschwindet; denn ein beliebiger über einen horizontal azyklischen Komplex faktorisierender Morphismus ist eine Summe solcher (eine unendliche Summe, deren Summanden punktweise fast überall Null sind).

Gegeben also $I \longrightarrow T \longrightarrow J$, wobei T ein horizontal azyklischer Doppelkomplex mit Einträgen nur in den Spalten ℓ und $\ell+1$ sei, für ein $\ell \in \mathbf{Z}$. Zunächst einmal können wir in T alle Einträge in Zeilenposition < 0 durch Nullen ersetzen, ohne den Morphismus zu ändern. Sodann können wir T durch 0 ersetzen, falls $\ell \leqslant -2$. Bleibt der Fall zu betrachten, in welchem $\ell = -1$. Da in

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & I^{0,*} \arrow[r] \arrow[d, "u"] & I^{1,*} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & T^{-1,*} \arrow[r, equal] \arrow[d] & T^{0,*} \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & J^{0,*} \arrow[r] & J^{1,*} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

notwendigerweise $v = 0$ ist, können wir aber auch hier T durch 0 ersetzen.

(2) Es genügt zu zeigen, daß der Morphismus

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{t_I}X) \xrightarrow{\mathrm{Sp}(\mathrm{t_I}f)} \mathrm{Sp}(\mathrm{t_I}Y)$$

in $\llbracket \bar{\mathbf{Z}}^{\#}_{\infty}, \mathrm{K}(R\text{-Mod})\rrbracket$ punktweise ein Quasiisomorphismus ist. Mit der lang exakten Homologiesequenz aus Aufgabe 20.(1) und mit Aufgabe 20.(2) genügt es hierzu zu zeigen, daß

$$\mathrm{t_I}X \xrightarrow{\mathrm{t_I}f} \mathrm{t_I}Y$$

in $\llbracket \bar{\mathbf{Z}}_{\infty}, \mathrm{C}(R\text{-Mod})\rrbracket$ punktweise ein Quasiisomorphismus ist. Unter Verwendung des Lemmas aus §1.6.2.4 genügt es hierfür zu zeigen, daß für $k \geqslant 0$ der Morphismus

$$X^{[k,*} \xrightarrow{f^{[k,*}} Y^{[k,*}$$

zeilenweise ein Quasiisomorphismus ist. Dies aber ist nach Voraussetzung der Fall.

(3) Um zu zeigen, daß ein additiver Funktor von $\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ über $\mathrm{KK}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ faktorisiert, genügt es dank (1) zu zeigen, daß er alle horizontal und alle vertikal split azyklischen Doppelkomplexe in $\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ annulliert, da er dann auch eine Summe zweier solcher annulliert; cf. Aufgabe 15.(2).

Vermittels direkter Summen genügt es dazu wiederum zu zeigen, daß alle elementar horizontal split azyklischen Doppelkomplexe und alle elementar vertikal split azyklischen Doppelkomplexe in $\mathrm{Ob}\,\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ annulliert werden.

Sei $U \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ ein elementar vertikal split azyklischer Doppelkomplex konzentriert in den Zeilen i und $i+1$. Sei $V \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ ein elementar horizontal split azyklischer Doppelkomplex, konzentriert in den Spalten j und $j+1$.

Sei $-\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \infty$ gegeben. Dann ist $\mathrm{t_I}V(\beta/\alpha) = \mathrm{t}(V^{[-\beta,*}/V^{[-\alpha,*})$ azyklisch als Totalkomplex eines zeilenweise split azyklischen Doppelkomplexes.

Sei $-\infty \leqslant \alpha \lessdot \beta \leqslant \gamma \lessdot \delta \leqslant \infty$ in $\bar{\mathbf{Z}}_{\infty}$. Sei $k \in \mathbf{Z}$. Wir *behaupten,* daß der Funktor $\mathrm{E_I}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)^{+k}$ die Doppelkomplexe U und V annulliert. Wir dürfen hierzu annehmen, daß $\beta < \gamma$.

Unser Funktor annulliert V nach der eben gemachten Bemerkung. Der Doppelkomplex $U^{[-\delta,*}/U^{[-\beta,*}$ ist spaltenweise azyklisch, außer möglicherweise falls $-\beta = i+1$ oder $-\delta = i+1$. Der Doppelkomplex $U^{[-\gamma,*}/U^{[-\alpha,*}$ ist spaltenweise azyklisch, außer möglicherweise falls $-\alpha = i+1$ oder $-\gamma = i+1$. Alle vier Kombinationen dieser Ausnahmefälle sind jedoch unzulässig. Somit ist $\mathrm{E_I}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)^{+k}(U) = 0$. Das zeigt die Behauptung.

Sei $\delta^{-1} \leqslant \alpha \lessdot \beta \leqslant \gamma \leqslant \infty \leqslant -\infty^{+1} \leqslant \delta \leqslant \alpha^{+1}$. Sei $k \in \mathbf{Z}$. Wir *behaupten,* daß der Funktor $\mathrm{E_I}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)^{+k}$ die Doppelkomplexe U und V annulliert. Wir dürfen hierzu annehmen, daß $\beta < \gamma$ und $\delta^{-1} < \alpha$.

Unser Funktor annulliert V nach der Bemerkung vor voriger Behauptung. Beachte nun, daß $\mathrm{E_I}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)^{+k}(U)$ das Bild von

$$\mathrm{H}^k\big(\mathrm{t_I}U(\gamma/\alpha)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^{k+1}\big(\mathrm{t_I}U(\beta/\delta^{-1})\big)$$

ist. Der Doppelkomplex $U^{[-\beta,*}/U^{[-(\delta^{-1}),*}$ ist spaltenweise azyklisch außer möglicherweise falls $-(\delta^{-1}) = i+1$ oder falls $-\beta = i+1$. Der Doppelkomplex $U^{[-\gamma,*}/U^{[-\alpha,*}$ ist spaltenweise azyklisch, außer möglicherweise falls $-\gamma = i+1$ oder falls $-\alpha = i+1$. Alle vier Kombinationen dieser Ausnahmefälle sind jedoch unzulässig. Somit ist $\mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)^{+k}(U) = 0$. Das zeigt die Behauptung.

Beide Behauptungen zusammengenommen zeigen (3).

(4) Dank (1) und wegen Symmetrie genügt es hierfür zu zeigen, daß ein zweispaltiger horizontal split azyklischer Doppelkomplex unter t auf einen split azyklischen Komplex abgebildet wird. O.E. befinde sich der Komplex $T \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}^{+}(R\text{-Mod})$ in der nullten und der ersten Spalte eines solchen Doppelkomplexes. Wir konstruieren wie folgt einen Isomorphismus seines Totalkomplexes mit einem ersichtlich split azyklischen Komplex.

$$\begin{tikzcd}
T^0 \arrow[r, "(1\ \partial)"] & T^0 \oplus T^1 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} \partial & 0 \\ -1 & -\partial \end{smallmatrix}\right)"] & T^1 \oplus T^2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} -\partial & 0 \\ 1 & \partial \end{smallmatrix}\right)"] & T^2 \oplus T^3 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} \partial & 0 \\ -1 & -\partial \end{smallmatrix}\right)"] & \cdots \\
T^0 \arrow[u, "1"] \arrow[r, "(1\ 0)"] & T^0 \oplus T^1 \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & \partial \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & T^1 \oplus T^2 \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & \partial \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & T^2 \oplus T^3 \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & \partial \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 76.

(1) Sei $X \xrightarrow{f} X'$ in $R\text{-Mod}_{(F,\,G)\text{-zul.}}$ gegeben. Wir wollen sein Bild unter $\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}$ definieren.

Sei $A \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}^{+,0}(R\text{-Mod})$ eine (F,G)-azyklische Auflösung von X. Sei $I \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}^{+,0}(R\text{-Inj})$ eine injektive Auflösung von X.

Sei $A' \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}^{+,0}(R\text{-Mod})$ eine (F,G)-azyklische Auflösung von X'. Sei $I' \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}^{+,0}(R\text{-Inj})$ eine injektive Auflösung von X'.

Nach dem zweiten Lemma aus §4.3 gibt es Quasiisomorphismen $A \xrightarrow{s} I$ und $A' \xrightarrow{s'} I'$ so, daß auch $FA \xrightarrow{Fs} FI$ und $FA' \xrightarrow{Fs'} FI'$ quasiisomorph sind.

Sei $I \xrightarrow{\dot{f}} I'$ so, daß $\mathrm{H}^0 \dot{f} = f$; cf. Satz aus §1.5.4. Wir haben also die drei Morphismen

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\dot{f}"] & I' \\
A \arrow[u, "s"] & A' \arrow[u, "s'"'] ,
\end{tikzcd}$$

und davon sind s und s' quasiisomorph.

Seien J_A, J_I, $J_{A'}$, $J_{I'}$ Cartan-Eilenberg-Auflösungen von respektive FA, FI, FA' und FI'. Sei

$$\begin{tikzcd}
J_I \arrow[r, "\ddot{f}"] & J_{I'} \\
J_A \arrow[u, "\dot{s}"] & J_{A'} \arrow[u, "\dot{s}'"'] ,
\end{tikzcd}$$

so, daß $\dot{s}$, $\dot{s}'$ resp. $\ddot{f}$ eine Cartan-Eilenberg-Auflösung von Fs, Fs' resp. $F\dot{f}$ ist; cf. Aufgabe 72.(12).

Gemäß Aufgabe 74.(2) ist $J_A \xrightarrow{\dot{s}} J_I$ eine Komposition von Doppel- und zeilenweisen Homotopismen; dito $J_{A'} \xrightarrow{\dot{s}'} J_{I'}$. Da G additiv ist, liefert auch dessen punktweise Anwendungen Kompositionen $GJ_A \xrightarrow{G\dot{s}} GJ_I$ und $GJ_{A'} \xrightarrow{G\dot{s}'} GJ_{I'}$ von Doppel- und zeilenweisen Homotopismen.

Insbesondere haben wir nach Aufgabe 75.(2, 3.iii) induzierte Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_A) & \xrightarrow[\sim]{\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\dot{s})} & \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_I) \\ \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_{A'}) & \xrightarrow[\sim]{\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\dot{s}')} & \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_{I'}) \end{array}$$

Setze

$$\begin{array}{rl} & \left(\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}(X) \xrightarrow{\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}(f)} \dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}(X')\right) \\ := & \left(\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}(X) = \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_A) \xrightarrow[\sim]{\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\dot{s})} \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_I) \xrightarrow{\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\ddot{f})} \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_{I'}) \xrightarrow[\sim]{\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\dot{s}')^-} \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_{A'}) = \dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}(X')\right)\ . \end{array}$$

Für die Funktorialität dieser Zuweisung haben wir die Unabhängigkeit von den Wahlen von $\dot{f}$ und von $\ddot{f}$ zu zeigen. Denn Verträglichkeit mit Identitäten und mit Komposition folgen dann mittels geeigneter Wahlen.

Seien $I \xrightarrow{\dot{f}'} I'$ und $J_I \xrightarrow{\ddot{f}'} J_{I'}$ alternative Wahlen. Die Restklassen von $\dot{f}$ und $\dot{f}'$ in $\mathrm{K}^+(R\text{-Mod})$ stimmen überein nach dem Satz aus §1.5.4. Somit gilt dies auch für die Restklassen von $F\dot{f}$ und $F\dot{f}'$ in $\mathrm{K}^+(S\text{-Mod})$. Nach Aufgabe 72.(12) stimmen also auch die Restklassen von $\ddot{f}$ und $\ddot{f}'$ in $\mathrm{KK}^{\llcorner}(S\text{-Mod})$ überein. Folglich ist $\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\ddot{f}) = \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\ddot{f}')$; cf. Aufgabe 75.(3).

(2) Wir zeigen, daß alternative Wahlen von A_X, I_X und s_X, und von J_{A_X}, J_{I_X} und $\dot{s}_X$, isomorphe Grothendieck-Spektralsequenzfunktoren liefern.

Seien $\tilde{A}_X \xrightarrow{\tilde{s}_X} \tilde{I}_X$ und $\tilde{J}_{A_X} \xrightarrow{\tilde{\dot{s}}_X} \tilde{J}_{I_X}$ alternative Wahlen, wobei X die (F,G)-azyklisch auflösbaren R-Moduln durchlaufe.

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine R-lineare Abbildung zwischen (F,G)-azyklisch auflösbaren R-Moduln. Wir lösen das kommutative Viereck

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

in R-Mod auf zu einem kommutativen Viereck

$$\begin{tikzcd} I_X \arrow[r, "\dot{f}"] \arrow[d, "u_X"'] & I_Y \arrow[d, "u_Y"] \\ \tilde{I}_X \arrow[r, "\tilde{\dot{f}}"] & \tilde{I}_Y \end{tikzcd}$$

in $\mathrm{K}^+(R\text{-Mod})$, in welchem u_X und u_Y Homotopismen sind. Sodann lösen wir das kommutative Viereck

$$\begin{tikzcd} FI_X \arrow[r, "F\dot{f}"] \arrow[d, "Fu_X"'] & FI_Y \arrow[d, "Fu_Y"] \\ F\tilde{I}_X \arrow[r, "F\tilde{\dot{f}}"] & F\tilde{I}_Y \end{tikzcd}$$

in $\mathrm{K}^+(S\text{-Mod})$ auf zu einem kommutativen Viereck

$$\begin{tikzcd} J_{I_X} \arrow[r, "\ddot{f}"] \arrow[d, "v_X"'] & J_{I_Y} \arrow[d, "v_Y"] \\ \tilde{J}_{\tilde{I}_X} \arrow[r, "\tilde{\ddot{f}}"] & \tilde{J}_{\tilde{I}_Y} \end{tikzcd}$$

in $\mathrm{KK}^{\llcorner}(S\text{-Mod})$; cf. Aufgabe 72.(12). Darin sind v_X und v_Y Kompositionen von Doppelhomotopismen und zeilenweisen Homotopismen; cf. Aufgabe 74.(2). Dies trifft ebenfalls zu auf Gv_X und Gv_Y. Eine Anwendung von $\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}\big(G(-)\big)$ liefert die gesuchte Isotransformation

$$\Big(\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_{A_X}) \xrightarrow[\sim]{\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\dot{s}_X)} \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_{I_X}) \xrightarrow[\sim]{\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(Gv_X)} \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\tilde{J}_{\tilde{I}_X}) \xleftarrow[\sim]{\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\tilde{\dot{s}}_X)} \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\tilde{J}_{\tilde{A}_X})\Big)$$

bei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}_{(F,G)}$; cf. Aufgabe 75.(2, 3).

Die Natürlichkeit ersehen wir aus folgendem Diagramm, welches in seiner Mitte ein kommutatives Viereck hat; cf. Aufgabe 75.(3).

$$\begin{tikzcd}
\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_{A_X}) \arrow[d, "\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\dot{s}_X)"', "\wr"] & \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_{A_Y}) \arrow[d, "\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\dot{s}_Y)", "\wr"'] \\
\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_{I_X}) \arrow[r, "\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\ddot{f})"] \arrow[d, "\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(Gv_X)"', "\wr"] & \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_{I_Y}) \arrow[d, "\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(Gv_Y)", "\wr"'] \\
\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\tilde{J}_{\tilde{I}_X}) \arrow[r, "\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\tilde{\ddot{f}})"] & \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\tilde{J}_{\tilde{I}_Y}) \\
\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\tilde{J}_{\tilde{A}_X}) \arrow[u, "\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\tilde{\dot{s}}_X)", "\wr"'] & \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\tilde{J}_{\tilde{A}_Y}) \arrow[u, "\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\tilde{\dot{s}}_Y)"', "\wr"]
\end{tikzcd}$$

(3) Die Bezeichnungen $X \xrightarrow{f} X'$, A, I, J_A, J_I etc. seien wie in der Lösung zu (1). Beachte, daß I so gewählt werden kann, daß sowohl $A \longrightarrow I$ als auch $FA \longrightarrow FI$ als auch $GFA \longrightarrow GFI$ Quasiisomorphismen sind, da die Einträge von A sowohl F- als auch $(G \circ F)$-azyklisch sind; cf. Beweis zum zweiten Lemma in §4.3.

Es ist $\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}(\infty/-\infty/\!\!/\infty/-\infty)^{+k}(X) = \mathrm{H}^k\mathrm{t}GJ$.

Wir haben einen Quasiisomorphismus $GFA \longrightarrow \mathrm{t}GJ_A$; cf. Beweis zum Satz in §4.3.

Wie in der Lösung zu (1) ist $GJ_A \xrightarrow{G\dot{s}} GJ_I$ eine Komposition von Doppelhomotopismen und zeilenweisen Quasiisomorphismen. Nach Aufgabe 75.(4) und nach dem Lemma in §1.6.2.4 ist also $\mathrm{t}GJ_A \xrightarrow{\mathrm{t}G\dot{s}} \mathrm{t}GJ_I$ ein Quasiisomorphismus; in anderen Worten, es ist $G\mathrm{t}J_A \xrightarrow{G\mathrm{t}\dot{s}} G\mathrm{t}J_I$ ein Quasiisomorphismus. Aus dem kommutativen Viereck

$$\begin{tikzcd}
GFA \arrow[r] \arrow[d] & G\mathrm{t}J_A \arrow[d] \\
GFI \arrow[r] & G\mathrm{t}J_I
\end{tikzcd}$$

folgt, daß auch $GFI \longrightarrow G\mathrm{t}J_I$ ein Quasiisomorphismus ist. Es ist also

$$\big(\mathrm{R}^k(G \circ F)\big)(X) \;\simeq\; \mathrm{H}^k GFI \;\simeq\; \mathrm{H}^k G\mathrm{t}J_I \;\simeq\; \mathrm{H}^k G\mathrm{t}J_A\,.$$

Wir wollen die Natürlichkeit dieses Isomorphismus in X nachweisen. An der Stelle $(\infty/-\infty/\!\!/\infty/-\infty)^{+k} \in \dot{\mathbf{Z}}^{\#\#}_{\infty}$ hat $\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}(f)$ den Eintrag

$$\left(\mathrm{H}^k(\mathrm{t}GJ_A) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{H}^k(\mathrm{t}G\dot{s})} \mathrm{H}^k(\mathrm{t}GJ_I) \xrightarrow{\mathrm{H}^k(\mathrm{t}G\ddot{f})} \mathrm{H}^k(\mathrm{t}GJ_{I'}) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{H}^k(\mathrm{t}G\dot{s}')^-} \mathrm{H}^k(\mathrm{t}GJ_{A'})\right)\,,$$

so daß die Natürlichkeit aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^k(G\mathrm{t}J_A) \arrow[d] & \mathrm{H}^k(G\mathrm{t}J_{A'}) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^k(G\mathrm{t}J_I) \arrow[r] & \mathrm{H}^k(G\mathrm{t}J_{I'}) \\
\mathrm{H}^k(GFI) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{H}^k(GFI') \arrow[u] \\
(\mathrm{R}^k(G\circ F))(X) \arrow[r] \arrow[u] & (\mathrm{R}^k(G\circ F))(X') \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

folgt.

(4) Die Bezeichnungen $X \xrightarrow{f} X'$, A, I, J_A, J_I etc. seien wie in der Lösung zu (1).
Es ist $\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(-\alpha+1/-\alpha-1/\!\!/-\alpha/-\alpha-2)^{+k} \simeq \mathrm{H}^\alpha\mathrm{H}^{k-\alpha}\left((-)^{-,*}\right)$; cf. erstes Lemma in 4.2.3. Wir können entlang dieses Isomorphismus identifizieren.
Wir haben einen Isomorphismus

$$\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}(-\alpha+1/-\alpha-1/\!\!/-\alpha/-\alpha-2)^{+k}(X) \;\simeq\; \mathrm{H}^\alpha\mathrm{H}^{k-\alpha}(GJ_A^{-,*}) \;\simeq\; \mathrm{H}^\alpha G\big(\mathrm{H}^{k-\alpha}(J_A^{-,*})\big) \;\simeq\; (\mathrm{R}^\alpha G)\,\big((\mathrm{R}^{k-\alpha}F)(X)\big)\ ,$$

da $\mathrm{H}^{k-\alpha}(J_A^{-,*})$ eine injektive Auflösung von $\mathrm{H}^{k-\alpha}FA \simeq (\mathrm{R}^{k-\alpha}F)(X)$ ist; cf. Beweis zum Satz in §4.3. Wir behaupten, daß dieser Isomorphismus in X natürlich ist.
Es ist $\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}(-\alpha+1/-\alpha-1/\!\!/-\alpha/-\alpha-2)^{+k}(f)$ gegeben durh

$$\left(\mathrm{H}^\alpha\mathrm{H}^{k-\alpha}(GJ_A^{-,*}) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{H}^\alpha\mathrm{H}^{k-\alpha}(G\dot{s}^{-,*})} \mathrm{H}^\alpha\mathrm{H}^{k-\alpha}(GJ_I^{-,*}) \xrightarrow{\mathrm{H}^\alpha\mathrm{H}^{k-\alpha}(G\ddot{f}^{-,*})} \mathrm{H}^\alpha\mathrm{H}^{k-\alpha}(GJ_{I'}^{-,*}) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{H}^\alpha\mathrm{H}^{k-\alpha}(G\dot{s}'^{-,*})^-} \mathrm{H}^\alpha\mathrm{H}^{k-\alpha}(GJ_{A'}^{-,*})\right)\ ,$$

Das obere Viereck des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^\alpha G\big(\mathrm{H}^{k-\alpha}(J_A^{-,*})\big) \arrow[d] & \mathrm{H}^\alpha G\big(\mathrm{H}^{k-\alpha}(J_{A'}^{-,*})\big) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^\alpha G\big(\mathrm{H}^{k-\alpha}(J_I^{-,*})\big) \arrow[r] & \mathrm{H}^\alpha G\big(\mathrm{H}^{k-\alpha}(J_{I'}^{-,*})\big) \\
(\mathrm{R}^\alpha G)\,\big(\mathrm{H}^{k-\alpha}(FI)\big) \arrow[r] \arrow[u] & (\mathrm{R}^\alpha G)\,\big(\mathrm{H}^{k-\alpha}(FI')\big) \arrow[u] \\
(\mathrm{R}^\alpha G)\,\big((\mathrm{R}^{k-\alpha}F)(X)\big) \arrow[r] \arrow[u] & (\mathrm{R}^\alpha G)\,\big((\mathrm{R}^{k-\alpha}F)(X')\big) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

kommutiert, da $\mathrm{H}^{k-\alpha}(J_I^{-,*}) \longrightarrow \mathrm{H}^{k-\alpha}(J_{I'}^{-,*})$ eine injektive Auflösung von $\mathrm{H}^{k-\alpha}(FI) \longrightarrow \mathrm{H}^{k-\alpha}(FI')$ ist. Das untere Viereck kommutiert, da es durch Anwenden des Funktors $\mathrm{R}^\alpha G \circ \mathrm{H}^{k-\alpha} \circ F$ aus dem Viereck

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r] & I' \\
\mathrm{IRes}X \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{IRes}X' \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

in $\mathrm{K}^{+,0}(R\text{-Inj})$ hervorgeht, welches seinerseits unter der Äquivalenz H^0 des Satzes aus §1.5.4 auf das kommutative Viereck

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, equal] & X' \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r] & X' \end{tikzcd}$$

abgebildet wird und welches also selbst kommutiert.

Letzteres Argument wurde auch oben bereits implizit verwandt.

(5) *Spektralsequenzargument.* Gemäß $(3,4)$ genügt es zu zeigen, daß für den Morphismus von eigentlichen Spektralsequenzen

$$\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}(X) \xrightarrow{\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}(f)} \dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}(X')$$

aus einem Isomorphismus an Position $(-\alpha+1/-\alpha-1/\!\!/-\alpha/-\alpha-2)^{+k}$ für alle $k \geqslant 0$ und für $\alpha \in [0,k]$ ein Isomorphismus an Position $(\infty/-\infty/\!\!/\infty/-\infty)^{+k}$ für alle $k \geqslant 0$ folgt.

Zunächst ist dazu anzumerken, daß, in der Bezeichnung der Lösung zu (1),

$$\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}(-\alpha+1/-\alpha-1/\!\!/-\alpha/-\alpha-2)^{+k}(X) \;=\; \mathrm{E}_{\mathrm{I}}(-\alpha+1/-\alpha-1/\!\!/-\alpha/-\alpha-2)^{+k}(GJ_A) \;=\; 0$$

für alle $k \in \mathbf{Z}$ und alle $\alpha \in \mathbf{Z} \smallsetminus [0,k]$; cf. §4.2.1.3. Folglich ist uns ein Isomorphismus bei $(-\alpha+1/-\alpha-1/\!\!/-\alpha/-\alpha-2)^{+k}$ für alle $\alpha \in \mathbf{Z}$ und alle $k \in \mathbf{Z}$ gegeben.

Somit können wir das Korollar aus §4.1.5 für $r = 2$ verwenden, wenn wir noch bemerken, daß wir in dessen Beweis die Teilmenge $\dot{\bar{\mathbf{Z}}}^{\#\#}_{\infty}$ von $\bar{\mathbf{Z}}^{\#\#}_{\infty}$ nicht verlassen. Oder aber, wir verwenden Aufgabe 71.

Direktes Argument. Wir verwenden die Bezeichnungen der Lösung zu (1). Nach Voraussetzung ist $FI \xrightarrow{F\dot{f}} FI'$ ein Quasiisomorphismus. Nach Aufgabe 74.(2) ist also auch $J_I \xrightarrow{\ddot{f}} J_{I'}$ eine Komposition von Doppel- und zeilenweisen Homotopismen. Da G additiv ist, trifft dies auch auf $GJ_I \xrightarrow{G\ddot{f}} GJ_{I'}$ zu. Folglich ist $\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_I) \xrightarrow{\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(G\ddot{f})} \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_{I'})$ ein Isomorphismus; cf. Aufgabe 75.(2, 3.iii). Nach Definition von $\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}(f)$ in der Lösung zu (1) hat dies zur Folge, daß auch $\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{G,F}(f)$ ein Isomorphismus ist.

(6) Die Aussage ist falsch. Sei $k = 1$, sei $R = S$, und sei F der identische Funktor. Dann ist $\mathrm{R}^1 F = 0$, da F exakt ist. Insbesondere transformiert $\mathrm{R}^1 F$ jeden Morphismus in einen Isomorphismus.

Da F injektive R-Moduln in injektive S-Moduln überführt, ist jeder R-Modul (F,G)-azyklisch auflösbar; cf. zweites Beispiel aus §4.3.

Setzen wir $T = \mathbf{Z}$ und $G = {}_S(Y,-)$ für einen S-Modul Y. Um ein Gegenbeispiel zu haben, sollte wir Y und eine S-lineare Abbildung $X \xrightarrow{f} X'$ so wählen, daß $\mathrm{Ext}^1_S(Y,f)$ nicht isomorph ist.

Wählen wir weiter $X' = 0$, so genügt es, X und Y so zu finden, daß $\mathrm{Ext}^1_S(Y,X) \not\simeq 0$. Sei etwa $R = S = T = \mathbf{Z}$, $X = \mathbf{Z}/2$, $Y = \mathbf{Z}/2$ und $X' = 0$. Dann ist, wie verlangt, $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2, \mathbf{Z}/2) \simeq \mathbf{Z}/2 \not\simeq 0$. Oder aber, wir zitieren eine nichtverschwindende Ext^1-Gruppe aus Aufgabe 25.(2).

Aufgabe 77. Sei $J_A \in \operatorname{Ob} \mathrm{CC}^{\llcorner}(S\text{-Inj})$ eine Cartan-Eilenberg-Auflösung von $F(A,X')$. Sei $J_{A'} \in \operatorname{Ob} \mathrm{CC}^{\llcorner}(S\text{-Inj})$ eine Cartan-Eilenberg-Auflösung von $F(X,A')$.

Schreibe mißbräuchlich $F(A,A') := F^{\mathrm{CC}}(A,A') \in \mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ für den Doppelkomplex, der an Position $(i,j) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ den Eintrag $F(A^i, A'^j)$ hat, und die Differentiale entsprechend; cf. §1.6.2.1.

Der Morphismus Konz $X \longrightarrow A$ induziert einen Morphismus $F(\text{Konz } X, A') \longrightarrow F(A,A')$ von Doppelkomplexen, und also einen Morphismus $F(X,A') \xrightarrow{\sim} \mathrm{t}F(\text{Konz } X, A') \longrightarrow \mathrm{t}F(A,A')$.

Wir behaupten, daß dies ein Quasiisomorphismus ist. Es genügt zu zeigen, daß $F(\mathrm{Konz}\ X, A'^k) \longrightarrow F(A, A'^k)$ für alle $k \geqslant 0$ ein Quasiisomorphismus ist; cf. Lemma aus §1.6.2.4. Dies ist aber nach Voraussetzung der Fall.

Sei $J_{A,A'}$ eine Cartan-Eilenberg-Auflösung von $\mathrm{t}F(A, A')$. Mit Aufgabe 72.(12) erhalten wir eine Cartan-Eilenberg-Auflösung $J_A \longrightarrow J_{A,A'}$ des Quasisomorphismus $F(X, A) \longrightarrow \mathrm{t}F(A, A')$, welche dank Aufgabe 74.(2) eine Komposition von Doppel- und zeilenweisen Homotopismen ist. Mit Aufgabe 75.(2, 3.iii) erhalten wir einen Isomorphismus

$$\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{F(-,X'),G}(X) \;=\; \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_A) \xrightarrow{\sim} \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_{A,A'})\;.$$

Symmetrisch hierzu erhalten wir auch einen Isomorphismus

$$\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{F(X,-),G}(X') \;=\; \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_{A'}) \xrightarrow{\sim} \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ_{A,A'})\;.$$

Zusammengesetzt ergibt dies den gewünschten Isomorphismus $\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{F(-,X'),G}(X) \xrightarrow{\sim} \dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{F(X,-),G}(X')$.

Aufgabe 78. Sei $J' \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{CC}^{\llcorner}(S'\text{-Mod})$ eine Cartan-Eilenberg-Auflösung von FA. Gemäß Definition ist

$$\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{F,G(Y,-)}(X) \;=\; \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}\big(G(Y, J')\big)\;.$$

Wir kürzen im folgenden den in §1.6.2.1 eingeführten Funktor G^{CC} mit G ab.

Dank Aufgabe 71 genügt es, einen Doppelkomplex $D \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{CC}^{\llcorner}(T\text{-Mod})$ und zwei Morphismen von Doppelkomplexen

$$G(B, FA) \xrightarrow{u} D \xleftarrow{v} G(Y, J')$$

so zu finden, daß $\mathrm{E}_{\mathrm{I}}(\alpha+1/\alpha-1/\!\!/\alpha/\alpha-2)^{+k}$ für alle $\alpha \in \mathbf{Z}$ und alle $k \in \mathbf{Z}$ sowohl u als auch v auf einen Isomorphismus abbildet.

Mit dem ersten Lemma aus §4.2.3 läuft das darauf hinaus, daß $\mathrm{H}^k\mathrm{H}^\ell(u^{-,*})$ und $\mathrm{H}^k\mathrm{H}^\ell(v^{-,*})$ für alle $k,\, \ell \geqslant 0$ isomorph sein sollten. In anderen Worten, es sollten $\mathrm{H}^\ell(u^{-,*})$ und $\mathrm{H}^\ell(v^{-,*})$ quasiisomorph sein.

Beobachte, daß $\mathrm{CC}(R\text{-Mod}) = \mathrm{C}(\mathrm{C}(R\text{-Mod}))$. Sei, analog, $\mathrm{CCC}(R\text{-Mod}) := \mathrm{C}(\mathrm{C}(\mathrm{C}(R\text{-Mod})))$ die Kategorie der *Tripelkomplexe.* Ein Tripelkomplex Y hat Einträge $Y^{k,\ell,m}$ für $k,\, \ell,\, m \,\in\, \mathbf{Z}$.

Wir bezeichnen die Differentiale in die verschiedenen Richtungen mit $Y^{k,\ell,m} \xrightarrow{d_1} Y^{k+1,\ell,m}$, $Y^{k,\ell,m} \xrightarrow{d_2} Y^{k,\ell+1,m}$, $Y^{k,\ell,m} \xrightarrow{d_3} Y^{k,\ell,m+1}$.

Seien $k,\, \ell,\, m \,\in\, \mathbf{Z}$. Wir werden die Notation $Y^{-,\ell,=}$ für den Doppelkomplex verwenden, der an Position (k, m) den Eintrag $X^{k,\ell,m}$ hat; die Differentiale entsprechend; ähnlich der Komplex $Y^{k,\ell,*}$ usf. Ist $\mathrm{C}(R\text{-Mod}) \xrightarrow{H} R\text{-Mod}$ ein additiver Funktor, und ist $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{CCC}(R\text{-Mod})$ ein Tripelkomplex, schreiben wir $HY^{-,=,*} \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{CC}(R\text{-Mod})$ für den Doppelkomplex, der an Position (k, ℓ) den Eintrag $H(Y^{k,\ell,*})$ hat, die Differentiale entsprechend.

Sei $\mathrm{CCC}^{\llcorner}(R\text{-Mod}) \subseteq \mathrm{CCC}(R\text{-Mod})$ die volle Teilkategorie der Tripelkomplexe Y mit $Y^{k,\ell,m} = 0$, falls $k < 0$ oder $\ell < 0$ oder $m < 0$.

Für $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{CCC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ bezeichne $\mathrm{t}_{1,2}Y \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ den *ebenenweisen Totalkomplex* von Y, definiert für $m \in \mathbf{Z}$ durch

$$(\mathrm{t}_{1,2}Y)^{*,m} \;:=\; \mathrm{t}(Y^{-,=,m})\;,$$

inklusive der vertikalen Differentiale, und mit horizontalen Differentialen

$$\left((\mathrm{t}_{1,2}Y)^{*,m} \xrightarrow{d} (\mathrm{t}_{1,2}Y)^{*,m+1}\right) \;:=\; \left(\mathrm{t}(Y^{-,=,m}) \xrightarrow{\;\;\mathrm{t}d_3^{-,=,m}\;\;} \mathrm{t}(Y^{-,=,m+1})\right)\;.$$

So ist also etwa

$$(\mathrm{t}_{1,2}Y)^{k,\ell} = \bigoplus_{i,\, j \,\geqslant\, 0,\, i+j\,=\,k} Y^{i,j,\ell}$$

für $k,\, \ell \geqslant 0$. Mit den induzierten Morphismen erhalten wir einen Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{CCC}^{\llcorner}(R\text{-Mod}) & \xrightarrow{\mathrm{t}_{1,2}} & \mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod}) \\ Y & \longmapsto & \mathrm{t}_{1,2}Y\ . \end{array}$$

Sei $\mathrm{Konz}_2\, FA \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod})$ der Doppelkomplex, der an Position $(0,\ell)$ den Eintrag FA^ℓ hat für $\ell \geqslant 0$, der an Position (k,ℓ) den Eintrag 0 hat für $k \geqslant 1$ und $\ell \geqslant 0$, und dessen horizontale Differentiale in Zeile 0 dem Komplex FA entnommen sind. Wir haben einen Morphismus von Doppelkomplexen $\mathrm{Konz}_2\, FA \longrightarrow J'$.

Für $U \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{C}^+(S\text{-Mod})$ und $U' \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{CC}^{\llcorner}(S'\text{-Mod})$ sei $G(U,U') \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{CCC}^{\llcorner}(T\text{-Mod})$ der Tripelkomplex, der an Position (k,ℓ,m) mit $k,\, \ell,\, m \geqslant 0$ den Eintrag $G(U^k, U'^{\ell,m})$ hat, die Differentiale entsprechend.

Wir erhalten ein Diagramm von Tripelkomplexen

$$G(B, \mathrm{Konz}_2\, FA) \longrightarrow G(B, J') \longleftarrow G(\mathrm{Konz}\, Y, J')\ .$$

Sei $\ell \geqslant 0$. Anwenden von $\mathrm{H}^\ell\,((-)^{-,=,*})$ gibt ein Diagramm von Doppelkomplexen

$$(*) \qquad \mathrm{H}^\ell\big(G(B, \mathrm{Konz}_2\, FA)^{-,=,*}\big) \longrightarrow \mathrm{H}^\ell\big(G(B,J')^{-,=,*}\big) \longleftarrow \mathrm{H}^\ell\big(G(\mathrm{Konz}\, Y, J')^{-,=,*}\big)\ .$$

Da für $k \geqslant 0$ der Funktor $G(B^k, -)$ nach Voraussetzung (d) exakt ist, ist

$$\mathrm{H}^\ell\big(G(B, \mathrm{Konz}_2\, FA)^{-,=,*}\big) \;\simeq\; G(B, \mathrm{Konz}\, \mathrm{H}^\ell(FA))\ ,$$

sowie

$$\mathrm{H}^\ell\big(G(B,J')^{-,=,*}\big) \;\simeq\; G(B, \mathrm{H}^\ell(J'^{-,*}))\ .$$

Da J' als Cartan-Eilenberg-Auflösung zeilenweise split ist, ist auch

$$\mathrm{H}^\ell\big(G(Y,J')^{-,=,*}\big) \;\simeq\; G(Y, \mathrm{H}^\ell(J'^{-,*}))\ .$$

Insgesamt ist das Diagramm von Doppelkomplexen $(*)$ isomorph zu

$$(**) \qquad G(B, \mathrm{Konz}\, \mathrm{H}^\ell FA) \longrightarrow G(B, \mathrm{H}^\ell(J'^{-,*})) \longleftarrow G(\mathrm{Konz}\, Y, \mathrm{H}^\ell(J'^{-,*}))\ ,$$

in welchem der linke Morphismus durch Anwenden von $G(B,-)$ auf den Quasiisomorphismus

$$\mathrm{Konz}\, \mathrm{H}^\ell FA \longrightarrow \mathrm{H}^\ell(J'^{-,*})$$

hervorgeht – es ist J' eine Cartan-Eilenberg-Auflösung von FA –, und in welchem der rechte Morphismus durch Anwenden von $G(-, \mathrm{H}^\ell(J'^{-,*}))$ auf den Quasiisomorphismus

$$B \longleftarrow \mathrm{Konz}\, Y$$

hervorgeht.

Da $G(B^k,-)$ für $k \geqslant 0$ exakt ist nach Voraussetzung (d), ist der linke Morphismus in $(**)$ ein zeilenweiser Quasiisomorphismus. Da $\mathrm{H}^\ell(J'^{k,*})$ injektiv ist für $k \geqslant 0$, und da daher $G(-, \mathrm{H}^\ell(J'^{k,*}))$ nach Voraussetzung (e) exakt ist für $k \geqslant 0$, ist der rechte Morphismus in $(**)$ ein spaltenweiser Quasiisomorphismus.

Anwenden von t auf $(**)$ liefert also links wie rechts einen Quasiisomorphismus; cf. Lemma in §1.6.2.4. Daher gilt das auch für die Anwendung von t auf $(*)$.

Für $\ell \geqslant 0$ haben wir folgendes kommutative Diagramm von Funktoren.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CCC}^{\swarrow}(T\text{-Mod}) \arrow[r, "\mathrm{t}_{1,2}"] \arrow[d, "\mathrm{H}^{\ell}\left((-)^{-,=,*}\right)"'] & \mathrm{CC}^{\llcorner}(T\text{-Mod}) \arrow[d, "\mathrm{H}^{\ell}\left((-)^{-,*}\right)"] \\
\mathrm{CC}^{\llcorner}(T\text{-Mod}) \arrow[r, "\mathrm{t}"] & \mathrm{C}^{+}(T\text{-Mod})
\end{tikzcd}$$

Somit liefert die Anwendung von t auf $(*)$ das Diagramm

$$\mathrm{H}^{\ell}\Big(\big(\mathrm{t}_{1,2}G(B, \mathrm{Konz}_2\, FA)\big)^{-,*}\Big) \longrightarrow \mathrm{H}^{\ell}\Big(\big(\mathrm{t}_{1,2}G(B, J')\big)^{*,-}\Big) \longleftarrow \mathrm{H}^{\ell}\Big(\big(\mathrm{t}_{1,2}G(\mathrm{Konz}\, Y, J')\big)^{*,-}\Big)\ ,$$

welches seinerseits isomorph ist zu

$$\mathrm{H}^{\ell}\Big(G(B, FA)^{-,*}\Big) \longrightarrow \mathrm{H}^{\ell}\Big(\mathrm{t}_{1,2}\big(G(B, J')\big)^{*,-}\Big) \longleftarrow \mathrm{H}^{\ell}\Big(G(Y, J')^{*,-}\Big)\ ,$$

und, wie gesagt, aus zwei Quasiisomorphismen besteht.

Somit ist

$$\big(G(B, FA) \xrightarrow{u} D \xleftarrow{v} G(Y, J')\big) \quad := \quad \Big(G(B, FA) \longrightarrow \mathrm{t}_{1,2}\big(G(B, J')\big) \longleftarrow G(Y, J')\Big)$$

wie eingangs gewünscht.

Aufgabe 79.

Behauptung 1. Es sind $\mathrm{H}^{\ell}(B^{k,*})$ und $B^{k,\ell}$ beide G-azyklisch für alle k, $\ell \geqslant 0$.

Denn der kurz exakten Sequenz $\mathrm{Z}^{\ell}(B^{k,*}) \longrightarrow B^{k,\ell} \longrightarrow \mathrm{B}^{\ell+1}(B^{k,*})$ können wir die G-Azyklizität von $B^{k,\ell}$ entnehmen, und der kurz exakten Sequenz $\mathrm{B}^{\ell}(B^{k,*}) \longrightarrow \mathrm{Z}^{\ell}(B^{k,*}) \longrightarrow \mathrm{H}^{\ell}(B^{k,*})$ die G-Azyklizität von $\mathrm{H}^{\ell}(B^{k,*})$. Dies zeigt die Behauptung 1.

Feststellung 2. Wie in Aufgabe 72.(6) sehen wir, daß $\mathrm{H}^{\ell}(B^{-,*})$ eine G-azyklische Auflösung von $\mathrm{H}^{\ell}(FA)$ ist für $\ell \geqslant 0$. Beachte hierzu, daß Summanden G-azyklischer Moduln wieder G-azyklisch sind.

Behauptung 3. Es gibt einen Morphismus $B \longrightarrow J$ in eine Cartan-Eilenberg-Auflösung $J \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{CC}^{\llcorner}(S\text{-Inj})$ derart, daß $B^{k,*} \longrightarrow J^{k,*}$ rein monomorph ist für alle $k \geqslant 0$, und derart, daß $\mathrm{H}^{k}(B^{*,-}) \longrightarrow \mathrm{H}^{k}(J^{*,-})$ ein Isomorphismus von Komplexen ist für alle $k \geqslant 0$.

Schritt 1. Sei $B^{0,*} \longrightarrow J^{0,*}$ ein reiner Monomorphismus in einen spaltenden und aus Injektiven bestehenden Komplex $J^{0,*}$; cf. Aufgabe 72.(6). Sei $(B^{0,*}, B^{1,*}, J^{0,*}, T)$ ein (punktweise genommener) Pushout, wobei $T \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}^{+}(R\text{-Mod})$. Nach Aufgabe 72.(4.i) ist $J^{0,*} \longrightarrow T$ rein und $B^{1,*} \longrightarrow T$ rein monomorph. Vom (punktweise genommenen) Cokern von $B^{0,*} \longrightarrow B^{1,*}$ zum (punktweise genommenen) Cokern von $J^{0,*} \longrightarrow T$ haben wir einen induzierten Isomorphismus, ohne Einschränkung ist dies eine Identität; cf. Aufgabe 18.(5). Somit erhalten wir einen reinen Morphismus $T \longrightarrow B^{2,*}$ in einem kommutativen Dreieck $(B^{1,*}, T, B^{2,*})$. Wir erhalten einen Doppelkomplex

$$B' \;:=\; (J^{0,*} \longrightarrow T \longrightarrow B^{2,*} \longrightarrow B^{3,*} \longrightarrow \cdots)$$

aus reinen Differentialen und einen Morphismus $B \longrightarrow B'$.

$$\begin{tikzcd}
J^{0,-} \arrow[r] & T \arrow[dr] & & \\
B^{0,-} \arrow[u, "\bullet"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\urcorner"] & B^{1,-} \arrow[u, "\bullet"] \arrow[r] & B^{2,-} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Nach Konstruktion liefert $\mathrm{H}^{k}((-)^{*,-})$ einen Isomorphismus für alle $k \notin [0, 2]$. Für $k = 0$ liefert dieser Funktor einen Isomorphismus, da der induzierte Morphismus vom Kern von $B^{0,-} \longrightarrow B^{1,-}$ zum Kern von $J^{0,-}$ nach T als Identität gewählt werden kann; cf. Aufgabe 18.(5). Für $k = 2$ liefert dieser Funktor einen Isomorphismus, da die Bilder der Morphismen $T \longrightarrow B^{2,-}$ und $B^{1,-} \longrightarrow B^{2,-}$ übereinstimmen. Für $k = 1$ liefert dieser Funktor einen Isomorphismus, da er sowohl auf B als auch auf B' verschwindet; letzteres, da der Cokern von $J^{0,-} \longrightarrow T$ gleich dem Bild von $T \longrightarrow B^{2,-}$ ist; cf. Aufgabe 18.(5).

Somit können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $B^{0,*} = J^{0,*}$ aus Injektiven besteht.

Schritt 2. Konstruiere wie in Schritt 1

$$\begin{tikzcd}
& J^{1,-} \arrow[r] & T \arrow[dr] & & \\
J^{0,-} \arrow[ur] \arrow[r] & B^{1,-} \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\urcorner"] & B^{2,-} \arrow[u] \arrow[r] & B^{3,-} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Nach Konstruktion liefert $\mathrm{H}^k((-)^{*,-})$ einen Isomorphismus für alle $k \notin [0,3]$. Für $k = 0$ liefert dieser Funktor einen Isomorphismus, da die Kerne von $J^{0,-} \longrightarrow B^{1,-}$ und $J^{0,-} \longrightarrow J^{1,-}$. Für $k = 3$ wird ein Isomorphismus geliefert, da die Bilder der Morphismen $T \longrightarrow B^{3,-}$ und $B^{2,-} \longrightarrow B^{3,-}$ übereinstimmen. Für $k = 1$ wird auf beiden Objekten Null geliefert; insbesondere ist der Kern von $J^{1,*} \longrightarrow T$ gleich dem Kern von $B^{1,-} \longrightarrow B^{2,-}$, was wiederum gleich dem Bild von $B^{0,-} \longrightarrow B^{1,-}$ ist; cf. Aufgabe 18.(3). Für $k = 2$ wird auf beiden Objekten Null geliefert; insbesondere ist der Cokern von $J^{2,-} \longrightarrow T$ gleich dem Bild von $T \longrightarrow B^{3,-}$; cf. Aufgabe 18.(5).

Somit können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $B^{0,*} = J^{0,*}$ und $B^{1,*} = J^{1,*}$ aus Injektiven bestehen.

Usf. Dies zeigt die Behauptung 3.

Insbesondere folgt, daß J eine Cartan-Eilenberg-Auflösung von FA ist, da $\mathrm{H}^k((-)^{*,-})$ für alle $k \geqslant 0$ auf beiden Morphismen in $FA \longrightarrow B \longrightarrow J$ einen Isomorphismus liefert, und also auch auf $FA \longrightarrow J$.

Mit der eingangs gemachten Feststellung 2 sind für $\ell \geqslant 0$ im kommutativen Dreieck

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^\ell(B^{-,*}) \arrow[rr] & & \mathrm{H}^\ell(J^{-,*}) \\
& \mathrm{H}^\ell(FA) \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

die unteren beiden Morphismen Quasiisomorphismen, und also auch der obere.

Behauptung 4. Ist $U \longrightarrow I$ ein Quasiisomorphismus in $\mathrm{C}^+(S\text{-Mod})$, und besteht U aus G-azyklischen und I aus injektiven S-Moduln, so ist auch $GU \longrightarrow GI$ ein Quasiisomorphismus.

Sei I' eine Cartan-Eilenberg-Auflösung von U. Wir haben einen Quasiisomorphismus $U \longrightarrow \mathrm{t}I'$, welcher unter G auf einen Quasiisomorphismus abgebildet wird; cf. Beweis zum zweiten Lemma in §4.3.

Wir haben ein kommutatives Dreieck

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{t}I' \arrow[d] \\
& I\,,
\end{tikzcd}$$

in welchem $U \longrightarrow I$ und $U \longrightarrow \mathrm{t}I'$ quasiisomorph sind, und in welchem folglich $\mathrm{t}I' \longrightarrow I$ ein Homotopismus ist; cf. Aufgabe 73.(6, 4). Anwendung von G liefert das kommutative Dreieck

$$\begin{tikzcd}
GU \arrow[r] \arrow[dr] & G\mathrm{t}I' \arrow[d] \\
& GI\,,
\end{tikzcd}$$

in welchem $GU \longrightarrow G\mathrm{t}I'$ ein Quasiisomorphismus ist, und, da G additiv ist, auch $G\mathrm{t}I' \longrightarrow GI$ ein Homotopismus, und also auch ein Quasiisomorphismus ist. Daher ist auch $GU \longrightarrow GI$ ein Quasiisomorphismus. Dies zeigt die Behauptung 4.

Mit Behauptung 4 wissen wir nun, daß

$$G\mathrm{H}^\ell(B^{-,*}) \longrightarrow G\mathrm{H}^\ell(J^{-,*})$$

ein Quasiisomorphismus ist.

Behauptung 5. Sei $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(S\text{-Mod})$ ein aus G-azyklischen Objekten bestehender Komplex. Dann gibt es für alle $k \in \mathbf{Z}$ einen Isomorphismus $G\mathrm{H}^k X \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^k GX$, natürlich in X.

Denn die kurz exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{B}^\ell(X) & \longrightarrow & \mathrm{Z}^\ell(X) & \longrightarrow & \mathrm{H}^\ell(X) \\ \mathrm{Z}^\ell(X) & \longrightarrow & X^\ell & \longrightarrow & \mathrm{B}^{\ell+1}(X) \end{array}$$

werden, wegen der G-Azyklizität von $\mathrm{B}^\ell(B^{k,*})$ im ersteren Fall und wegen der G-Azyklizität von $\mathrm{Z}^\ell(B^{k,*})$ im zweiteren Fall, unter G auf die kurz exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccc} G\mathrm{B}^\ell(X) & \longrightarrow & G\mathrm{Z}^\ell(X) & \longrightarrow & G\mathrm{H}^\ell(X) \\ G\mathrm{Z}^\ell(X) & \longrightarrow & GX & \longrightarrow & G\mathrm{B}^{\ell+1}(X) \end{array}$$

abgebildet. Also kann $\mathrm{H}^\ell(GX)$ als $G\mathrm{H}^\ell(X)$ berechnet werden. Ist ein Morphismus $X \xrightarrow{f} X'$ in $\mathrm{C}(S\text{-Mod})$ gegeben, so kann $\mathrm{H}^\ell(G(X \xrightarrow{f} X'))$ als $G\mathrm{H}^\ell(X \xrightarrow{f} X')$ berechnet werden. Dies zeigt die Behauptung 5.

Mit Behauptung 5 mutiert unser obiger Quasiisomorphismus zum Quasiisomorphismus

$$\mathrm{H}^\ell(GB^{-,*}) \longrightarrow \mathrm{H}^\ell(GJ^{-,*})\ .$$

Wie eingangs der Lösung zu Aufgabe 78 ausgeführt, hat dies zur Folge, daß

$$\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GB) \ \simeq\ \dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(GJ) \ =\ \dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{F,G}(X)\ .$$

Aufgabe 80. Schreibe $RG\text{-Mod} \xrightarrow{F} R\bar{G}\text{-Mod}$, $X \longmapsto X^N$ und $R\bar{G}\text{-Mod} \xrightarrow{F'} R\text{-Mod}$, $Y \longmapsto Y^{\bar{G}}$. Es ist M ein (F,F')-azyklisch auflösbarer RG-Modul; cf. Anfang zu §4.4.2.

Die eigentliche Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralsequenz $\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{LHS}}_{G,N;R}(M)$ ist per Definition gleich der eigentlichen Grothendieck-Spektralsequenz $\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{F,F'}(M)$.

Der biadditive Funktor U. Bezeichne

$$\begin{array}{ccccc} (RG\text{-Mod})^\circ & \times & RG\text{-Mod} & \xrightarrow{U} & R\bar{G}\text{-Mod} \\ (X & , & X') & \longmapsto & {}_{RN}(X,X')\ , \end{array}$$

wobei die $R\bar{G}$-Modulstruktur auf ${}_{RN}(X,X')$ für $\bar{g} \in \bar{G}$ und eine RN-lineare Abbildung $X \xrightarrow{f} X'$ definiert sei durch $(x)(\bar{g}\cdot f) := g((g^- x)f)$ für $x \in X$. Da wir wegen der RN-Linearität von f

$$(gn)((gn)^- x)f \ =\ gn((n^- g^- x)f) \ =\ g((g^- x)f)$$

haben für $n \in N$, ist die resultierende Abbildung $gN\cdot f$ in der Tat unabhängig von der Repräsentantenwahl modulo N. Da ferner

$$\begin{array}{rcl} n((x)(gN\cdot f)) & = & ng((g^- x)f) \\ & = & gn^g((g^- x)f) \\ & = & g((n^g g^- x)f) \\ & = & g((g^- nx)f) \end{array}$$

ist für $n \in N$, ist die resultierende Abbildung $\bar{g} \cdot f$ auch RN-linear. Mit den induzierten Morphismen erhalten wir so in der Tat einen biadditiven Funktor U. Ferner ist für $X' \in \mathrm{Ob}\, RG\text{-Mod}$ der Funktor $U(-,X')$ linksexakt, und auch für $X \in \mathrm{Ob}(RG\text{-Mod})^\circ$ der Funktor $U(X,-)$ linksexakt. Es ist $F \simeq U(R,-)$.

Der biadditive Funktor V. Bezeichne

$$\begin{array}{ccccc} (R\bar{G}\text{-Mod})^\circ & \times & R\bar{G}\text{-Mod} & \xrightarrow{V} & R\text{-Mod} \\ (Y & , & Y') & \longmapsto & {}_{R\bar{G}}(Y,Y') \end{array}$$

den Homfunktor. Dieser ist biadditiv. Ferner ist für $Y' \in \mathrm{Ob}\, R\bar{G}\text{-Mod}$ der Funktor $V(-,Y')$ linksexakt, und für $Y \in \mathrm{Ob}(R\bar{G}\text{-Mod})^\circ$ der Funktor $V(Y,-)$ linksexakt. Es ist $F' \simeq V(R,-)$.

Halten wir zunächst fest, daß $\mathrm{E}^{\mathrm{Gr}}_{F,F'}(M)$ isomorph ist zu $\mathrm{E}^{\mathrm{Gr}}_{U(R,-),V(R,-)}(M)$.

Anwendung von Aufgabe 77. Wir wollen für U, $V(R,-)$ und die Moduln $R \in \mathrm{Ob}(RG\text{-Mod})^\circ$ und $M \in \mathrm{Ob}\, RG\text{-Mod}$ die Aufgabe 77 anwenden. Es wurde bereits angemerkt, daß die dortigen Bedingungen (a), (a′) und (b) erfüllt sind.

Zu (c). Zu zeigen ist, daß R eine $(U(-,M), V(R,-))$-azyklische Auflösung besitzt. Genauer wollen wir zeigen, daß $\mathrm{Bar}_{G;R}$ eine solche Auflösung ist. Es ist deren Eintrag $RG^{\otimes(k+1)}$ an Position $k \geqslant 0$ endlich erzeugt frei über RG, und insbesondere injektiv in $(RG\text{-Mod})^\circ$. Somit ist $\mathrm{Bar}_{G;R}$ sowohl $U(-,M)$-azyklisch als auch $V(R,-)\circ U(-,M)$-azyklisch. Bleibt zu zeigen, daß die Einträge von $U(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)$ auch $V(R,-)$-azyklisch sind. Hierfür genügt es mit dem ersten Lemma aus §4.4.1 zu zeigen, daß $U(RG,M)$ endlich erzeugt projektiv über $R\bar{G}$ ist.

Behauptung. *Ist X ein RG-Modul, so ist*

$$\begin{array}{rcl} U(RG,X) \;=\; {}_{RN}(RG,X) & \xrightarrow{\Phi} & {}_R(R\bar{G},X) \\ f & \longmapsto & \big(\bar{g} \longmapsto g(g^- f)\big) \end{array}$$

ein $R\bar{G}$-linearer Isomorphismus, wobei die linken Seite wie oben beschrieben ein $R\bar{G}$-Modul sei, und die rechte Seite vermöge des Bimoduls ${}_R R\bar{G}_{R\bar{G}}$ zu einem $R\bar{G}$-Modul werde; cf. Aufgabe 13.(4).

Beweis. Für die Wohldefiniertheit von Φ ist die Wohldefiniertheit von $f\Phi$ zu zeigen, i.e. die Repräsentantenunabhängigkeit modulo N von $g(g^- f)$. Da f eine RN-lineare Abbildung ist, ist aber $gn((gn)^- f) = gn((n^- g^-)f) = g(g^- f)$ für $g \in G$ und $n \in N$.

Für die $R\bar{G}$-Linearität von Φ sei $g' \in G$ gegeben. Es wird $\bar{g}' \cdot f$ unter Φ abgebildet auf die Abbildung, die $\bar{g}$ schickt auf $g\big(g^-(\bar{g}' \cdot f)\big) = gg'\big((g'^- g^-)f\big)$. Auf der anderen Seite ist

$$\bar{g}' \cdot (f\Phi) \;=\; \bar{g}'\big(\bar{g} \longmapsto g(g^- f)\big) \;=\; \big(\bar{g} \longmapsto \bar{g}\bar{g}' \longmapsto (gg')((gg')^- f)\big)\,,$$

was dasselbe ist. Wir erhalten also $(\bar{g}' \cdot f)\Phi = \bar{g}' \cdot (f\Phi)$, was die $R\bar{G}$-Linearität von Φ zeigt.

Es genügt nun, noch zu zeigen, daß Φ ein R-linearer Isomorphismus ist. Wir haben als Umkehrabbildung

$$\begin{array}{rcl} U(RG,X) \;=\; {}_{RN}(RG,X) & \xleftarrow{\Phi^-} & {}_R(R\bar{G},X) \\ \big(g \longmapsto g(\bar{g}^- h)\big) & \longleftarrow\!\!\shortmid & h\,. \end{array}$$

In der Tat ist wegen $ng \longmapsto ng((\bar{g}^-\bar{n}^-)h) = ng(\bar{g}^- h)$ für $n \in N$ und $g \in G$ die Abbildung $h\Phi^-$ linear über RN. Ferner bildet $\Phi\Phi^-$ ein f auf die Abbildung

$$g \;\longmapsto\; g(\bar{g}^-(f\Phi)) \;=\; g(g^-(gf)) \;=\; gf$$

ab, i.e. auf f; womit $\Phi\Phi^- = 1$ eingesehen ist. Schließlich bildet $\Phi^-\Phi$ ein h auf die Abbildung

$$\bar{g} \;\longmapsto\; g(g^-(h\Phi^-)) \;=\; g(g^-(\bar{g}h)) \;=\; \bar{g}h$$

ab, i.e. auf h; womit $\Phi^- \Phi = 1$ eingesehen ist. $\square$

Mit der Behauptung genügt es nun zu zeigen, daß ${}_R(R\bar{G}, M)$ endlich erzeugt projektiv über $R\bar{G}$ ist. Wegen der Additivität von ${}_R(R\bar{G}, -)$ dürfen wir hierzu $M = R$ annehmen; vgl. Aufgabe 22.(1). Es genügt zu zeigen, daß $R\bar{G} \longrightarrow {}_R(R\bar{G}, R)$, $1 \longmapsto (\bar{g} \longmapsto \partial_{\bar{1},\bar{g}})$ ein $R\bar{G}$-linearer Isomorphismus ist. In der Tat wird für $g' \in G$ das Element $\bar{g}'$ nach $\bar{g}' \cdot (\bar{g} \longmapsto \partial_{\bar{1},\bar{g}}) = (\bar{g} \longmapsto \bar{g}\bar{g}' \longmapsto \partial_{\bar{1},\bar{g}\bar{g}'} = \partial_{\bar{g}'^-,\bar{g}})$ geschickt, womit eine R-lineare Basis auf eine R-lineare Basis kommt.

Zu (c$'$). Zu zeigen ist, daß M eine $(U(R,-), V(R,-))$-azyklische Auflösung besitzt. Dies ist gleichbedeutend mit der Existenz einer (F, F')-azyklischen Auflösung. Zu Beginn von §4.4.2 haben wir gesehen, daß eine projektive Auflösung P von M^* mit endlich erzeugten Einträgen nach Dualisieren eine solche (F, F')-azyklische Auflösung P^* von M liefert.

Zu (d). Zu zeigen ist, daß der Quasiisomorphismus Konz $R \longrightarrow \mathrm{Bar}_{G;R}$ unter $U(-, P_k^*)$ für alle $k \geqslant 0$ wieder einen Quasiisomorphismus liefert. Wir erinnern an den um R in Position -1 verlängerten azyklischen Komplex $\widetilde{\mathrm{Bar}}_{G;R}$ aus §2.3.1. Es ist zu zeigen, daß $U(\widetilde{\mathrm{Bar}}_{G;R}, P_k^*)$ azyklisch ist.

Es ist $\widetilde{\mathrm{Bar}}_{G;R}$ zusammengesetzt aus kurz exakten Sequenzen von RG-Gittern. Somit genügt es zu zeigen, daß $U(-, P_k^*)$ eine kurz exakte Sequenz $T' \longrightarrow T \longrightarrow T''$ von RG-Gittern in eine kurz exakte Sequenz überführt. Nun ist

$$({}_{RN}(T', P_k^*) \longleftarrow {}_{RN}(T, P_k^*) \longleftarrow {}_{RN}(T'', P_k^*)) \simeq ({}_{RN}(P_k, T'^*) \longleftarrow {}_{RN}(P_k, T^*) \longleftarrow {}_{RN}(P_k, T''^*)) ,$$

und letztere Sequenz ist kurz exakt, da $T'^* \longleftarrow T^* \longleftarrow T''^*$ kurz exakt ist, da kurz exakte Sequenzen von RG-Gittern als kurz exakte Sequenzen von R-Moduln aufspalten, und da ferner P_k eingeschränkt als RN-Modul ebenfalls projektiv ist.

Zu (d$'$). Zu zeigen ist, daß der Quasiisomorphismus Konz $M \longrightarrow P^*$ unter $U(RG^{\otimes(k+1)}, -)$ für alle $k \geqslant 0$ auf einen Quasiisomorphismus abgebildet wird. Nun ist $RG^{\otimes(k+1)}$ endlich erzeugt frei über RG, und ${}_{RN}(RG, -)$ wegen der Projektivität von RG über RN exakt. Somit bleibt der um M in Position -1 verlängerte Komplex P^* nach Anwenden von ${}_{RN}(RG, -)$ azyklisch, wie zu zeigen war.

Somit ist Aufgabe 77 anwendbar, und daher $\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{U(R,-),V(R,-)}(M)$ isomorph zu $\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{U(-,M),V(R,-)}(R)$.

Anwendung von Aufgabe 78. Wir wollen für $U(-, M)$, V und die Moduln $R \in \mathrm{Ob}(RG\text{-Mod})^\circ$ und $R \in \mathrm{Ob}(R(G/N)\text{-Mod})^\circ$ die Aufgabe 78 anwenden. Es wurde bereits angemerkt, daß die dortigen Bedingungen (a) und (b) erfüllt sind.

Zu (c). Zu zeigen ist, daß R eine $(U(-, M), V(R, -))$-azyklische Auflösung hat. Daß $\mathrm{Bar}_{G;R}$ eine solche ist, wurde schon in Punkt (c) betreffs der Anwendung von Aufgabe 77 erläutert.

Zu (d). Zu zeigen ist, daß $V(RG^{\otimes(k+1)}, -)$ für $k \geqslant 0$ exakt ist. Dies folgt aus der Projektivität von RG.

Zu (e). Zu zeigen ist, daß für I' injektiv in RG-Mod der Funktor $V(-, I')$ exakt ist. Auch dies ist der Fall.

Somit ist Aufgabe 78 anwendbar, und daher ist $\dot{\mathrm{E}}^{\mathrm{Gr}}_{U(-,M),V(R,-)}(R)$ isomorph zu $\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}\Big(V\big(\mathrm{Bar}_{G/N;R}, U(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)\big)\Big)$, i.e. zu $\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(D)$.

Aufgabe 81.

(1) *Wohldefiniertheit f_1.*

Repräsentiere $x \in X^{1,0}$ mit $xd = 0$ und $x\delta = 0$ ein Element aus $\mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(X^{-,*})$. Dann ist $(0, x)\left(\begin{smallmatrix} d & \delta & 0 \\ 0 & -d & -\delta \end{smallmatrix}\right) = 0$, und also repräsentiert $(0, x)$ ein Element in $\mathrm{H}^1(\mathrm{t}X)$.

Repräsentiere $x \in X^{1,0}$ die Null in $\mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(X^{-,*})$; i.e. gebe es ein $t \in X^{0,0}$ mit $td = 0$ und $t\delta = x$. Dann ist $(0, x) = (td, t\delta)$ im Bild des Differentials von $\mathrm{t}X$ und verschwindet somit in $\mathrm{H}^1(\mathrm{t}X)$.

Wohldefiniertheit f_2.

Repräsentiere $(y, x) \in X^{0,1} \oplus X^{1,0}$ mit $(y, x)\left(\begin{smallmatrix} d & \delta & 0 \\ 0 & -d & -\delta \end{smallmatrix}\right) = 0$ ein Element aus $\mathrm{H}^1(\mathrm{t}X)$. Dann ist

$yd = 0$ und $y\delta = xd$, und also repräsentiert y ein Element in $\mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(X^{-,*})$.

Repräsentiere $(y,x) \in X^{0,1} \oplus X^{1,0}$ die Null in $\mathrm{H}^1(\mathrm{t}X)$; i.e. gebe es ein $t \in X^{0,0}$ mit $(y,x) = (td, t\delta)$. Dann ist $y = td$, und also repräsentiert y die Null in $\mathrm{H}^1(X^{0,*})$, und somit auch in $\mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(X^{-,*})$.

Wohldefiniertheit f_3.

Repräsentiere $y \in X^{0,1}$ mit $yd = 0$ und $y\delta = ud$ für ein $u \in X^{1,0}$ ein Element in $\mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(X^{-,*})$. Dann ist $(-u\delta)\delta = 0$ und $(-u\delta)d = -ud\delta = -y\delta\delta = 0$, und also repräsentiert $-u\delta$ ein Element von $\mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(X^{-,*})$.

Zeigen wir die Unabhängigkeit des Bildes von der Wahl von u mit $ud = y\delta$. Sei also $ud = 0$. Dann ist $-u$ ein Element von $\mathrm{H}^0(X^{1,*})$, und somit verschwindet $-u\delta$ in $\mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(X^{-,*})$.

Repräsentiere $y \in X^{0,1}$ die Null in $\mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(X^{-,*})$. Dann ist $y = td$ für ein $t \in X^{0,0}$. Es folgt $y\delta = td\delta = (t\delta)d$, und somit dürfen wir y abbilden nach $-(t\delta)\delta = 0$.

Wohldefiniertheit f_4.

Repräsentiere $z \in X^{2,0}$ mit $zd = 0$ und $z\delta = 0$ ein Element in $\mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(X^{-,*})$. Dann ist $(0,0,z)\left(\begin{smallmatrix} d & \delta & 0 & 0 \\ 0 & -d & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & d & \delta \end{smallmatrix}\right) = 0$, und also repräsentiert $(0,0,z)$ ein Element von $\mathrm{H}^2(\mathrm{t}X)$.

Repräsentiere $z \in X^{2,0}$ die Null in $\mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(X^{-,*})$. Dann gibt es ein $u \in X^{1,0}$ mit $ud = 0$ und $u\delta = z$. Dann ist $(0,-u)\left(\begin{smallmatrix} d & \delta & 0 \\ 0 & -d & -\delta \end{smallmatrix}\right) = (0,0,z)$ im Bild des Differentials von $\mathrm{t}X$, und repräsentiert somit die Null in $\mathrm{H}^2(\mathrm{t}X)$.

(2) *Exaktheit bei* $\mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(X^{-,*})$.

Repräsentiere $x \in X^{1,0}$ mit $xd = 0$ und $x\delta = 0$ ein Element aus $\mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(X^{-,*})$. Werde es unter f_1 auf Null in $\mathrm{H}^1(\mathrm{t}X)$ abgebildet, i.e. gebe es ein $t \in X^{0,0}$ mit $(td, t\delta) = (0,x)$. Dann repräsentiert $x = t\delta$ die Null in $\mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(X^{-,*})$.

Exaktheit bei $\mathrm{H}^1(\mathrm{t}X)$.

Repräsentiere $x \in X^{1,0}$ mit $xd = 0$ und $x\delta = 0$ ein Element von $\mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(X^{-,*})$. Die Abbildung f_1 schickt es auf das von $(0,x)$ repräsentierte Element, welches unter f_2 auf 0 abgebildet wird.

Repräsentiere $(y,x) \in X^{0,1} \oplus X^{1,0}$ mit $(y,x)\left(\begin{smallmatrix} d & \delta & 0 \\ 0 & -d & -\delta \end{smallmatrix}\right) = 0$ ein Element aus $\mathrm{H}^1(\mathrm{t}X)$. Werde es unter f_2 auf Null in $\mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(X^{-,*})$ abgebildet, i.e. gebe es ein $t \in X^{0,0}$ mit $td = y$. Wir dürfen (y,x) durch $(y,x) - (td, t\delta) = (0, x - t\delta)$ ersetzen. Es ist $(x - t\delta)d = xd - t\delta d = y\delta - td\delta = 0$ und $(x - t\delta)\delta = 0$; was zeigt, daß $x - t\delta$ ein Element von $\mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(X^{-,*})$ repräsentiert; was wiederum zeigt, daß das von $(0, x - t\delta)$ repräsentierte Element im Bild von f_1 liegt.

Exaktheit bei $\mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(X^{-,*})$.

Repräsentiere $(y,x) \in X^{0,1} \oplus X^{1,0}$ mit $(y,x)\left(\begin{smallmatrix} d & \delta & 0 \\ 0 & -d & -\delta \end{smallmatrix}\right) = 0$ ein Element aus $\mathrm{H}^1(\mathrm{t}X)$. Die Abbildung f_2 schickt es auf das von y repräsentierte Element. Das in der Abbildung f_3 verwandte Element $u \in X^{1,0}$ kann gleich x gewählt werden. Somit schickt f_3 das von y repräsentierte Element auf das von $-x\delta = 0$ repräsentierte Element.

Repräsentiere $y \in X^{0,1}$ mit $yd = 0$ und $y\delta = ud$ für ein $u \in X^{1,0}$ ein Element in $\mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(X^{-,*})$. Werde es unter f_3 auf Null in $\mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(X^{-,*})$ abgebildet, i.e. sei $-u\delta = v\delta$ mit einem $v \in X^{1,0}$ mit $vd = 0$. Dann ist $(y, u+v)\left(\begin{smallmatrix} d & \delta & 0 \\ 0 & -d & -\delta \end{smallmatrix}\right) = 0$; was zeigt, daß $(y, u+v)$ ein Element in $\mathrm{H}^1(\mathrm{t}X)$ repräsentiert, was wiederum zeigt, daß das von y repräsentierte Element im Bild von f_2 liegt.

Exaktheit bei $\mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(X^{-,*})$.

Repräsentiere $y \in X^{0,1}$ mit $yd = 0$ und $y\delta = ud$ für ein $u \in X^{1,0}$ ein Element in $\mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(X^{-,*})$. Die Abbildung f_3 schickt es auf das von $-u\delta$ repräsentierte Element. Die Abbildung f_4 schickt dieses auf das von $(0,0,-u\delta)$ repräsentierte Element. Dies verschwindet aber in $\mathrm{H}^2(\mathrm{t}X)$, da $(y,u)\left(\begin{smallmatrix} d & \delta & 0 \\ 0 & -d & -\delta \end{smallmatrix}\right) = (0,0,-u\delta)$.

Repräsentiere $z \in X^{2,0}$ mit $zd = 0$ und $z\delta = 0$ ein Element in $\mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(X^{-,*})$. Werde es unter f_4 auf Null abgebildet, i.e. gebe es $(y,x) \in X^{0,1} \oplus X^{1,0}$ mit $(y,x)\left(\begin{smallmatrix} d & \delta & 0 \\ 0 & -d & -\delta \end{smallmatrix}\right) = (0,0,z)$. Dann repräsentiert y wegen $yd = 0$ und $y\delta = xd$ ein Element in $\mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(X^{-,*})$. Das Bild von y unter f_3 wird repräsentiert von $-x\delta$, i.e. von z. Somit liegt das von z repräsentierte Element im Bild von f_3.

(3) Wir beziehen uns auf die im zweiten Lemma in §4.2.3 konstruierte Sequenz. Wir sehen $\mathrm{E_I}(\delta/\beta /\!\!/ \gamma/\alpha)^{+k} \subseteq \mathrm{H}^k(\mathrm{t_I}X(\delta/\beta))$ als Teilmodul für $-\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \infty$. Elemente darin werden also repräsentiert durch Elemente aus $\mathrm{t_I}X(\delta/\beta)$.

Übereinstimmung von f_1 mit der Abbildung aus loc. cit.

Ein Element $(y, x) \in X^{0,1} \oplus X^{1,0}$, welches ein Element im dortigen ersten Term $\mathrm{E_I}(0/-3/\!\!/-1/-3)^{+1}$ repräsentiert, wird auf das von (y, x) repräsentierte Element im dortigen zweiten Term $\mathrm{E_I}(0/-3/\!\!/0/-3)^{+1}$ geschickt.

Die Interpretation des dortigen ersten Terms als $\mathrm{E_I}(0/-2/\!\!/-1/-3)^{+1}$ ändert am Repräsentanten nichts. Die Interpretation von $\mathrm{E_I}(0/-2/\!\!/-1/-3)^{+1}$ als Subquotient von $\mathrm{E_I}(-1/-2/\!\!/-1/-2)^{+1} = \mathrm{H}^1(\mathrm{t_I}X(-1/-2))$ schickt ein Element des letzteren, repräsentiert durch $x \in X^{1,0}$, auf das von $(0, x)$ repräsentierte Element des ersteren. Die Interpretation von $\mathrm{E_I}(-1/-2/\!\!/-1/-2)^{+1}$ als $\mathrm{H}^0(X^{1,*})$ ändert dann am Repräsentanten nichts. Der neuerliche Übergang zum Subquotienten $\mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(X^{-,*})$ beläßt ebenfalls den Repräsentanten.

Die Interpretation des dortigen zweiten Terms $\mathrm{E_I}(0/-3/\!\!/0/-3)^{+1}$ als $\mathrm{H}^1(\mathrm{t}X)$ ändert am Repräsentanten nichts.

Insgesamt kommt das von x repräsentierte Element auf das von $(0, x)$ repräsentierte Element.

Übereinstimmung von f_2 mit der Abbildung aus loc. cit.

Ein Element $(y, x) \in X^{0,1} \oplus X^{1,0}$, welches ein Element im dortigen zweiten Term $\mathrm{E_I}(0/-3/\!\!/0/-3)^{+1}$ repräsentiert, wird auf das von y repräsentierte Element im dortigen dritten Term $\mathrm{E_I}(0/-1/\!\!/0/-2)^{+1}$ geschickt.

Die Interpretation des dortigen zweiten Terms $\mathrm{E_I}(0/-3/\!\!/0/-3)^{+1}$ als $\mathrm{H}^1(\mathrm{t}X)$ ändert am Repräsentanten, wie gesagt, nichts.

Die Interpretation des dortigen dritten Terms als $\mathrm{E_I}(1/-1/\!\!/0/-2)^{+1}$ ändert am Repräsentanten nichts (da $X^{-1,2} = 0$). Die Interpretation von $\mathrm{E_I}(1/-1/\!\!/0/-2)^{+1}$ als Subquotienten von $\mathrm{E_I}(0/-1/\!\!/0/-1)^{+1}$ ändert am Repräsentanten ebensowenig wie dessen Interpretation als $\mathrm{H}^1(X^{0,*})$. Schließlich befinden wir uns noch in dessen Teilmodul $\mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(X^{-,*})$, was aber am Repräsentanten nichts ändert.

Insgesamt kommt das von (y, x) repräsentierte Element auf das von y repräsentierte Element.

Übereinstimmung von f_3 mit der Abbildung aus loc. cit.

Ein Element $y \in X^{0,1}$, welches ein Element im dortigen dritten Term $\mathrm{E_I}(0/-1/\!\!/0/-2)^{+1}$ repräsentiert, wird auf das von $(y\delta, 0) \in X^{1,1} \oplus X^{2,0}$ repräsentierte Element im dortigen vierten Term $\mathrm{E_I}(-1/-3/\!\!/-2/-4)^{+2}$ geschickt.

Die Interpretation des dortigen dritten Terms $\mathrm{E_I}(0/-1/\!\!/0/-2)^{+1}$ als $\mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(X^{-,*})$ ändert am Repräsentanten, wie gesagt, nichts.

Die Interpretation des dortigen vierten Terms $\mathrm{E_I}(-1/-3/\!\!/-2/-4)^{+2}$ als Subquotient von $\mathrm{E_I}(-2/-3/\!\!/-2/-3)^{+2}$ schickt ein von $z \in X^{0,2}$ repräsentiertes Element des letzteren auf das von $(0, z) \in X^{1,1} \oplus X^{2,0}$ repräsentierte Element des ersteren. Die Interpretation von $\mathrm{E_I}(-2/-3/\!\!/-2/-3)^{+2}$ als $\mathrm{H}^0(X^{2,*})$ ändert am Repräsentanten genausowenig wie der neuerliche Übergang zum Subquotienten $\mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(X^{-,*})$.

Bleibt die Frage zu klären, für welches z das Element $(y\delta, 0)$ und das Element $(0, z)$ dasselbe Element in $\mathrm{E_I}(-1/-3/\!\!/-2/-4)^{+2}$, i.e. in $\mathrm{H}^2(\mathrm{t_I}X(-1/-3))$ repräsentieren. Es ist $yd = u\delta$ für ein $u \in X^{0,1}$, da y ein Element in $\mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(X^{-,*})$ repräsentiert. Es repräsentiert $(ud, u\delta) \in X^{1,1} \oplus X^{2,0}$ die Null in $\mathrm{H}^2(\mathrm{t_I}X(-1/-3))$. Also repräsentieren $(y\delta, 0)$ und $(y\delta, 0) - (ud, u\delta) = (0, -u\delta)$ dasselbe Element. Wir können also $z := -u\delta$ nehmen.

Insgesamt kommt das von y repräsentierte Element also auf das von $-u\delta$ repräsentierte Element, sofern $y\delta = ud$.

Übereinstimmung von f_4 mit der Abbildung aus loc. cit.

Ein Element $(v, z) \in X^{1,1} \oplus X^{2,0}$, welches ein Element im dortigen vierten Term $\mathrm{E_I}(-1/-3/\!\!/-2/-4)^{+2}$ repräsentiert, wird auf das von $(0, v, z) \in X^{0,2} \oplus X^{1,1} \oplus X^{2,0}$ repräsentierte Element im dortigen fünften Term $\mathrm{E_I}(0/-3/\!\!/0/-4)^{+2}$ abgebildet.

Die Interpretation des dortigen dortigen vierten Terms $\mathrm{E_I}(-1/-3/\!\!/-2/-4)^{+2}$ als $\mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(X^{-,*})$ schickt ein von $z \in X^{2,0}$ repräsentiertes Element, wie gesagt, auf $(0, z) \in X^{1,1} \oplus X^{2,0}$.

Die Interpretation des dortigen fünften Terms $\mathrm{E_I}(0/-3/\!\!/0/-4)^{+2}$ als $\mathrm{H}^2(\mathrm{t}X)$ ändert am Repräsentanten nichts.

Insgesamt kommt das von z repräsentierte Element also auf das von $(0, 0, z)$ repräsentierte Element.

Wir haben nun die Wohldefiniertheit und Exaktheit der Fünftermsequenz aus der Aufgabenstellung zweimal gezeigt; einmal direkt mit $(1, 2)$ und einmal via (3).

Besser formulierte Lösungen zu (3) werden gerne entgegengenommen.

Aufgabe 82.

Sei $m \geqslant 0$.

Wir erinnern an die Notation $g_{[0,m]} \wedge j = g_0 \otimes \cdots \otimes g_{j-1} \otimes g_{j+1} \otimes \cdots \otimes g_m$, wobei $g_i \in G$.

Setze

$$\begin{array}{rcl} RG^{\otimes(m+1)} & \xrightarrow{\chi} & RG^{\otimes(m+2)} \\ g_{[0,m]} & \longmapsto & \sum\limits_{i \in [0,m]} (-1)^{im} g_{[m-i,m]}\alpha \otimes g_{[0,m-i]} \; . \end{array}$$

Für $m = 0$ ist zunächst

$$g\chi d \;=\; (g\alpha \otimes g)d \;=\; g - g\alpha \; .$$

Für $m \geqslant 1$ rechnen wir wie folgt. Sei $g_{[0,m]} \in RG^{\otimes(m+1)}$, bestehend aus $g_i \in G$.

$$\begin{array}{rl} & g_{[0,m]}d\chi + g_{[0,m]}\chi d \\ = & \sum\limits_{j \in [0,m]} (-1)^j (g_{[0,m]} \wedge j)\chi + \sum\limits_{i \in [0,m]} (-1)^{im} (g_{[m-i,m]}\alpha \otimes g_{[0,m-i]})d \\ = & \sum\limits_{j \in [0,m]} (-1)^j \sum\limits_{i \in [0,m-j-1]} (-1)^{i(m-1)} g_{[m-i,m]}\alpha \otimes (g_{[0,m-i]} \wedge j) \\ + & \sum\limits_{j \in [0,m]} (-1)^j \sum\limits_{i \in [m-j,m-1]} (-1)^{i(m-1)} \big(g_{[m-i-1,m]}\alpha \wedge (j-m+i+1)\big) \otimes g_{[0,m-i-1]} \\ + & \sum\limits_{i \in [0,m]} (-1)^{im} \sum\limits_{j \in [0,i]} (-1)^j (g_{[m-i,m]}\alpha \wedge j) \otimes g_{[0,m-i]} \\ + & \sum\limits_{i \in [0,m]} (-1)^{im} \sum\limits_{j \in [i+1,m+1]} (-1)^j g_{[m-i,m]}\alpha \otimes \big(g_{[0,m-i]} \wedge (j-i-1)\big) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i\in[0,m]} \sum_{j\in[0,m-i-1]} (-1)^{im+i+j} g_{[m-i,m]}\alpha \otimes (g_{[0,m-i]} \wedge j) \\
&+ \sum_{i\in[0,m-1]} \sum_{j\in[m-i,m]} (-1)^{im+i+j} \big(g_{[m-i-1,m]}\alpha \wedge (j-m+i+1)\big) \otimes g_{[0,m-i-1]} \\
&+ \sum_{i\in[0,m]} \sum_{j\in[0,i]} (-1)^{im+j} (g_{[m-i,m]}\alpha \wedge j) \otimes g_{[0,m-i]} \\
&+ \sum_{i\in[0,m]} \sum_{j\in[0,m-i]} (-1)^{im+i+j+1} g_{[m-i,m]}\alpha \otimes \big(g_{[0,m-i]} \wedge j\big) \\
&= \sum_{i\in[0,m]} \sum_{j\in[m-i+1,m]} (-1)^{im-m+i-1+j} \big(g_{[m-i,m]}\alpha \wedge (j-m+i)\big) \otimes g_{[0,m-i]} \\
&+ \sum_{i\in[0,m]} \sum_{j\in[0,i]} (-1)^{im+j} (g_{[m-i,m]}\alpha \wedge j) \otimes g_{[0,m-i]} \\
&+ \sum_{i\in[0,m]} (-1)^{im+i+m-i+1} g_{[m-i,m]}\alpha \otimes \big(g_{[0,m-i]} \wedge (m-i)\big) \\
&= \sum_{i\in[0,m]} \sum_{j\in[1,i]} (-1)^{im+1+j} \big(g_{[m-i,m]}\alpha \wedge j\big) \otimes g_{[0,m-i]} \\
&+ \sum_{i\in[0,m]} \sum_{j\in[0,i]} (-1)^{im+j} (g_{[m-i,m]}\alpha \wedge j) \otimes g_{[0,m-i]} \\
&+ \sum_{i\in[0,m]} (-1)^{im+m+1} g_{[m-i,m]}\alpha \otimes g_{[0,m-i-1]} \\
&= \sum_{i\in[0,m]} (-1)^{im} g_{[m-i+1,m]}\alpha \otimes g_{[0,m-i]} \\
&+ \sum_{i\in[0,m]} (-1)^{im+m+1} g_{[m-i,m]}\alpha \otimes g_{[0,m-i-1]} \\
&= \sum_{i\in[0,m]} (-1)^{im} g_{[m-i+1,m]}\alpha \otimes g_{[0,m-i]} \\
&+ \sum_{i\in[1,m+1]} (-1)^{im+1} g_{[m-i+1,m]}\alpha \otimes g_{[0,m-i]} \\
&= g_{[m+1,m]}\alpha \otimes g_{[0,m]} + (-1)^{(m+1)m+1} g_{[m-(m+1)+1,m]}\alpha \otimes g_{[0,m-(m+1)]} \\
&= g_{[0,m]} - g_{[0,m]}\alpha\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 83.

(1) *Betrachten wir* M^N. Wir haben Isomorphismen

$$\begin{aligned}
M^N &\simeq \mathrm{H}^0(N, M) \\
&= \mathrm{H}^0(\,_{RN}(\mathrm{Bar}_{N;R}, M)) \\
&\simeq \mathrm{H}^0(\,_{RN}(\mathrm{Bar}_{G;R}, M))\,.
\end{aligned}$$

Ein Element $m \in M^N$ kommt auf $(g \longmapsto g\alpha \cdot m = m)$. Multiplikation mit einem $\bar{x} \in \bar{G}$ macht daraus $(g \longmapsto x^- g \longmapsto m \longmapsto xm)$. Dies wiederum kommt durch Auswerten bei $g = 1$ auf das Element $xm \in M^N$. Insgesamt kommt m unter transportierter Multiplikation mit $\bar{x} \in \bar{G}$ also auf xm, wobei letzteres Produkt über die RG-Modulstruktur auf M erklärt ist.

Somit stimmt die transportierte $R\bar{G}$-Modulstruktur auf M^N mit der von der RG-Modulstruktur auf M induzierten überein.

Betrachten wir $\mathrm{H}^1(N,M)$. Wir haben einen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^1(N,M) & = & \mathrm{H}^1({}_{RN}(\mathrm{Bar}_{N;R},M)) \\ & \simeq & \mathrm{H}^1({}_{RN}(\mathrm{Bar}_{G;R},M)) \,. \end{array}$$

Sei $N \xrightarrow{\gamma} M$ ein 1-Cozykel. Das von diesem repräsentierte Element kommt auf

$$\big(g \otimes h \longmapsto (g\alpha)\cdot[(g\alpha)^- \cdot h\alpha]\gamma\big)\,.$$

Multiplikation mit einem $\bar{x} \in \bar{G}$ macht daraus

$$\big(g\otimes h \longmapsto x^- g\otimes x^- h \longmapsto (x^- g)\alpha\cdot[((x^- g)\alpha)^-(x^- h)\alpha]\gamma \longmapsto x\cdot(x^- g)\alpha\cdot[((x^- g)\alpha)^-\cdot(x^- h)\alpha]\gamma\big)\,.$$

Dieses wiederum kommt durch Einschränken auf $1\otimes N$ auf das von dem 1-Cozykel

$$\begin{array}{rcl} [n] & \longmapsto & x\cdot x^-\alpha\cdot[((x^-)\alpha)^-\cdot(x^- n)\alpha]\gamma \\ & = & x\cdot x^-\alpha\cdot[((x^-)\alpha)^-\cdot(n^x\cdot x^-)\alpha]\gamma \\ & = & x\cdot x^-\alpha\cdot[((x^-)\alpha)^-\cdot n^x\cdot(x^-)\alpha]\gamma \\ & = & x\cdot x^-\alpha\cdot[n^{x\cdot x^-\alpha}\cdot((x^-)\alpha)^-\cdot(x^-)\alpha]\gamma \\ & = & x\cdot x^-\alpha\cdot[n^{x\cdot x^-\alpha}]\gamma \\ & = & x\cdot\big([n^x]\gamma+(n^x-1)\cdot[x^-\alpha]\gamma\big) \\ & = & x\cdot[n^x]\gamma+(n-1)\cdot x\cdot[x^-\alpha]\gamma \end{array}$$

repräsentierte Element. Nun ist $[n]\longmapsto(n-1)\cdot x\cdot[x^-\alpha]\gamma$ ein 1-Corand. Somit erhalten wir, daß das Bild von γ unter der Multiplikation mit x von

$$\big(\,[n]\longmapsto x\cdot[n^x]\gamma\,\big)$$

repräsentiert wird.

(2) Sei $X \in \mathrm{CC}(RG\text{-Mod})$ mit $X_{i,j}=0$ falls $i<0$ oder $j<0$. Die Vorzeichenregel in seinem Totalkomplex sei wie folgt.

$$\mathrm{t}X = \Big(\cdots \longrightarrow X_{0,3}\oplus X_{1,2}\oplus X_{2,1}\oplus X_{3,0} \xrightarrow{\Delta=\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ \delta & -d & 0 \\ 0 & -\delta & d \\ 0 & 0 & \delta\end{pmatrix}} X_{0,2}\oplus X_{1,1}\oplus X_{2,0} \xrightarrow{\Delta=\begin{pmatrix} d & 0 \\ \delta & -d \\ 0 & -\delta\end{pmatrix}} X_{0,1}\oplus X_{1,0} \xrightarrow{\Delta=\begin{pmatrix} d \\ \delta\end{pmatrix}} X_{0,0}\Big)$$

In anderen Worten, für $m\geqslant 1$ und $(x_j)_{j\in[0,m]}$ mit $x_j\in X_{j,m-j}$ sei

$$(x_i)_{i\in[0,m]}\Delta \;=\; \big((-1)^i(x_i d + x_{i+1}\delta)\big)_{i\in[0,m-1]}$$

Wir verwenden die Schreibweise $g_{[a,b]} = g_a\otimes g_{a+1}\otimes\cdots\otimes g_b$, und analog $\bar{g}_{[a,b]}=\bar{g}_a\otimes\bar{g}_{a+1}\otimes\cdots\otimes\bar{g}_b$. Es ist

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{t}(\mathrm{Bar}_{\bar{G};R}\otimes_R \mathrm{Bar}_{G;R}) & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Bar}_{G;R} \\ \bar{g}_{[0,k]}\otimes h_{[0,m-k]} & \longmapsto & \begin{cases} h_{[0,m]} & \text{falls } k=0 \\ 0 & \text{falls } k\geqslant 1 \end{cases} \end{array}$$

ein RG-linearer Morphismus von Komplexen, der die Identität auf R fortsetzt.

Wir behaupten, daß

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Bar}_{G;R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{t}(\mathrm{Bar}_{\bar{G};R}\otimes_R \mathrm{Bar}_{G;R}) \\ g_{[0,m]} & \longmapsto & ((-1)^{i(i-1)/2}\bar{g}_{[0,i]}\otimes_R g_{[i,m]})_{i\in[0,m]} \end{array}$$

ein RG-linearer Morphismus von Komplexen ist, der die Identität auf R fortsetzt. Da g_0 auf $\bar{g}_0\otimes g_0$ kommt, ist letzteres klar.

Ferner ist für $m \geqslant 1$

$$
\begin{array}{cl}
 & g_{[0,m]}d\varphi \\
= & \sum_{j\in[0,m]}(-1)^j(g_{[0,m]}\wedge j)\varphi \\
= & \sum_{j\in[0,m]}(-1)^j\left((-1)^{i(i-1)/2}\cdot\left\{\begin{array}{ll} \bar g_{[0,i]}\otimes(g_{[i,m]}\wedge(j-i)) & \text{für } i\in[0,j-1] \\ (\bar g_{[0,i+1]}\wedge j)\otimes g_{[i+1,m]} & \text{für } i\in[j,m-1] \end{array}\right\}\right)_{i\in[0,m-1]} \\
= & \left((-1)^{i(i-1)/2}\cdot\sum_{j\in[0,m]}(-1)^j\left\{\begin{array}{ll} \bar g_{[0,i]}\otimes(g_{[i,m]}\wedge(j-i)) & \text{für } i\in[0,j-1] \\ (\bar g_{[0,i+1]}\wedge j)\otimes g_{[i+1,m]} & \text{für } i\in[j,m-1] \end{array}\right.\right)_{i\in[0,m-1]} \\
= & \Big((-1)^{i(i-1)/2}\Big(\sum_{j\in[i+1,m]}(-1)^j\bar g_{[0,i]}\otimes(g_{[i,m]}\wedge(j-i))+\sum_{j\in[0,i]}(-1)^j(\bar g_{[0,i+1]}\wedge j)\otimes g_{[i+1,m]}\Big)\Big)_{i\in[0,m-1]} \\
= & \Big((-1)^{i(i-1)/2}\Big(\sum_{j\in[1,m-i]}(-1)^{j+i}\bar g_{[0,i]}\otimes(g_{[i,m]}\wedge j)+\sum_{j\in[0,i]}(-1)^j(\bar g_{[0,i+1]}\wedge j)\otimes g_{[i+1,m]}\Big)\Big)_{i\in[0,m-1]} \\
= & \Big((-1)^{i(i+1)/2}\Big(\sum_{j\in[1,m-i]}(-1)^{j}\bar g_{[0,i]}\otimes(g_{[i,m]}\wedge j)+\sum_{j\in[0,i]}(-1)^{i+j}(\bar g_{[0,i+1]}\wedge j)\otimes g_{[i+1,m]}\Big)\Big)_{i\in[0,m-1]}
\end{array}
$$

sowie

$$
\begin{array}{cl}
 & g_{[0,m]}\varphi\Delta \\
= & \big((-1)^{i(i-1)/2}\bar g_{[0,i]}\otimes g_{[i,m]}\big)_{i\in[0,m]}\,\Delta \\
= & \big((-1)^i((-1)^{i(i-1)/2}\,(\bar g_{[0,i]}\otimes g_{[i,m]})d+(-1)^{(i+1)i/2}(\bar g_{[0,i+1]}\otimes g_{[i+1,m]})\delta)\big)_{i\in[0,m-1]} \\
= & \Big((-1)^i((-1)^{i(i-1)/2}\Big(\sum_{j\in[0,m-i]}(-1)^j\bar g_{[0,i]}\otimes(g_{[i,m]}\wedge j)) \\
 & \qquad\qquad +(-1)^{(i+1)i/2}(\sum_{j\in[0,i+1]}(-1)^j(\bar g_{[0,i+1]}\wedge j)\otimes g_{[i+1,m]})\Big)\Big)_{i\in[0,m-1]} \\
= & \Big((-1)^{i(i+1)/2}\Big(\sum_{j\in[0,m-i]}(-1)^j\bar g_{[0,i]}\otimes(g_{[i,m]}\wedge j) \\
 & \qquad\qquad +\sum_{j\in[0,i+1]}(-1)^{i+j}(\bar g_{[0,i+1]}\wedge j)\otimes g_{[i+1,m]}\Big)\Big)_{i\in[0,m-1]} \\
= & \Big((-1)^{i(i+1)/2}\Big(\sum_{j\in[1,m-i]}(-1)^j\bar g_{[0,i]}\otimes(g_{[i,m]}\wedge j)+\sum_{j\in[0,i]}(-1)^{i+j}(\bar g_{[0,i+1]}\wedge j)\otimes g_{[i+1,m]}\Big)\Big)_{i\in[0,m-1]}\ .
\end{array}
$$

Somit ist in der Tat stets $d\varphi = \varphi\Delta$.

(3) Sei $X \in \operatorname{Ob} R\bar G$-Mod. Sei $Y \in \operatorname{Ob} RG$-Mod. Es genügt zu zeigen, daß

$$
\begin{array}{rcl}
{}_{R\bar G}(X,\,{}_{RN}(Y,M)) & \longrightarrow & {}_{RG}(X\otimes_R Y, M) \\
\varphi & \longmapsto & (x\otimes y\longmapsto y(x\varphi)) \\
(x\longmapsto (y\longmapsto (x\otimes y)\psi)) & \longmapsfrom & \psi
\end{array}
$$

ein in X und Y natürlicher Isomorphismus von R-Moduln ist.

Wohldefiniertheit $\longmapsto$. Zu zeigen ist die RG-Linearität des Bildes von φ. Sei $g \in G$. Es kommt

$$
\begin{array}{rcl}
g(x\otimes y) & = & gx\otimes gy \\
 & = & \bar g x\otimes gy \\
 & \longmapsto & (gy)((\bar g x)\varphi) \\
 & = & (gy)(\bar g(x\varphi)) \\
 & = & g\cdot(g^-(gy))(x\varphi) \\
 & = & g\cdot y(x\varphi)\ .
\end{array}
$$

Wohldefiniertheit $\longmapsfrom$. Zu zeigen ist die $R\bar G$-Linearität der äußeren Abbildung und die RN-Linearität der inneren Abbildung des Bildes von ψ.

Sei zum einen $\bar g \in \bar G$ gegeben. Es wird

$$
\begin{array}{rcl}
\bar g x & \longmapsto & \big(y\longmapsto(\bar g x\otimes y)\psi\big) \\
 & = & \big(y\longmapsto(gx\otimes y)\psi\big) \\
 & = & \big(y\longmapsto(g(x\otimes g^- y))\psi\big) \\
 & = & \big(y\longmapsto g((x\otimes g^- y)\psi)\big) \\
 & = & g\big(y\longmapsto(x\otimes y)\psi\big)\ .
\end{array}
$$

Seien zum anderen $x \in X$ und $n \in N$ gegeben. Es wird

$$\begin{array}{rcl} ny & \longmapsto & (x \otimes ny)\psi \\ & = & n((n^- x \otimes y)\psi) \\ & = & n((x \otimes y)\psi)\ . \end{array}$$

Es invertieren sich $\longmapsto$ und $\longleftarrow\!\!\!\dashv$ gegenseitig.

Bleibt uns, die Natürlichkeit von $\longmapsto$ zu zeigen. Sei $X' \xrightarrow{\xi} X$ eine $R\bar{G}$-lineare Abbildung. Sei $Y' \xrightarrow{\eta} Y$ eine RN-lineare Abbildung. Zum einen erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} \varphi & = & \big(x \longmapsto (y \longmapsto y(x\varphi))\big) \\ & \longmapsto & \big(x' \longmapsto (y' \longmapsto y'\eta(x'\xi\varphi))\big) \\ & \longmapsto & \big(x' \otimes y' \longmapsto y'\eta(x'\xi\varphi)\big)\ . \end{array}$$

Zum anderen erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} \varphi & \longmapsto & \big(x \otimes y \longmapsto y(x\varphi)\big) \\ & \longmapsto & \big(x' \otimes y' \longmapsto y'\eta(x'\xi\varphi)\big)\ , \end{array}$$

was dasselbe ist.

(4) (i) Wir haben R-lineare Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(\tilde{D}^{-,*}) & \simeq & \mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(D^{-,*}) \\ & = & \mathrm{H}^1\mathrm{H}^0\Big({}_{R\bar{G}}(\mathrm{Bar}^-_{\bar{G};R},\ {}_{RN}(\mathrm{Bar}^*_{G;R}, M))\Big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^1\mathrm{H}^0\Big({}_{R\bar{G}}(\mathrm{Bar}^-_{\bar{G};R},\ {}_{RN}(\mathrm{Bar}^*_{N;R}, M))\Big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^1\Big({}_{R\bar{G}}(\mathrm{Bar}^-_{\bar{G};R},\ \mathrm{H}^0\ {}_{RN}(\mathrm{Bar}^*_{N;R}, M))\Big) \\ & = & \mathrm{H}^1(\bar{G}, \mathrm{H}^0(N, M)) \\ & \simeq & \mathrm{H}^1(\bar{G}, M^N)\ . \end{array}$$

Diese wollen wir elementweise nachvollziehen.
In der einen Richtung erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^1(\bar{G}, M^N) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(\tilde{D}^{-,*}) \\ \gamma & \longmapsto & (\bar{g} \otimes \bar{h} \otimes k \longmapsto g \cdot [g^- h]\gamma)\ . \end{array}$$

In der anderen Richtung erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(\tilde{D}^{-,*}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^1(\bar{G}, M^N) \\ y & \longmapsto & ([\bar{g}] \longmapsto (\bar{1} \otimes \bar{g} \otimes 1)y)\ . \end{array}$$

(ii) Dank (2) haben wir haben R-lineare Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^1(\mathrm{t}\tilde{D}) & = & \mathrm{H}^1\mathrm{t}\Big({}_{RG}\big(\mathrm{Bar}^-_{\bar{G};R} \otimes_R \mathrm{Bar}^*_{G;R},\ M\big)\Big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^1\Big({}_{RG}\big(\mathrm{t}(\mathrm{Bar}^-_{\bar{G};R} \otimes_R \mathrm{Bar}^*_{G;R}),\ M\big)\Big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^1(\,{}_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R},\ M)) \\ & = & \mathrm{H}^1(G, M)\ . \end{array}$$

In der einen Richtung erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^1(G, M) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^1(\mathrm{t}\tilde{D}) \\ \gamma & \longmapsto & \big(\bar{g} \otimes h \otimes k \longmapsto h \cdot [h^- k]\gamma\ ,\ \ 0\,\big)\ . \end{array}$$

In der anderen Richtung erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^1(\mathrm{t}\tilde{D}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^1(G,M) \\ (y,x) & \longmapsto & \big([g] \longmapsto (\bar{1}\otimes 1\otimes g)y + (\bar{1}\otimes \bar{g}\otimes g)x\big)\ . \end{array}$$

(iii) Wir haben R-lineare Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(\tilde{D}^{-,*}) & \simeq & \mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(D^{-,*}) \\ & = & \mathrm{H}^0\mathrm{H}^1\Big({}_{R\bar{G}}(\mathrm{Bar}^-_{\bar{G};R},\ {}_{RN}(\mathrm{Bar}^*_{G;R},M))\Big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^0\mathrm{H}^1\Big({}_{R\bar{G}}(\mathrm{Bar}^-_{\bar{G};R},\ {}_{RN}(\mathrm{Bar}^*_{N;R},M))\Big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^0\Big({}_{R\bar{G}}(\mathrm{Bar}^-_{\bar{G};R},\ \mathrm{H}^1\ {}_{RN}(\mathrm{Bar}^*_{N;R},M))\Big) \\ & = & \mathrm{H}^0(\bar{G},\mathrm{H}^1(N,M)) \\ & \simeq & \mathrm{H}^1(N,M)^{\bar{G}}\ . \end{array}$$

In der einen Richtung erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^1(N,M)^{\bar{G}} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(\tilde{D}^{-,*}) \\ \gamma & \longmapsto & \left(\begin{array}{rcl} \bar{g}\otimes h\otimes k & \longmapsto & g\cdot(g^-h)\alpha\cdot[((g^-h)\alpha)^-\cdot(g^-k)\alpha]\gamma \\ & = & g\big([(g^-k)\alpha]\gamma-[(g^-h)\alpha]\gamma\big) \end{array}\right)\ . \end{array}$$

In der anderen Richtung erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(\tilde{D}^{-,*}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^1(N,M)^{\bar{G}} \\ y & \longmapsto & \big([n] \longmapsto (\bar{1}\otimes 1\otimes n)y\big)\ . \end{array}$$

(iv) Wir haben R-lineare Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(\tilde{D}^{-,*}) & \simeq & \mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(D^{-,*}) \\ & = & \mathrm{H}^2\mathrm{H}^0\Big({}_{R\bar{G}}(\mathrm{Bar}^-_{\bar{G};R},\ {}_{RN}(\mathrm{Bar}^*_{G;R},M))\Big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^2\mathrm{H}^0\Big({}_{R\bar{G}}(\mathrm{Bar}^-_{\bar{G};R},\ {}_{RN}(\mathrm{Bar}^*_{N;R},M))\Big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^2\Big({}_{R\bar{G}}(\mathrm{Bar}^-_{\bar{G};R},\ \mathrm{H}^0\ {}_{RN}(\mathrm{Bar}^*_{N;R},M))\Big) \\ & = & \mathrm{H}^2(\bar{G},\mathrm{H}^0(N,M)) \\ & \simeq & \mathrm{H}^2(\bar{G},M^N)\ . \end{array}$$

In der einen Richtung erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^2(\bar{G},M^N) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(\tilde{D}^{-,*}) \\ \eta & \longmapsto & \big(\bar{g}\otimes\bar{h}\otimes\bar{k}\otimes\ell \longmapsto g\cdot[g^-h,g^-k]\eta\big)\ . \end{array}$$

In der anderen Richtung erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(\tilde{D}^{-,*}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^2(\bar{G},M^N) \\ z & \longmapsto & ([\bar{g},\bar{h}] \longmapsto (\bar{1}\otimes\bar{g}\otimes\overline{gh}\otimes 1)z)\ . \end{array}$$

(v) Dank (2) haben wir haben R-lineare Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^2(\mathrm{t}\tilde{D}) & = & \mathrm{H}^2\mathrm{t}\Big({}_{RG}\big(\mathrm{Bar}^-_{\bar{G};R}\otimes_R\mathrm{Bar}^*_{G;R},\ M\big)\Big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^2\Big({}_{RG}\big(\mathrm{t}(\mathrm{Bar}^-_{\bar{G};R}\otimes_R\mathrm{Bar}^*_{G;R}),\ M\big)\Big) \\ & \simeq & \mathrm{H}^2(\ {}_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R},\ M)) \\ & = & \mathrm{H}^2(G,M)\ . \end{array}$$

In der einen Richtung erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^2(G,M) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^2(\mathrm{t}\tilde{D}) \\ \eta & \longmapsto & \big(\bar{g}\otimes h\otimes k\otimes \ell \longmapsto h\cdot[h^-k, h^-\ell]\eta\big)\ . \end{array}$$

In der anderen Richtung erhalten wir mit (2)

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^2(\mathrm{t}\tilde{D}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^2(G,M) \\ (v,w,z) & \longmapsto & \left(\begin{array}{rcl} [g,h] & \longmapsto & 1\otimes g\otimes gh \\ & \longmapsto & (\bar{1}\otimes 1\otimes g\otimes gh,\ \bar{1}\otimes\bar{g}\otimes g\otimes gh,\ -\bar{1}\otimes\bar{g}\otimes\overline{gh}\otimes gh) \\ & \longmapsto & (\bar{1}\otimes 1\otimes g\otimes gh)v + (\bar{1}\otimes\bar{g}\otimes g\otimes gh)w - (\bar{1}\otimes\bar{g}\otimes\overline{gh}\otimes gh)z \end{array}\right)\ . \end{array}$$

(5) (i) Wir komponieren

$$\begin{array}{rcccccccl} \mathrm{H}^1(\bar{G},M^N) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^1\mathrm{H}^0(\tilde{D}^{*,-}) & \xrightarrow{f_1} & \mathrm{H}^1(\mathrm{t}\tilde{D}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^1(G,M) \\ \gamma & \longmapsto & (\bar{g}\otimes\bar{h}\otimes k\longmapsto g\cdot[g^-h]\gamma) & \longmapsto & (0,\ \bar{g}\otimes\bar{h}\otimes k\longmapsto g\cdot[g^-h]\gamma) & \longmapsto & ([g]\longmapsto[g]\gamma)\ . \end{array}$$

(ii) Wir komponieren

$$\begin{array}{rcccccccl} \mathrm{H}^1(G,M) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^1(\mathrm{t}\tilde{D}) & \xrightarrow{f_2} & \mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(\tilde{D}^{-,*}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^1(N,M)^{\bar{G}} \\ \gamma & \longmapsto & \big(\bar{g}\otimes h\otimes k\longmapsto h\cdot[h^-k]\gamma,\ 0\big) & \longmapsto & \big(\bar{g}\otimes h\otimes k\longmapsto h\cdot[h^-k]\gamma\big) & \longmapsto & ([n]\longmapsto[n]\gamma) \end{array}$$

(iii) Sei $\gamma\in\mathrm{H}^1(N,M)^{\bar{G}}$. Wir erinnern daran, daß es eine Abbildung $G\xrightarrow{t}M$, $g\longmapsto[g]t$ so gibt, daß für alle $g\in G$ gilt, daß

$$(*)\qquad g\cdot[n^g]\gamma-[n]\gamma \;=\; n\cdot[g]t-[g]t \;=\; (n-1)\cdot[g]t$$

für alle $n\in N$.

Wir wählen wir solche Werte für t für $g\in G$ mit $g^-\alpha=1$; wähle insbesondere $[1]t=0$. Wir setzen sodann für ein allgemeines $g\in G$

$$[g]t \;:=\; [g(g^-\alpha)]t-g\cdot[g^-\alpha]\gamma\ .$$

Mit diesem t gilt in der Tat

$$\begin{array}{rcl} (n-1)[g]t & = & (n-1)\,([g(g^-\alpha)]t-g\cdot[g^-\alpha]\gamma) \\ & = & g(g^-\alpha)\cdot[n^{g(g^-\alpha)}]\gamma-[n]\gamma-g(n^g-1)\cdot[g^-\alpha]\gamma \\ & = & g\,([n^g]\gamma+(n^g-1)\cdot[g^-\alpha]\gamma)-[n]\gamma-g(n^g-1)\cdot[g^-\alpha]\gamma \\ & = & g[n^g]\gamma-[n]\gamma\ . \end{array}$$

In anderen Worten, das so teilweise gewählte und teilweise konstruierte t erfüllt die eingangs genannte Forderung $(*)$ an t.

Ferner ist mit diesem t für $g\in G$ und $n\in N$

$$\begin{array}{rcl} [gn]t & = & [gn((gn)^-\alpha)]t-gn\cdot[(gn)^-\alpha]\gamma \\ & = & [gn(n^-g^-\alpha)]t-gn\cdot[(n^-g^-)\alpha]\gamma \\ & = & [g(g^-\alpha)]t-gn\cdot[n^-(g^-)\alpha]\gamma \\ & = & [g(g^-\alpha)]t-g\cdot[g^-\alpha]\gamma-gn\cdot[n^-]\gamma \\ & = & [g(g^-\alpha)]t-g\cdot[g^-\alpha]\gamma+g\cdot[n]\gamma \\ & = & [g]t+g\cdot[n]\gamma\ . \end{array}$$

Insbesondere ist $t|_N=\gamma$.

Zunächst wird

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^1(N,M)^{\bar{G}} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^0\mathrm{H}^1(\tilde{D}^{-,*}) \\ \gamma & \longmapsto & \underbrace{\Big(\bar{g}\otimes h\otimes k \longmapsto g\big([(g^- k)\alpha]\gamma - [(g^- h)\alpha]\gamma\big)\Big)}_{=:\, y\,\in\, \tilde{D}^{0,1}} \ . \end{array}$$

Um y unter f_3 abzubilden, brauchen wir zunächst ein $u \in \tilde{D}^{0,1}$ mit $ud = y\delta$. Wir behaupten, daß dies für die auf einem RG-linearen Erzeugendensystem als

$$\begin{array}{ccccccl} R\bar{G} & \otimes_R & R\bar{G} & \otimes_R & RG & \xrightarrow{u} & M \\ \bar{g} & \otimes & \bar{h} & \otimes & 1 & \longmapsto & h\cdot[h^-\alpha]\gamma - g\cdot[g^-\alpha]\gamma + g\cdot[g^-h]t \end{array}$$

definierte RG-lineare Abbildung zutrifft. Für Wohldefiniertheit bleibt zu zeigen, daß für $n \in N$ erstens die Ersetzung von g durch ng das Bild nicht ändert, und zweitens auch die Ersetzung von h durch hn das Bild nicht ändert.

Ersteres liefert

$$\begin{array}{rl} & h\cdot[h^-\alpha]\gamma - ng\cdot[(g^-n^-)\alpha]\gamma + ng\cdot[(g^-n^-)h]t \\ = & h\cdot[h^-\alpha]\gamma - ng\cdot[(n^g)^-\cdot g^-\alpha]\gamma + ng\cdot[g^-h(n^h)^-]t \\ = & h\cdot[h^-\alpha]\gamma - ng\cdot(n^g)^-\cdot[g^-\alpha]\gamma - ng\cdot[(n^g)^-]\gamma + ng\cdot[g^-h]t + ng\cdot g^-h\cdot[(n^h)^-]\gamma \\ = & h\cdot[h^-\alpha]\gamma - g\cdot[g^-\alpha]\gamma - gn^g\cdot[(n^g)^-]\gamma + gn^g\cdot[g^-h]t + hn^h\cdot[(n^h)^-]\gamma \\ = & h\cdot[h^-\alpha]\gamma - g\cdot[g^-\alpha]\gamma + g\cdot[n^g]\gamma + g(n^g\cdot[g^-h]t - [g^-h]t) + g\cdot[g^-h]t - h\cdot[n^h]\gamma \\ = & h\cdot[h^-\alpha]\gamma - g\cdot[g^-\alpha]\gamma + g\cdot[n^g]\gamma + g(g^-h\cdot[(n^g)^{g^-h}]\gamma - [n^g]\gamma) + g\cdot[g^-h]t - h\cdot[n^h]\gamma \\ = & h\cdot[h^-\alpha]\gamma - g\cdot[g^-\alpha]\gamma + g\cdot[n^g]\gamma + h\cdot[n^h]\gamma - g\cdot[n^g]\gamma + g\cdot[g^-h]t - h\cdot[n^h]\gamma \\ = & h\cdot[h^-\alpha]\gamma - g\cdot[g^-\alpha]\gamma + g\cdot[g^-h]t\ , \end{array}$$

wie gewünscht.

Zweiteres liefert

$$\begin{array}{rl} & hn\cdot[(n^-h^-)\alpha]\gamma - g\cdot[g^-\alpha]\gamma + g\cdot[g^-hn]t \\ = & hn\cdot[n^-\cdot h^-\alpha]\gamma - g\cdot[g^-\alpha]\gamma + g\cdot[g^-h]t + g\cdot g^-h\cdot[n]\gamma \\ = & hn\cdot[n^-]\gamma + hn\cdot n^-\cdot[h^-\alpha]\gamma - g\cdot[g^-\alpha]\gamma + g\cdot[g^-h]t + h\cdot[n]\gamma \\ = & -h\cdot[n]\gamma + h\cdot[h^-\alpha]\gamma - g\cdot[g^-\alpha]\gamma + g\cdot[g^-h]t + h\cdot[n]\gamma \\ = & h\cdot[h^-\alpha]\gamma - g\cdot[g^-\alpha]\gamma + g\cdot[g^-h]t\ , \end{array}$$

wie gewünscht.

Schreiben wir nun das allgemeine Bild von u aus. Es wird

$$\begin{array}{rcl} (\bar{g}\otimes\bar{h}\otimes k)u & = & k\cdot(\overline{k^-g}\otimes\overline{k^-h}\otimes 1)u \\ & = & k(k^-h\cdot[(h^-k)\alpha]\gamma - k^-g\cdot[(g^-k)\alpha]\gamma + k^-g[g^-h]t) \\ & = & h\cdot[(h^-k)\alpha]\gamma - g\cdot[(g^-k)\alpha]\gamma + g\cdot[g^-h]t\ . \end{array}$$

Berechnen wir ud. Es wird

$$\begin{array}{rl} & (\bar{g}\otimes\bar{h}\otimes k\otimes\ell)ud \\ = & (\bar{g}\otimes\bar{h}\otimes\ell)u - (\bar{g}\otimes\bar{h}\otimes k)u \\ = & \big(h\cdot[(h^-\ell)\alpha]\gamma - g\cdot[(g^-\ell)\alpha] + g\cdot[g^-h]t\big) - \big(h\cdot[(h^-k)\alpha]\gamma - g\cdot[(g^-k)\alpha] + g\cdot[g^-h]t\big) \\ = & +h\cdot[(h^-\ell)\alpha]\gamma - g\cdot[(g^-\ell)\alpha] - h\cdot[(h^-k)\alpha]\gamma + g\cdot[(g^-k)\alpha]\ . \end{array}$$

Berechnen wir $y\delta$. Es wird

$$\begin{array}{rl} & (\bar{g}\otimes\bar{h}\otimes k\otimes\ell)y\delta \\ = & (\bar{h}\otimes k\otimes\ell)y - (\bar{g}\otimes k\otimes\ell)y \\ = & h\big([(h^-\ell)\alpha]\gamma - [(h^-k)\alpha]\gamma\big) - g\big([(g^-\ell)\alpha]\gamma - [(g^-k)\alpha]\gamma\big) \\ = & +h\cdot[(h^-\ell)\alpha]\gamma - h\cdot[(h^-k)\alpha]\gamma - g\cdot[(g^-\ell)\alpha]\gamma + g\cdot[(g^-k)\alpha]\ . \end{array}$$

Da die Bilder unter ud und $y\delta$ übereinstimmen, zeigt dies die Behauptung.

Das Bild von y unter f_4 ist nun gegeben durch $-u\delta$, welches seinerseits wieder auf

$$\begin{array}{rcl} \bar{G}\times\bar{G} & \longrightarrow & M^N \\ [\bar{g},\bar{h}] & \longmapsto & -(\bar{1}\otimes\bar{g}\otimes\overline{gh}\otimes 1)(u\delta) \\ & = & -(\bar{g}\otimes\overline{gh}\otimes 1)u + (\bar{1}\otimes\overline{gh}\otimes 1) - (\bar{1}\otimes\bar{g}\otimes 1)u \\ & = & -(gh\cdot[(gh)^-\alpha]\gamma - g\cdot[g^-\alpha] + g\cdot[h]t) + (gh\cdot[(gh)^-\alpha]\gamma + [gh]t) - (g\cdot[g^-\alpha]\gamma + [g]t) \\ & = & -g\cdot[h]t + [gh]t - [g]t \end{array}$$

in $\mathrm{H}^2(\bar{G}, M^N)$ kommt.

(iv) Wir komponieren

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^2(\bar{G}, M^N) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^2\mathrm{H}^0(\tilde{D}^{*,-}) \\ \eta & \longmapsto & \big(\bar{g}\otimes\bar{h}\otimes\bar{k}\otimes\ell \mapsto g\cdot[g^-h, g^-k]\eta\big) \\ & & \\ & \xrightarrow{f_4} & \mathrm{H}^2(\mathrm{t}\tilde{D}) \\ & \longmapsto & \big(0,\ 0,\ \underbrace{\bar{g}\otimes\bar{h}\otimes\bar{k}\otimes\ell \mapsto g\cdot[g^-h, g^-k]\eta}_{=z}\big) \\ & & \\ & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^2(G, M) \\ & \longmapsto & ([g,h] \mapsto -(\bar{1}\otimes\bar{g}\otimes\overline{gh}\otimes gh)z = -[g,h]\eta)\ . \end{array}$$

Aufgabe 84.

(1) Wir haben eine Inklusion $X^N \xrightarrow{iX} X$ von RG-Moduln, natürlich in X.

Sei Y ein $R\bar{G}$-Modul, sei X ein RG-Modul. Wir setzen

$$\begin{array}{rcl} {}_{R\bar{G}}(Y, X^N) & \longrightarrow & {}_{RG}(Y, X) \\ f & \longmapsto & f(iX)\ . \end{array}$$

Dies ist injektiv. Es ist surjektiv, weil eine RG-lineare Abbildung f' von Y nach X ihr Bild in X^N hat, da sich für $y \in Y$ und $n \in N$ ergibt, daß $n(yf') = (ny)f' = yf'$.

Zeigen wir noch die Natürlichkeit in Y und X. Sei $Y' \xrightarrow{v} Y$ ein Morphismus von $R\bar{G}$-Moduln, sei $X \xrightarrow{u} X'$ ein Morphismus von RG-Moduln. Zum einen kommt der Morphismus $Y \xrightarrow{f} X^N$ von $R\bar{G}$-Moduln auf $v(f(iX))u$, zum anderen auf $(vfu^N)(iX')$. Da aber $(iX)u = u^N(iX')$, stimmen diese beiden Resultate überein.

Ferner bringt der Funktor $\dot{F}$ kurz exakte Sequenzen in kurz exakte Sequenzen, da er die unterliegende Sequenz abelscher Gruppen beläßt.

(2) Zu zeigen ist, daß ${}_T(-, UI)$ exakt ist; cf. Aufgabe 18.(5). Nach Voraussetzung ist

$${}_T(-, UI) \;\simeq\; {}_S(V(-), I) \;=\; {}_S(-, I)\circ V.$$

Letzterer Funktor ist exakt als Kompositum zweier exakter Funktoren.

(3) Sei X ein RG-Modul. Wir haben zu zeigen, daß eine injektive Auflösung I von X eine (F, F')-azyklische Auflösung ist. Sei $k \geqslant 0$. Es ist I^k als injektiver Modul sowohl F- als auch $(F'\circ F)$-azyklisch. Wegen (1) können wir (2) anwenden und erhalten, daß FI^k ein injektiver und insbesondere F'-azyklischer $R\bar{G}$-Modul ist. Cf. zweites Beispiel in §4.3.

Aufgabe 85.

(1) Die zueinander inversen Bijektionen

$$\begin{array}{rcl} X^N & \longleftrightarrow & {}_{RN}(R,X) \\ x & \longmapsto & (1 \longmapsto x) \\ 1f & \longleftarrow\!\shortmid & f \end{array}$$

sind $R\bar{G}$-linear.

(2) Seien $A \longrightarrow I$ und $A' \longrightarrow I'$ Quasiisomorphismen in injektive Auflösungen wie im zweiten Lemma in §4.3 beschrieben. Gemäß loc. cit. erhalten wir auch Quasiisomorphismen ${}_{RN}(R,A) \longrightarrow {}_{RN}(R,I)$ und ${}_{RN}(R,A') \longrightarrow {}_{RN}(R,I')$. Ferner sind I und I' in $\mathrm{K}(RG\text{-Mod})$ isomorph, und daher auch ${}_{RN}(R,I)$ und ${}_{RN}(R,I)$ in $\mathrm{K}(R\bar{G}\text{-Mod})$.

(3) Es ist

$$\begin{array}{ccccc} RG\text{-Mod} & \times & RG\text{-Mod} & \xrightarrow{F} & R\bar{G}\text{-Mod} \\ (X & , & Y) & \longmapsto & {}_{RN}(X,Y) \end{array}$$

ein biadditiver Funktor. Die Behauptung folgt mit den Argumenten aus dem Beweis zum Satz in §1.6.2.4, angewandt auf dieses F.

Aufgabe 86. Wir rekapitulieren zunächst die aus den Lösungen zu den Aufgaben 38 und 45 benötigten Details.

Für $i \in \mathbf{Z}$ schreiben wir $i = d\underline{i} + \bar{i}$ mit $\bar{i} \in [0, d-1]$.

Sei $\mathbf{Z}C_n \xrightarrow{u} \mathbf{Z}C_n$, $1 \longmapsto c^0 + c^1 + \cdots c^{n-1}$. Sei $\mathbf{Z}C_n \xrightarrow{v} \mathbf{Z}C_n$, $1 \longmapsto c-1$. Es ist

$$P \;:=\; (\cdots \longrightarrow \mathbf{Z}C_n \xrightarrow{u} \mathbf{Z}C_n \xrightarrow{v} \mathbf{Z}C_n \xrightarrow{u} \mathbf{Z}C_n \xrightarrow{v} \mathbf{Z}C_n)$$

eine projektive Auflösung von $\mathbf{Z}$ über $\mathbf{Z}C_n$; cf. Aufgabe 38. Ähnlich haben wir eine projektive Auflösung

$$P' \;:=\; (\cdots \longrightarrow \mathbf{Z}C_m \xrightarrow{u'} \mathbf{Z}C_m \xrightarrow{v'} \mathbf{Z}C_m \xrightarrow{u'} \mathbf{Z}C_m \xrightarrow{v'} \mathbf{Z}C_m)$$

von $\mathbf{Z}$ über $\mathbf{Z}C_m$. Hierbei ist $1u' = c^0 + c^d + \cdots + c^{md-d}$, und $1v' = c^d - 1$. Schließlich haben wir noch eine projektive Auflösung

$$\bar{P} \;:=\; (\cdots \longrightarrow \mathbf{Z}C_d \xrightarrow{\bar{u}} \mathbf{Z}C_d \xrightarrow{\bar{v}} \mathbf{Z}C_d \xrightarrow{\bar{u}} \mathbf{Z}C_d \xrightarrow{\bar{v}} \mathbf{Z}C_d)$$

von $\mathbf{Z}$ über $\mathbf{Z}C_d$. Hierbei ist $1\bar{u} = \bar{c}^0 + \bar{c}^1 + \cdots + \bar{c}^{d-1}$, und $1\bar{v} = \bar{c} - 1$.

Wir haben einen identitätsfortsetzenden Isomorphismus $P{\downarrow}_{C_m} \xrightarrow{\sim} P'$ in $\mathrm{K}(\mathbf{Z}C_m\text{-Mod})$ der Gestalt

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "v"] & \mathbf{Z}C_n \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbf{Z}C_n \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathbf{Z}C_n \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbf{Z}C_n \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathbf{Z}C_n \arrow[d, "\varphi"'] \\ \cdots \arrow[r, "v'"] & \mathbf{Z}C_m \arrow[r, "u'"] & \mathbf{Z}C_m \arrow[r, "v'"] & \mathbf{Z}C_m \arrow[r, "u'"] & \mathbf{Z}C_m \arrow[r, "v'"] & \mathbf{Z}C_m \end{tikzcd} ,$$

mit

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}C_n & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{Z}C_m \\ c^i & \longmapsto & c^{d\underline{i}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}C_n & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{Z}C_m \\ c^i & \longmapsto & (\underline{i+1} - \underline{i})c^{d\underline{i}} \;, \end{array}$$

wobei $i \in \mathbf{Z}$. In der entgegengesetzten Richtung haben wir einen identitätsfortsetzenden Isomorphismus $P|_{C_m} \xrightarrow{\sim} P'$ in $\mathrm{K}(\mathbf{Z}C_m\text{-Mod})$ der Gestalt

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{v} & \mathbf{Z}C_n & \xrightarrow{u} & \mathbf{Z}C_n & \xrightarrow{v} & \mathbf{Z}C_n & \xrightarrow{u} & \mathbf{Z}C_n & \xrightarrow{v} & \mathbf{Z}C_n \\ & & \uparrow{\scriptstyle \xi} & & \uparrow{\scriptstyle \zeta} & & \uparrow{\scriptstyle \xi} & & \uparrow{\scriptstyle \zeta} & & \uparrow{\scriptstyle \xi} \\ \cdots & \xrightarrow{v'} & \mathbf{Z}C_m & \xrightarrow{u'} & \mathbf{Z}C_m & \xrightarrow{v'} & \mathbf{Z}C_m & \xrightarrow{u'} & \mathbf{Z}C_m & \xrightarrow{v'} & \mathbf{Z}C_m \; , \end{array}$$

mit

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}C_m & \xrightarrow{\xi} & \mathbf{Z}C_n \\ c^{dj} & \longmapsto & c^{dj} \\ & & \\ \mathbf{Z}C_m & \xrightarrow{\zeta} & \mathbf{Z}C_n \\ c^{dj} & \longmapsto & \sum_{i \in [0,d-1]} c^{dj+i} \; , \end{array}$$

wobei $j \in \mathbf{Z}$.

(1) Für $k \geqslant 0$ ist als abelsche Gruppe $\mathrm{H}^k(C_m)$ isomorph zu $\mathbf{Z}$, falls $k = 0$; isomorph zu $\mathbf{Z}/m$, falls $k \equiv_2 0$ und $k \geqslant 2$; und Null sonst; cf. Aufgabe 41. Wir behaupten, daß die $\mathbf{Z}C_d$-Modulstruktur auf dieser abelschen Gruppe jeweils trivial ist; i.e. daß die Multiplikation mit $\bar{c} \cdot (-)$ identisch operiert.

Zur Berechnung der Modulstruktur dürfen wir dank Aufgabe 85.(3) den Komplex ${}_{\mathbf{Z}C_m}(P, \mathbf{Z})$ heranziehen. Zur Berechnung der unterliegenden abelschen Gruppen dürfen wir den Komplex ${}_{\mathbf{Z}C_m}(P', \mathbf{Z})$ heranziehen. Die $\mathbf{Z}C_d$-Modulstruktur auf den Homologiegruppen des letzteren können wir vermittels Transport von Struktur via der beiden eingangs angeführten Komplexmorphismen bestimmen. Repräsentantenweise kommt an den geradzahligen Positionen

$$\begin{array}{rcl} (c^{di} \longmapsto z) & \overset{\varphi(-)}{\longmapsto} & (c^i \longmapsto c^{d\underline{i}} \longmapsto z) \\ & \overset{\bar{c}\cdot(-)}{\longmapsto} & (c^i \longmapsto c^{i-1} \longmapsto c^{d\underline{i-1}} \longmapsto z \longmapsto z) \\ & = & (c^i \longmapsto z) \\ & \overset{\xi(-)}{\longmapsto} & (c^{di} \longmapsto c^{di} \longmapsto z) \; , \end{array}$$

wobei $i \in \mathbf{Z}$ und $z \in \mathbf{Z}$. Somit gibt die Multiplikation mit $\bar{c}$ auf $\mathbf{Z}$ resp. auf $\mathbf{Z}/m$ in der Tat die Identität.

(2) Wir erhalten wie in Aufgabe 41

$$\begin{array}{lclcl} \mathrm{H}^0(C_d, \mathrm{H}^2(C_m)) & \simeq & \mathrm{H}^0(C_d, \mathbf{Z}/m) & \simeq & \mathbf{Z}/m \\ \mathrm{H}^1(C_d, \mathrm{H}^1(C_m)) & \simeq & \mathrm{H}^1(C_d, 0) & \simeq & 0 \\ \mathrm{H}^2(C_d, \mathrm{H}^0(C_m)) & \simeq & \mathrm{H}^2(C_d, \mathbf{Z}) & \simeq & \mathbf{Z}/d \; , \end{array}$$

und dies mit (1) jeweils mit der $\mathbf{Z}C_d$-Modulstruktur, für die $\bar{c}$ identisch operiert.

(3) Es ist

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{E}(\infty/-1/\!\!/0/-\infty)^{+2} & \simeq & \mathrm{E}(1/-1/\!\!/0/-4)^{+2} & \\ & \simeq & \mathrm{E}(1/-1/\!\!/0/-3)^{+2} & \text{da } \mathrm{H}^3(C_d) = 0 \\ & \simeq & \mathrm{E}(1/-1/\!\!/0/-2)^{+2} & \text{da } \mathrm{H}^1(C_m) = 0 \\ & \simeq & \mathrm{H}^0(C_d, \mathrm{H}^2(C_m)) \; . & \end{array}$$

Es ist

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{E}(\infty/-2/\!\!/-1/-\infty)^{+2} & \simeq & \mathrm{E}(0/-2/\!\!/-1/-4)^{+2} & \\ & \simeq & \mathrm{E}(0/-2/\!\!/-1/-3)^{+2} & \text{da } \mathrm{H}^3(C_d) = 0 \\ & \simeq & \mathrm{H}^1(C_d, \mathrm{H}^1(C_m)) \; . & \end{array}$$

Es ist

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{E}(\infty/-3/\!\!/-2/-\infty)^{+2} & \simeq & \mathrm{E}(0/-3/\!\!/-2/-4)^{+2} & \\ & \simeq & \mathrm{E}(-1/-3/\!\!/-2/-4)^{+2} & \text{da } \mathrm{H}^1(C_m) \;=\; 0 \\ & \simeq & \mathrm{H}^2(C_d, \mathrm{H}^0(C_m))\;. & \end{array}$$

(4) Alle zu betrachtenden Terme gehören zum eigentlichen Teil der Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralsequenz; cf. Aufgabe 71.

Mit Aufgabe 80 dürfen wir ersatzweise die eigentliche Spektralsequenz $\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(D)$ des Doppelkomplexes $D := {}_{\mathbf{Z}\bar{C}_n}(\mathrm{Bar}^{-}_{C_d;\mathbf{Z}}\,,\; {}_{\mathbf{Z}C_m}(\mathrm{Bar}^{*}_{C_n;\mathbf{Z}}, \mathbf{Z}))$ verwenden. Mit Aufgabe 83.(3) dürfen wir stattdessen die eigentliche Spektralsequenz $\dot{\mathrm{E}}_{\mathrm{I}}(\tilde{D})$ des Doppelkomplexes $\tilde{D} := {}_{\mathbf{Z}C_n}(\mathrm{Bar}^{-}_{C_d;\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{Bar}^{*}_{C_n;\mathbf{Z}}\,, \mathbf{Z})$ verwenden. Hier stehe $-$ als Platzhalter für die Zeilenindizes, und $*$ als Platzhalter für die Spaltenindizes.

Haben wir allgemein Ringe R, R' und S, und einen biadditiven Funktor

$$R\text{-Mod} \times R'\text{-Mod} \xrightarrow{\;F\;} S\text{-Mod}\;,$$

so induziert dieser einen Funktor

$$\mathrm{C}(R\text{-Mod}) \;\times\; \mathrm{C}(R'\text{-Mod}) \xrightarrow{\;F\;(=\,F^{\mathrm{CC}})\;} \mathrm{CC}(S\text{-Mod})\;,$$

welcher wiederum einen Funktor

$$\mathrm{K}(R\text{-Mod}) \;\times\; \mathrm{K}(R'\text{-Mod}) \xrightarrow{\;F\;} \mathrm{KK}(S\text{-Mod})$$

induziert, unter Mißbrauch der Bezeichung alle gleichen Namens. Denn ist $A \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}(R\text{-Mod})$ split azyklisch und $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}(R'\text{-Mod})$ beliebig, so ist $F(A, X) \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{CC}(S\text{-Mod})$ vertikal split azyklisch; analog für einen azyklischen Eintrag an zweiter Stelle.

Insbesondere ist $\mathrm{Bar}_{\bar{C}_n;\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{Bar}_{C_n;\mathbf{Z}}$ isomorph zu $\bar{P} \otimes_{\mathbf{Z}} P$ in $\mathrm{KK}(\mathbf{Z}C_n\text{-Mod})$. Anwenden des kontravarianten additiven Funktors ${}_{\mathbf{Z}C_n}(-, \mathbf{Z})$ liefert einen Isomorphismus

$$\tilde{D} \quad\simeq\quad \tilde{\tilde{D}} \;:=\; {}_{\mathbf{Z}C_n}(\bar{P} \otimes P,\, \mathbf{Z})$$

in $\mathrm{KK}(\mathbf{Z}\text{-Mod})$.

Verwenden wir die Schreibweise $(-)^* := {}_{\mathbf{Z}C_n}(-, \mathbf{Z})$, und schreiben wir ferner $M := (\mathbf{Z}C_d \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}C_n)^*$ sowie $u^* := 1 \otimes u^*$, $v^* := 1 \otimes v^*$, $\bar{u}^* := \bar{u}^* \otimes 1$ und $\bar{v}^* := \bar{v}^* \otimes 1$, so stellt sich der Doppelkomplex $\tilde{\tilde{D}}$, aus dessen Spektralsequenzterme wir gewisse berechnen wollen, wie folgt dar.

$$\begin{tikzcd}
{} & {} & {} & \\
M \arrow[u, "\bar{v}^*"] \arrow[r, "v^*"] & M \arrow[u, "\bar{v}^*"] \arrow[r, "u^*"] & M \arrow[u, "\bar{v}^*"] \arrow[r, "v^*"] & {} \\
M \arrow[u, "\bar{u}^*"] \arrow[r, "v^*"] & M \arrow[u, "\bar{u}^*"] \arrow[r, "u^*"] & M \arrow[u, "\bar{u}^*"] \arrow[r, "v^*"] & {} \\
M \arrow[u, "\bar{v}^*"] \arrow[r, "v^*"] & M \arrow[u, "\bar{v}^*"] \arrow[r, "u^*"] & M \arrow[u, "\bar{v}^*"] \arrow[r, "v^*"] & {}
\end{tikzcd}$$

Zur Berechnung der Filtrierungsterme

$$\begin{array}{rclcl} \mathrm{E}(\infty/-\infty/\!\!/\infty/-\infty)^{+2} & = & \mathrm{E}(\infty/-4/\!\!/0/-\infty)^{+2} & = & \mathrm{E}(0/-3/\!\!/0/-4)^{+2} \\ & & \mathrm{E}(\infty/-4/\!\!/-1/-\infty)^{+2} & = & \mathrm{E}(0/-3/\!\!/-1/-4)^{+2} \\ & & \mathrm{E}(\infty/-4/\!\!/-2/-\infty)^{+2} & = & \mathrm{E}(0/-3/\!\!/-2/-4)^{+2} \\ & & \mathrm{E}(\infty/-4/\!\!/-3/-\infty)^{+2} & = & 0 \end{array}$$

berechnen wir das Bild von

$$\mathrm{H}^2\mathrm{t}_{\mathrm{I}}\tilde{\tilde{D}}(-3/-4)\ \ (=\ 0)\,,\quad \mathrm{H}^2\mathrm{t}_{\mathrm{I}}\tilde{\tilde{D}}(-2/-4)\,,\quad \mathrm{H}^2\mathrm{t}_{\mathrm{I}}\tilde{\tilde{D}}(-1/-4)\quad \text{resp.}\quad \mathrm{H}^2\mathrm{t}_{\mathrm{I}}\tilde{\tilde{D}}(0/-4)$$

in $\mathrm{H}^2\mathrm{t}_{\mathrm{I}}\tilde{\tilde{D}}(0/-3)$. Dazu berechnen wir die Morphismen

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^2\mathrm{t}_{\mathrm{I}}\tilde{\tilde{D}}(-2/-4) \longrightarrow \mathrm{H}^2\mathrm{t}_{\mathrm{I}}\tilde{\tilde{D}}(-1/-4) \longrightarrow \mathrm{H}^2\mathrm{t}_{\mathrm{I}}\tilde{\tilde{D}}(0/-4) \longrightarrow \mathrm{H}^2\mathrm{t}_{\mathrm{I}}\tilde{\tilde{D}}(0/-3)$$

aus folgenden Ausschnitten von Komplexmorphismen. Darin sei $M^{(k)} := \bigoplus_{i\in[1,k]} M$. Die mittlere Spalte befindet sich an Position 2 im jeweiligen Komplex.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r, "{\left(\begin{smallmatrix} v^* & \bar{v}^* \end{smallmatrix}\right)}"] \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}"'] & M^{(2)} \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right)}"] & \mathrm{t}_{\mathrm{I}}\tilde{\tilde{D}}(-2/-4) \arrow[d] \\
M \arrow[r, "{\left(\begin{smallmatrix} -v^* & -\bar{u}^* \end{smallmatrix}\right)}"] \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}"'] & M^{(2)} \arrow[r, "{\left(\begin{smallmatrix} -u^* & -\bar{u}^* & 0\\ 0 & v^* & \bar{v}^* \end{smallmatrix}\right)}"] \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right)}"'] & M^{(3)} \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{smallmatrix}\right)}"] & \mathrm{t}_{\mathrm{I}}\tilde{\tilde{D}}(-1/-4) \arrow[d] \\
M^{(2)} \arrow[r, "{\left(\begin{smallmatrix} u^* & \bar{v}^* & 0\\ 0 & -v^* & -\bar{u}^* \end{smallmatrix}\right)}"] \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 1&0\\ 0&1 \end{smallmatrix}\right)}"'] & M^{(3)} \arrow[r, "{\left(\begin{smallmatrix} v^* & \bar{v}^* & 0 & 0\\ 0 & -u^* & -\bar{u}^* & 0\\ 0 & 0 & v^* & \bar{v}^* \end{smallmatrix}\right)}"] \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right)}"'] & M^{(4)} \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right)}"] & \mathrm{t}_{\mathrm{I}}\tilde{\tilde{D}}(-0/-4) \arrow[d] \\
M^{(2)} \arrow[r, "{\left(\begin{smallmatrix} u^* & \bar{v}^* & 0\\ 0 & -v^* & -\bar{u}^* \end{smallmatrix}\right)}"] & M^{(3)} \arrow[r, "{\left(\begin{smallmatrix} v^* & \bar{v}^* & 0\\ 0 & -u^* & -\bar{u}^*\\ 0 & 0 & v^* \end{smallmatrix}\right)}"] & M^{(3)} & \mathrm{t}_{\mathrm{I}}\tilde{\tilde{D}}(-0/-3)
\end{tikzcd}$$

Es ist $M = {}_{\mathbf{Z}C_n}(\mathbf{Z}C_d \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}C_n,\, \mathbf{Z})$. Darin hat $\mathbf{Z}C_d \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}C_n$ die $\mathbf{Z}C_n$-lineare Basis $\big(\bar{c}^i \otimes 1\ :\ i \in [0, d-1]\big)$. Bezüglich dieser Basis identifizieren wir M mit $\mathbf{Z}^d$.

Berechnen wir u^*, v^*, $\bar{u}^*$, $\bar{v}^*$ auf $\mathbf{Z}^d$.

$$\begin{array}{rcl}
(z_i)_{i\in[0,d-1]} & \overset{\sim}{\longmapsto} & \big(\bar{c}^{j+i} \otimes c^j \longmapsto c^j z_i = z_i\big) \\
& \overset{u^*}{\longmapsto} & \big(\bar{c}^i \otimes 1 \longmapsto \sum_{k\in[0,n-1]} \bar{c}^i \otimes c^k = \sum_{k\in[0,n-1]} \bar{c}^{k+\overline{i-k}} \otimes c^k \longmapsto \sum_{k\in[0,n-1]} z_{\overline{i-k}}\big) \\
& \overset{\sim}{\longmapsto} & \big(\sum_{k\in[0,n-1]} z_{\overline{i-k}}\big)_{i\in[0,d-1]} \\
& = & \big(\sum_{k\in[0,d-1]} m \cdot z_k\big)_{i\in[0,d-1]}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
(z_i)_{i\in[0,d-1]} & \overset{\sim}{\longmapsto} & \big(\bar{c}^{j+i} \otimes c^j \longmapsto z_i\big) \\
& \overset{v^*}{\longmapsto} & \big(\bar{c}^i \otimes 1 \longmapsto \bar{c}^i \otimes (c-1) = \bar{c}^{1+\overline{i-1}} \otimes c^1 - \bar{c}^i \otimes 1 \longmapsto z_{\overline{i-1}} - z_i\big) \\
& \overset{\sim}{\longmapsto} & \big(z_{\overline{i-1}} - z_i\big)_{i\in[0,d-1]}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
(z_i)_{i\in[0,d-1]} & \overset{\sim}{\longmapsto} & \big(\bar{c}^i \otimes 1 \longmapsto z_i\big) \\
& \overset{\bar{u}^*}{\longmapsto} & \big(\bar{c}^i \otimes 1 \longmapsto \sum_{k\in[0,d-1]} \bar{c}^{\overline{i+k}} \otimes 1 \longmapsto \sum_{k\in[0,d-1]} z_{\overline{i+k}}\big) \\
& \overset{\sim}{\longmapsto} & \big(\sum_{k\in[0,d-1]} z_{\overline{i+k}}\big)_{i\in[0,d-1]} \\
& = & \big(\sum_{k\in[0,d-1]} z_k\big)_{i\in[0,d-1]}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
(z_i)_{i\in[0,d-1]} & \overset{\sim}{\longmapsto} & \left(\bar{c}^i\otimes 1 \longmapsto z_i\right) \\
& \overset{\bar{v}^*}{\longmapsto} & \left(\bar{c}^i\otimes 1 \longmapsto \bar{c}^{\,\overline{i+1}}\otimes 1 - \bar{c}^i\otimes 1 \longmapsto z_{\overline{i+1}} - z_i\right) \\
& \overset{\sim}{\longmapsto} & \left(z_{\overline{i+1}} - z_i\right)_{i\in[0,d-1]}
\end{array}
$$

Um die folgenden Rechnungen besser darstellen zu können, beschränken wir uns auf den Fall $d = 3$. Wir schreiben weiterhin d für 3, wann immer es auftritt. In Matrixform erhalten wir

$$
\begin{array}{rclcrcl}
u^* & = & \begin{pmatrix} m & m & m \\ m & m & m \\ m & m & m \end{pmatrix} & \qquad & v^* & = & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\[2ex]
\bar{u}^* & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & & \bar{v}^* & = & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} .
\end{array}
$$

Unser Komplexmorphismenausschnittsdiagramm wird zu folgendem.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Z}^3 \arrow[r, "\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1&1&0&-1&0&1\\ 0&-1&1&1&-1&0\\ 1&0&-1&0&1&-1 \end{array}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{array}{c|c} 0&1 \end{array}\right)"'] & \mathbf{Z}^6 \arrow[d] \\
\mathbf{Z}^3 \arrow[r, "\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1&-1&0&-1&-1&-1\\ 0&1&-1&-1&-1&-1\\ -1&0&1&-1&-1&-1 \end{array}\right)"] \arrow[d] & \mathbf{Z}^6 \arrow[r, "\left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} -m&-m&-m&-1&-1&-1&0&0&0\\ -m&-m&-m&-1&-1&-1&0&0&0\\ -m&-m&-m&-1&-1&-1&0&0&0\\ \hline 0&0&0&-1&1&0&-1&0&1\\ 0&0&0&0&-1&1&1&-1&0\\ 0&0&0&1&0&-1&0&1&-1 \end{array}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{array}{c|c|c} 0&1&0\\ \hline 0&0&1 \end{array}\right)"'] & \mathbf{Z}^9 \arrow[d] \\
\mathbf{Z}^6 \arrow[r, "\left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} m&m&m&-1&0&1&0&0&0\\ m&m&m&1&-1&0&0&0&0\\ m&m&m&0&1&-1&0&0&0\\ \hline 0&0&0&1&-1&0&-1&-1&-1\\ 0&0&0&0&1&-1&-1&-1&-1\\ 0&0&0&-1&0&1&-1&-1&-1 \end{array}\right)"] \arrow[d] & \mathbf{Z}^9 \arrow[r, "\left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr|rrr} -1&1&0&-1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&1&1&-1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&-1&0&1&-1&0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&-m&-m&-m&-1&-1&-1&0&0&0\\ 0&0&0&-m&-m&-m&-1&-1&-1&0&0&0\\ 0&0&0&-m&-m&-m&-1&-1&-1&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0&-1&1&0&-1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&1&1&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&-1&0&1&-1 \end{array}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{array}{c|c|c} 1&0&0\\ \hline 0&1&0\\ \hline 0&0&1 \end{array}\right)"'] & \mathbf{Z}^{12} \arrow[d] \\
\mathbf{Z}^6 \arrow[r, "\left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} m&m&m&-1&0&1&0&0&0\\ m&m&m&1&-1&0&0&0&0\\ m&m&m&0&1&-1&0&0&0\\ \hline 0&0&0&1&-1&0&-1&-1&-1\\ 0&0&0&0&1&-1&-1&-1&-1\\ 0&0&0&-1&0&1&-1&-1&-1 \end{array}\right)"] & \mathbf{Z}^9 \arrow[r, "\left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} -1&1&0&-1&0&1&0&0&0\\ 0&-1&1&1&-1&0&0&0&0\\ 1&0&-1&0&1&-1&0&0&0\\ \hline 0&0&0&-m&-m&-m&-1&-1&-1\\ 0&0&0&-m&-m&-m&-1&-1&-1\\ 0&0&0&-m&-m&-m&-1&-1&-1\\ \hline 0&0&0&0&0&0&-1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&-1 \end{array}\right)"] & \mathbf{Z}^9
\end{tikzcd}
$$

Hierin haben wir die 3×3-Einheits- resp. -Nullmatrix auch mit 1 resp. 0 bezeichnet.

Wir dürfen links Zeilen- und rechts Spaltenumformungen vornehmen. Bei den Spaltenumformungen dürfen wir auch einen gemeinsamen Faktor aus den Spalteneinträgen entfernen, da dies den Kern nicht ändert.

Wir erhalten folgendes.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Z}^3 \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "(\,0|1\,)"'] & \mathbf{Z}^2 \arrow[d] \\
\mathbf{Z}^3 \arrow[r, "\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & d & d & d \end{array}\right)"] \arrow[d] & \mathbf{Z}^6 \arrow[r, "\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)"'] & \mathbf{Z}^3 \arrow[d] \\
\mathbf{Z}^4 \arrow[r, "\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} m & m & m & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & d & d \end{array}\right)"] \arrow[d] & \mathbf{Z}^9 \arrow[r, "\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)"'] & \mathbf{Z}^5 \arrow[d] \\
\mathbf{Z}^4 \arrow[r, "\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} m & m & m & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & d & d \end{array}\right)"] & \mathbf{Z}^9 \arrow[r, "\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)"] & \mathbf{Z}^5
\end{tikzcd}
$$

Die horizontalen Abbildungen links sind alle injektiv. Tragen wir noch Kerne und Homologiegruppen ein, und unterschlagen die bisherige rechte Spalte, so ergibt sich folgendes.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
0 \arrow[r] \arrow[dd] & \mathbf{Z} \arrow[r, "(1\;1\;1)"] \arrow[drr, "1"] \arrow[dd, "(0\;0\;1)"] & \mathbf{Z}^3 \arrow[dd] & \\
 & & & \mathbf{Z} \arrow[dd, "1"] \\
\mathbf{Z}^3 \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}"] \arrow[dd] & \mathbf{Z}^3 \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[drr, "\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}"] \arrow[dd, "\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}"] & \mathbf{Z}^6 \arrow[dd] & \\
 & & & \mathbf{Z}/d \arrow[dd, "m"] \\
\mathbf{Z}^4 \arrow[r, "\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}"] \arrow[dd] & \mathbf{Z}^4 \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[drr, "\begin{pmatrix} -1 \\ m \\ m \\ m \end{pmatrix}"] \arrow[dd, "\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}"] & \mathbf{Z}^9 \arrow[dd] & \\
 & & & \mathbf{Z}/dm \arrow[dd, "1"] \\
\mathbf{Z}^4 \arrow[r, "\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}"] & \mathbf{Z}^4 \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[drr, "\begin{pmatrix} -1 \\ m \\ m \\ m \end{pmatrix}"] & \mathbf{Z}^9 & \\
 & & & \mathbf{Z}/dm
\end{tikzcd}
$$

Hierin sind die vertikalen Morphismen der dritten Spalte von links durch Inklusionen in die jeweiligen letzten Summanden gegeben. Man erinnere sich an $n = dm$.

Als Bilder im untersten Homologieterm $\mathbf{Z}/n$ ergeben sich nun folgende Filtrierungsterme

$$\begin{array}{rclclcr} \mathrm{E}(\infty/-\infty/\!\!/\infty/-\infty)^{+2} & = & \mathrm{E}(\infty/-4/\!\!/0/-\infty)^{+2} & = & \mathrm{E}(0/-3/\!\!/0/-4)^{+2} & \simeq & \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \\ & & \mathrm{E}(\infty/-4/\!\!/-1/-\infty)^{+2} & = & \mathrm{E}(0/-3/\!\!/-1/-4)^{+2} & \simeq & m\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \\ & & \mathrm{E}(\infty/-4/\!\!/-2/-\infty)^{+2} & = & \mathrm{E}(0/-3/\!\!/-2/-4)^{+2} & \simeq & m\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \\ & & \mathrm{E}(\infty/-4/\!\!/-3/-\infty)^{+2} & = & 0 & \simeq & 0\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \end{array}$$

Als Subquotienten erhalten wir also

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{E}(0/-1/\!\!/0/-4)^{+2} & \simeq & \mathbf{Z}/m \\ \mathrm{E}(0/-2/\!\!/-1/-4)^{+2} & \simeq & 0 \\ \mathrm{E}(0/-1/\!\!/-2/-4)^{+2} & \simeq & \mathbf{Z}/d\,, \end{array}$$

was sich aus (2) und (3) ebenso ergibt.

Aufgabe 87.

(1) Sei $(X \xrightarrow{f} Y) \in \mathrm{Ob}\,[\![\Delta_1,\, R\text{-Mod}\,]\!]$. Wir definieren einen Funktor von dort nach $\left(\begin{smallmatrix} R & 0 \\ R & R \end{smallmatrix}\right)$-Mod, indem wir einen Modul $X \oplus Y$ definieren mit der Operation $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right)(x, y) := (ax, bxf + cy)$. Auf den Morphismen entsprechend.

Sei umgekehrt ein Modul Z über $\left(\begin{smallmatrix} R & 0 \\ R & R \end{smallmatrix}\right)$-Mod gegeben. Wir definieren einen Funktor von dort nach $[\![\Delta_1,\, R\text{-Mod}\,]\!]$, indem wir $e := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $f := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $n := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ schreiben, $fne = n$ bemerken, und

$$\begin{array}{rcl} eZ & \longrightarrow & fZ \\ ez & \longmapsto & nez \;=\; fnez \end{array}$$

setzen. Auf den Morphismen entsprechend.

Diese Funktoren sind gegenseitig inverse Äquivalenzen.

(2) Beachte zunächst, daß ein Morphismen in $[\![\Delta_1,\, R\text{-Mod}\,]\!]$ genau dann monomorph ist, wenn er punktweise monomorph ist.

Wir behaupten, die injektiven Objekte in $[\![\Delta_1,\, R\text{-Mod}\,]\!]$ sind genau die Objekte der Form $I \xrightarrow{p} J$, mit p split epimorph und I und J injektiv.

Ein Summand eines solchen Objektes ist wieder von dieser Form. Also genügt es zu zeigen, daß Objekte dieser Form injektiv sind, und daß jedes Objekt einen Monomorphismus in ein solches Objekt zuläßt.

Um ersteres zu zeigen, genügt es einzusehen, daß $I \xrightarrow{1} I$ für I injektiv ein injektives Objekt ist, und daß $I \longrightarrow 0$ für I injektiv ein injektives Objekt ist. In beiden Fällen kann man die Injektivität von I dazu verwenden, eine Retraktion zu einem Morphismus von unserem fraglichen Objekt in ein beliebiges Objekt anzugeben.

Um zweiteres zu zeigen, sei uns $(X \xrightarrow{f} Y)$ vorgegeben. Sei $X \xrightarrow{i} I$ mit I injektiv und $Y \xrightarrow{j} J$ mit J injektiv gewählt; cf. Aufgabe 19. Bilde

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(i\ \ fj)"'] & Y \arrow[d, "j"] \\ I \oplus J \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"'] & J\,. \end{tikzcd}$$

(3) Das Schlangenlemma aus Aufgabe 20.(3) zeigt, daß der Funktor Kern linksexakt ist. Wie für jeden linksexakten Funktor können wir $\mathrm{R}^0\,\mathrm{Kern}$ und Kern identifizieren.

(4, 5) Sei $(X \xrightarrow{f} Y) \in \mathrm{Ob}\,[\![\Delta_1,\, R\text{-Mod}\,]\!]$. Wir lösen dieses Objekt injektiv auf, und wenden gleich auf die Auflösung den Funktor Kern an. Dies liefert folgendes Diagramm, in welchem der Einfachheit halber der Kern eines Morphismus g mit K_g abgekürzt wurde.

$$\begin{tikzcd}
K_f \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail] & Y \arrow[d, tail] \\
K_{p^0} \arrow[r, tail] \arrow[d] & I^0 \arrow[r, two heads, "p^0"] \arrow[d, tail] & J^0 \arrow[d, two heads] \\
K_{f'} \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & X' \arrow[r, two heads, "f'"] \arrow[d, tail] & Y' \arrow[d, tail] \\
K_{p^1} \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & I^1 \arrow[r, two heads, "p^1"] \arrow[d, tail] & J^1 \arrow[d, two heads] \\
K_{f''} \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & X'' \arrow[r, two heads, "f''"] \arrow[d, tail] & Y'' \arrow[d, tail] \\
K_{p^2} \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & I^2 \arrow[r, two heads, "p^2"] \arrow[d, tail] & J^2 \arrow[d, two heads] \\
K_{f'''} \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & X''' \arrow[r, two heads, "f'''"] \arrow[d, tail] & Y''' \arrow[d, tail] \\
K_{p^3} \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & I^3 \arrow[r, two heads, "p^3"] \arrow[d, tail] & J^3 \arrow[d, two heads] \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

Gemäß Aufgabe 18.(5) sind die Vierecke (I^1, J^1, X'', Y''), (I^2, J^2, X'', Y'') etc. Pushouts. Gemäß Aufgabe 18.(5) und Schlangenlemma ist also zwar $K_f \rightarrowtail K_{p^0} \longrightarrow K_{f'}$ nur linksexakt, aber $K_{f'} \rightarrowtail K_{p^1} \twoheadrightarrow K_{f''}$, $K_{f''} \rightarrowtail K_{p^2} \twoheadrightarrow K_{f'''}$ etc. sind kurz exakt. Es folgt $\mathrm{R}^i\,\mathrm{Kern} = 0$ für $i \geqslant 2$, was (4) beantwortet.

Berechnen wir $\mathrm{R}^1\,\mathrm{Kern}$. Hierzu kann der Cokern von $K_{p^0} \longrightarrow K_{f'}$ gebildet werden. Gemäß Schlangenlemma ist dies aber gerade der Cokern von f, da p^0 epimorph ist. Dies beantwortet (5).

Das Diagramm liefert übrigens auch $\mathrm{R}^0\,\mathrm{Kern} = \mathrm{Kern}$ und bestätigt so nochmals die Antwort zu (3).

Alle Antworten sind natürlich in $(X \xrightarrow{f} Y)$.

Aufgabe 88.

(1) Zunächst bemerken wir, daß das Diagramm beidseitig fortgesetzt werden kann. Es setzt sich aus

folgenden kurz exakten Fundamentalsequenzen zusammen.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathrm{E}(-i/-\infty/\!\!/-i-r+1/(-i+1)^{-1})^{+i+j} \arrow[dl, "\bullet" marking] \\
\mathrm{D}_r^{i,j} \;=\; \mathrm{E}(-i/-\infty/\!\!/-i-r+1/-\infty)^{+i+j} \arrow[dr, "/" marking] & \\
 & \mathrm{E}(-i+1/-\infty/\!\!/-i-r+1/-\infty)^{+i+j} \;=\; \mathrm{D}_{r+1}^{i-1,j+1} \arrow[dl, "\bullet" marking] \\
\mathrm{D}_r^{i-1,j+1} \;=\; \mathrm{E}(-i+1/-\infty/\!\!/-i-r+2/-\infty)^{+i+j} \arrow[dr, "/" marking] & \\
 & \mathrm{E}(-i+1/-i-r+1/\!\!/-i-r+2/-\infty)^{+i+j} \arrow[dl, "\bullet" marking] \\
\mathrm{E}_r^{i+r-2,j-r+2} \;=\; \mathrm{E}(-i+1/-i-r+1/\!\!/-i-r+2/-i-2r+2)^{+i+j} \arrow[dr, "/" marking] & \\
 & \mathrm{E}(-\infty^{+1}/-i-r+1/\!\!/-i-r+2/-i-2r+2)^{+i+j} \arrow[dl, "\bullet" marking] \\
\mathrm{D}_r^{i+r-1,j-r+2} \;=\; \mathrm{E}(-\infty^{+1}/-i-r+1/\!\!/-\infty^{+1}/-i-2r+2)^{+i+j} \arrow[dr, "/" marking] & \\
 & \mathrm{E}(-\infty^{+1}/-i-r+2/\!\!/-\infty^{+1}/-i-2r+2)^{+i+j} \arrow[dl, "\bullet" marking] \\
\mathrm{D}_r^{i+r-2,j-r+3} \;=\; \mathrm{E}(-\infty^{+1}/-i-r+2/\!\!/-\infty^{+1}/-i-2r+3)^{+i+j} \arrow[dr, "/" marking] & \\
 & \mathrm{E}((-i-2r+2)^{+1}/-i-r+2/\!\!/-\infty^{+1}/-i-2r+3)^{+i+j}
\end{tikzcd}$$

(2) Zunächst bemerken wir, daß das Diagramm beidseitig fortgesetzt werden kann. Es setzt sich aus folgenden kurz exakten Fundamentalsequenzen zusammen.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathrm{E}(\infty/-i-1/\!\!/-i/-i-r)^{+i+j} \arrow[dl, "\bullet" marking] \\
\tilde{\mathrm{D}}_r^{i,j} \;=\; \mathrm{E}(\infty/-i-1/\!\!/\infty/-i-r)^{+i+j} \arrow[dr, "/" marking] & \\
 & \mathrm{E}(\infty/-i/\!\!/\infty/-i-r)^{+i+j} \;=\; \tilde{\mathrm{D}}_{r+1}^{i-1,j+1} \arrow[dl, "\bullet" marking] \\
\tilde{\mathrm{D}}_r^{i-1,j+1} \;=\; \mathrm{E}(\infty/-i/\!\!/\infty/-i-r+1)^{+i+j} \arrow[dr, "/" marking] & \\
 & \mathrm{E}((-i-r)^{+1}/-i/\!\!/\infty/-i-r+1)^{+i+j} \arrow[dl, "\bullet" marking] \\
\mathrm{E}_r^{i+r-1,j-r+2} \;=\; \mathrm{E}((-i-r)^{+1}/-i/\!\!/(-i-2r+1)^{+1}/-i-r+1)^{+i+j} \arrow[dr, "/" marking] & \\
 & \mathrm{E}((-i-r)^{+1}/\infty/\!\!/(-i-2r+1)^{+1}/-i-r+1)^{+i+j} \arrow[dl, "\bullet" marking] \\
\tilde{\mathrm{D}}_r^{i+r-1,j-r+2} \;=\; \mathrm{E}((-i-r)^{+1}/\infty/\!\!/(-i-2r+1)^{+1}/\infty)^{+i+j} \arrow[dr, "/" marking] & \\
 & \mathrm{E}((-i-r+1)^{+1}/\infty/\!\!/(-i-2r+1)^{+1}/\infty)^{+i+j} \arrow[dl, "\bullet" marking] \\
\tilde{\mathrm{D}}_r^{i+r-2,j-r+3} \;=\; \mathrm{E}((-i-r+1)^{+1}/\infty/\!\!/(-i-2r+2)^{+1}/\infty)^{+i+j} \arrow[dr, "/" marking] & \\
 & \mathrm{E}((-i-r+1)^{+1}/(-i-2r+1)^{+1}/\!\!/(-i-2r+2)^{+1}/\infty)^{+i+j}
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 89. Wir können das kommutative Viereck ergänzen zu folgendem horizontal geschriebenen Morphismus kurz exakter Fundamentalsequenzen.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\beta'/\alpha) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\bullet" marking] & \mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\beta'/\alpha) \arrow[d, "\bullet" marking] \\
\mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\gamma/\alpha) \arrow[r, "\bullet" marking] \arrow[d, "|" marking] & \mathrm{E}(\delta/\beta/\!\!/\gamma'/\alpha) \arrow[d, "|" marking] \\
\mathrm{E}(\delta/\beta'/\!\!/\gamma/\alpha) \arrow[r, "\bullet" marking] & \mathrm{E}(\delta/\beta'/\!\!/\gamma'/\alpha)
\end{tikzcd}$$

Dies zeigt die Aussage dank Aufgabe 18.(3, 5).

Aufgabe 90.

(1) Sei $I \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}^{+}(R\text{-Inj})$ eine injektive Auflösung von M. Betrachte den Doppelkomplex

$$X^{*,-} \; := \; {}_R(P_*, I^-) \; \in \; \mathrm{Ob}\,\mathrm{CC}^{\llcorner}(R\text{-Mod}) \, .$$

Sei $\mathrm{E} := \mathrm{E}_{\mathrm{II}}(X)$.

Für $i \geqslant 0$ ist ${}_R(P_i, I) \longrightarrow {}_R(P_i, M)$ ein Quasiisomorphismus, wenn letzteres als Komplex konzentriert in Position 0 angesehen wird. Mit dem Lemma aus §1.6.2.4 ist also

$$\mathrm{t}\,{}_R(P, I) \;\longrightarrow\; \mathrm{t}\,{}_R(P, M) \;=\; {}_R(P, M)$$

ein Quasiisomorphismus. Folglich ist

$$\mathrm{E}(\infty/-\infty/\!\!/\infty/-\infty)^{+k} \;=\; \mathrm{H}^k \mathrm{t} X \;=\; \mathrm{H}^k \mathrm{t}\,{}_R(P, I) \;\simeq\; \mathrm{H}^k\big({}_R(P, M)\big)$$

für $k \geqslant 0$. Mit dem Lemma aus §4.2.3 ist nun unter Verwendung der Exaktheit von ${}_R(-, I^i)$ für $i \geqslant 0$

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{E}(-\alpha{+}1/-\alpha{-}1/\!\!/-\alpha/-\alpha{-}2)^{+k} & \simeq & \mathrm{H}^{\alpha}\mathrm{H}^{k-\alpha} X^{*,-} \\
& \simeq & \mathrm{H}^{\alpha}\mathrm{H}^{k-\alpha}\big({}_R(P_*, I^-)\big) \\
& \simeq & \mathrm{H}^{\alpha}\big({}_R(\mathrm{H}_{k-\alpha}(P_*), I^-)\big) \\
& \simeq & \mathrm{Ext}^{\alpha}_R(\mathrm{H}_{k-\alpha}(P_*), M)
\end{array}$$

für $k \geqslant 0$ und $\alpha \in [0, k]$.

(2) Verwenden wir (1) für den Ring R, für $P := R \otimes_{RG} \mathrm{Bar}_{G;R}$ und einen R-Modul M, so erhalten wir

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{E}(\infty/-\infty/\!\!/\infty/-\infty)^{+k} & \simeq & \mathrm{H}^k\big({}_R(R \otimes_{RG} \mathrm{Bar}_{G;R}, M)\big) \\
& \simeq & \mathrm{H}^k\big({}_{RG}(\mathrm{Bar}_{G;R}, M)\big) \\
& \simeq & \mathrm{Ext}^k_{RG}(R, M) \\
& \simeq & \mathrm{H}^k(G, M; R) \\
\\
\mathrm{E}(-\alpha{+}1/-\alpha{-}1/\!\!/-\alpha/-\alpha{-}2)^{+k} & \simeq & \mathrm{Ext}^{\alpha}_R(\mathrm{H}_{k-\alpha}(R \otimes_{RG} \mathrm{Bar}_{G;R}), M) \\
& \simeq & \mathrm{Ext}^{\alpha}_R(\mathrm{H}_{k-\alpha}(G; R), M)
\end{array}$$

für $k \geqslant 0$ und $\alpha \in [0, k]$.

(3) Vorbemerkung. Nach Aufgabe 5.(3) ist ein R-Modul T bereits dann injektiv, falls er divisibel ist, i.e. falls für jedes $a \in R$ der von der Multiplikationsabbildung $R \xrightarrow{a} R$ induzierte Morphismus ${}_R(R, T) \xleftarrow{a(-)} {}_R(R, T)$ epimorph ist. Insbesondere ist T bereits dann injektiv, falls er kurz exakte Sequenzen endlich erzeugter R-Moduln in ebensolche überführt.

Wir *behaupten,* daß es eine injektive Auflösung I von M so gibt, daß $I^k = 0$ für $k \geqslant 2$. Sei $M \xrightarrow{\bullet} I^0$ mit I^0 injektiv über R gegeben. Es genügt zu zeigen, daß der Cokern C dieses Monomorphismus injektiv ist; i.e., unter Verwendung der Vorbemerkung, daß ${}_R(-, C)$ kurz exakte

Sequenzen endlich erzeugter R-Moduln in ebensolche überführt; i.e., unter Verwendung einer lang exakten Ext-Sequenz, daß $\mathrm{Ext}^1_R(X,C) \simeq 0$ für alle endlich erzeugten R-Moduln X.

Sei $X \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod}$ endlich erzeugt. Wir wollen $\mathrm{Ext}^1_R(X,C) \simeq 0$ zeigen. Die lang exakte Ext-Sequenz auf $M \rightarrowtail I^0 \twoheadrightarrow C$ zeigt wegen $\mathrm{Ext}^1_R(X,I^0) \simeq 0$ und $\mathrm{Ext}^2_R(X,I^0) \simeq 0$, daß $\mathrm{Ext}^1_R(X,C) \simeq \mathrm{Ext}^2_R(X,M)$. Da R ein Hauptidealbereich ist, gibt es eine projektive Auflösung P von X mit $P_k = 0$ für $k \geqslant 2$. Also ist $\mathrm{Ext}^2_R(X,M) \simeq 0$. Dies zeigt die *Behauptung.*

Schreibe $X^{*,-} := {}_R((R \otimes_{RG} \mathrm{Bar}_{G;R})_*\,, I^-)$. Wir erinnern an $\mathrm{E} = \mathrm{E}_{\mathrm{II}}(X)$. Beachte, daß $X^{k,\ell} = 0$ für $\ell \geqslant 2$, und also

$$\mathrm{H}^k \mathrm{t}_{\mathrm{II}} X(\beta/\alpha) \;\simeq\; 0$$

für $k \geqslant 0$ und $-\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant -2$.

Betrachte nun für $k \geqslant 1$ die Fundamentalsequenz

$$\mathrm{E}(\infty/-2/\!\!/-1/-\infty)^{+k+1} \rightarrowtail \mathrm{E}(\infty/-2/\!\!/0/-\infty)^{+k+1} \twoheadrightarrow \mathrm{E}(\infty/-1/\!\!/0/-\infty)^{+k+1}$$

Wir *behaupten,* daß

$$\mathrm{E}(\infty/-2/\!\!/0/-\infty)^{+k+1} \simeq \mathrm{E}(\infty/-\infty/\!\!/0/-\infty)^{+k+1} \simeq \mathrm{E}(\infty/-\infty/\!\!/\infty/-\infty)^{+k+1} \;\simeq\; \mathrm{H}^{k+1}(G,M;R)\,.$$

Mittels einer Fundamentalsequenz genügt es für die erste Isomorphie zu zeigen, daß $\mathrm{E}(\infty/-\infty/\!\!/-2/-\infty)^{+k+1} \simeq 0$. Aber es ist $\mathrm{H}^{k+1}\mathrm{t}_{\mathrm{II}}X(-2/-\infty) = 0$. Dies zeigt die Behauptung.

Wir *behaupten,* daß

$$\mathrm{E}(\infty/-2/\!\!/-1/-\infty)^{+k+1} \simeq\; \mathrm{E}(0/-2/\!\!/-1/-\infty)^{+k+1} \simeq\; \mathrm{E}(0/-2/\!\!/-1/-3)^{+k+1} \simeq\; \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{H}_k(G;R),M)\,.$$

Mittels einer Fundamentalsequenz genügt es für die zweite Isomorphie zu zeigen, daß $\mathrm{E}(-2/-\infty/\!\!/-3/(-1)^{-1})^{+k+2} = 0$. Aber es ist $\mathrm{H}^{k+2}\mathrm{t}_{\mathrm{II}}X(-2/-\infty) = 0$. Dies zeigt die Behauptung.

Wir *behaupten,* daß

$$\mathrm{E}(\infty/-1/\!\!/0/-\infty)^{+k+1} \simeq\; \mathrm{E}(1/-1/\!\!/0/-\infty)^{+k+1} \simeq\; \mathrm{E}(1/-1/\!\!/0/-2)^{+k+1} \simeq\; \mathrm{Ext}^0_R(\mathrm{H}_{k+1}(G;R),M)\,.$$

Mittels einer Fundamentalsequenz genügt es für die zweite Isomorphie zu zeigen, daß $\mathrm{E}(-1/-\infty/\!\!/-2/0^{-1})^{+k+2} = 0$. Wegen eines Monomorphismus dieses Objekts in folgendes Objekt genügt es zu zeigen, daß $\mathrm{E}(-1/-\infty/\!\!/-2/-\infty)^{+k+2} = 0$. Aber es ist $\mathrm{H}^{k+2}\mathrm{t}_{\mathrm{II}}X(-2/-\infty) = 0$. Dies zeigt die Behauptung.

Die drei letzten Behauptungen zusammengenommen liefern das Gewünschte.

Aufgabe 91.

(1) Wir haben ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, shift left, "a'"] & X \arrow[l, shift left, "t"] \\ Y' \arrow[u, shift left, "i_1"] \arrow[r, "b'"'] & Y \arrow[u, "i_2"'] \end{tikzcd}$$

with $s \colon X' \to Y'$,

in R-Mod mit $a't = 1_{X'}$ und $i_1 s = 1_{Y'}$. Also ist $b'(i_2 ts) = i_1 a' ts = i_1 s = 1_{Y'}$. Somit ist b' eine Coretraktion. Mit Aufgabe 21 folgt, daß $Y' \longrightarrow Y \longrightarrow Y''$ split kurz exakt ist.

(2) Zunächst zeigen wir, daß Y azyklisch ist. Sei $k \in \mathbf{Z}$. Es ist $(\mathrm{H}^k Y \xrightarrow{\mathrm{H}^k i} \mathrm{H}^k X \xrightarrow{\mathrm{H}^k p} \mathrm{H}^k Y) = (\mathrm{H}^k Y \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathrm{H}^k Y)$. Also ist $\mathrm{H}^k p$ epimorph. Da $\mathrm{H}^k X \simeq 0$, folgt $\mathrm{H}^k Y \simeq 0$.

Zeigen wir nun, daß Y split azyklisch ist. Sei $k \in \mathbf{Z}$. Wir haben einen induzierten Morphismus von kurz exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B}^k X \arrow[r] & X^k \arrow[r] & \mathrm{B}^{k+1} X \\ \mathrm{B}^k Y \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{B}^k i"] & Y^k \arrow[r] \arrow[u, "i^k"'] & \mathrm{B}^{k+1} Y \arrow[u, "\mathrm{B}^{k+1} i"'] \end{tikzcd}$$

Da die obere split kurz exakt ist, gilt dies mit (1) auch für die untere. Mithin ist Y split azyklisch.

(3) Ist Y split azyklisch, so faktorisiert 1_Y über den split azyklischen Komplex Y, woraus $Y \simeq 0$ in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$ folgt, da nun $0 \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ und $Y \longrightarrow 0 \longrightarrow Y$ beide zur Identität komponieren.

Sei umgekehrt $Y \simeq 0$ in $\mathrm{K}(R\text{-Mod})$. Dann ist 1_Y nullhomotop, und also gibt es einen split azyklischen Komplex $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(R\text{-Mod})$ so, daß 1_Y über X faktorisiert. Dank (2) ist nun Y split azyklisch.

Literatur

[1] Adem, A.; Milgram, R. J., *Cohomology of Finite Groups,* Springer Grundlehren 309, 1994.

[2] Barnes, D. W., *Spectral sequence constructors in algebra and topology,* Mem. Am. Math. Soc. 317, 1985.

[3] Benson, D. J., *Representations and cohomology I,* Cambridge, 1991.

[4] Benson, D. J., *Representations and cohomology II,* Cambridge, 1991.

[5] Beyl, R., *The spectral sequence of a group extension,* Bull. Sc. math., 2e série, 105, p. 417-434, 1981.

[6] Brown, K. S., *Cohomology of Groups,* Springer GTM 87, 1982.

[7] Cartan, H., Eilenberg, S., *Homological Algebra,* Princeton, 1956.

[8] Deligne, P., *Décompositions dans la catégorie dérivée,* Proc. Symp. Pure Math. 55, p. 115–127, 1994.

[9] Gaschütz, W., *Nichtabelsche p-Gruppen besitzen äußere p-Automorphismen,* J. Alg. 4, p. 1–2, 1966.

[10] Gelfand, S.I., Manin, Y.I., *Methods of Homological Algebra,* Springer, 1996.

[11] Grothendieck, A., *Sur quelques points d'algèbre homologique,* Tohoku Math. J. 9, p. 119-221, 1957.

[12] Halloway, N., message board contribution, 1997.

[13] Huppert, B., *Endliche Gruppen I*, 1967.

[14] Kimmerle, W., *Cohomologie von Gruppen,* Vorlesung, Stuttgart, 1994.

[15] Künzer, M., *Comparison of spectral sequences involving bifunctors,* Doc. Math. 13, 677-737, 2008.

[16] Künzer, M., *Homologische Algebra,* Skript, Bremen, 2010.

[17] MacLane, S., *Homology,* Springer Grundlehren 114, 1975.

[18] MacLane, S., *Categories for the Working Mathematician,* Springer GTM 5, 2nd ed., 1997.

[19] Schmid, P., *Cohomologische Methoden in der Gruppentheorie,* Skript, Tübingen, 1977.

[20] Serre, J.P., *Corps Locaux,* Hermann, 1968.

[21] Serre, J.P., *Groupes Finis,* Cours ENS, arxiv, math.GR/0503154, 1979.

[22] Verdier, J.L., *Des catégories dérivées des catégories abéliennes,* Astérisque 239, 1996.

[23] Weibel, C., *An introduction to homological algebra,* Cambridge studies 38, 1993.

Viele grundlegende Dinge finden sich bereits in dem Klassiker [**7**]; cf. insbesondere [**7,** XII, XIV.§4, XV, XVII]. Der Band [**3**] ist eine zugängliche Einführung in die Cohomologie von Gruppen. In [**18**] wird unter anderem die Homologische Algebra im etwas allgemeineren Rahmen abelscher Kategorien behandelt. In [**21,** Chap. 7] finden sich gruppentheoretische Anwendungen des Transfers. In [**1,** VI.5] werden imposante Berechnungen von Cohomologieringen angestellt. In [**11,** Th. 2.4.1] findet sich die Grothendieck-Spektralsequenz, ein Vorläufer findet sich bereits in [**7,** XVII.§7]