M. Künzer

Cohomologie von Gruppen, SS 05

Lösung 1

Aufgabe 1.

- Wir wollen zeigen, daß es sich bei $\mathcal{C}^\circ$ wieder um eine Kategorie handelt.

  Es ist $s_{\mathcal{C}^\circ} \circ i_{\mathcal{C}^\circ} = t_{\mathcal{C}} \circ i_{\mathcal{C}} = 1_{\mathcal{C}_0}$, und genauso $t_{\mathcal{C}^\circ} \circ i_{\mathcal{C}^\circ} = s_{\mathcal{C}} \circ i_{\mathcal{C}} = 1_{\mathcal{C}_0}$.

  Beachte, daß ${}_{\mathcal{C}^\circ}(X,Y) = {}_{\mathcal{C}}(Y,X)$. Kurz gesagt, die entgegengesetzte Kategorie wird durch "Umkehren aller Morphismenrichtungen" erhalten.

  Ferner ist für Objekte X, Y, Z von $\mathcal{C}^\circ$ die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} {}_{\mathcal{C}^\circ}(X,Y) & \times & {}_{\mathcal{C}^\circ}(Y,Z) & \longrightarrow & {}_{\mathcal{C}^\circ}(X,Z) \\ (f & , & g) & \longmapsto & f \cdot_{\mathcal{C}^\circ} g \end{array}$$

  gegeben durch

$$\begin{array}{ccccc} {}_{\mathcal{C}}(Y,X) & \times & {}_{\mathcal{C}}(Z,Y) & \longrightarrow & {}_{\mathcal{C}}(Z,X) \\ (f & , & g) & \longmapsto & g \cdot_{\mathcal{C}} f\ . \end{array}$$

  Es folgt für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ in $\mathcal{C}^\circ$, i.e. für $X \xleftarrow{f} Y \xleftarrow{g} Z \xleftarrow{h} W$ in $\mathcal{C}$, die Assoziativität aus

$$\begin{array}{rcl} (f \cdot_{\mathcal{C}^\circ} g) \cdot_{\mathcal{C}^\circ} h & = & h \cdot_{\mathcal{C}} (g \cdot_{\mathcal{C}} f) \\ & = & (h \cdot_{\mathcal{C}} g) \cdot_{\mathcal{C}} f \\ & = & f \cdot_{\mathcal{C}^\circ} (g \cdot_{\mathcal{C}^\circ} h)\ . \end{array}$$

  Beachte, daß wegen $i_{\mathcal{C}^\circ} = i_{\mathcal{C}}$ der Morphismus $Y \xrightarrow{1_Y} Y$ sowohl in $\mathcal{C}$ als auch in $\mathcal{C}^\circ$ die Identität auf Y darstellt. Daher folgt für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}^\circ$, i.e. für $X \xleftarrow{f} Y \xleftarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}$,

$$\begin{array}{rcl} f \cdot_{\mathcal{C}^\circ} 1_Y & = & 1_Y \cdot_{\mathcal{C}} f \\ & = & f\ , \\ 1_Y \cdot_{\mathcal{C}^\circ} g & = & g \cdot_{\mathcal{C}} 1_Y \\ & = & g\ . \end{array}$$

  Somit ist $\mathcal{C}^\circ$ eine Kategorie.

- Da $\mathcal{C}^\circ$ aus $\mathcal{C}$ durch Vertauschen der Rolle von Start- und Zielobjekt und durch entsprechendes Vertauschen der Kompositionsreihenfolge hervorgeht, stellt zweimaliges jeweiliges Vertauschen die ursprüngliche Kategorie wieder her. Es ist also $(\mathcal{C}^\circ)^\circ = \mathcal{C}$.

- Wir behaupten, daß der Begriff des Epimorphismus dual zum Begriff des Monomorphismus ist.

  Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}^\circ$ gegeben. Wir behaupten, daß $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}^\circ$ genau dann ein Epimorphismus ist, wenn $X \xleftarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}$ ein Monomorphismus ist.

  Sei $X \xrightarrow{f} Y \overset{t}{\underset{t'}{\rightrightarrows}} T$ in $\mathcal{C}^\circ$ gegeben, i.e. $X \xleftarrow{f} Y \overset{t}{\underset{t'}{\leftleftarrows}} T$ in $\mathcal{C}$.
  Aus $f \cdot_{\mathcal{C}^\circ} t = f \cdot_{\mathcal{C}^\circ} t'$ folgern zu können, daß $t = t'$ ist nach Definition von $(\cdot_{\mathcal{C}'})$ aber äquivalent dazu, aus $t \cdot_{\mathcal{C}} f = t' \cdot_{\mathcal{C}} f$ folgern zu können, daß $t = t'$. Damit ist f in $\mathcal{C}^\circ$ ein Epimorphismus genau dann, wenn f in $\mathcal{C}$ ein Monomorphismus ist, wie behauptet.

- Wir behaupten, daß der Begriff des Isomorphismus ein selbstdualer Begriff ist.

  Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}^\circ$ gegeben, d.h. $X \xleftarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}$. Es gibt genau dann ein $Y \xrightarrow{g} X$ in $\mathcal{C}^\circ$ mit $f \cdot_{\mathcal{C}^\circ} g = 1_X$ und $g \cdot_{\mathcal{C}^\circ} f = 1_Y$, wenn es zu $X \xleftarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}$ ein $Y \xleftarrow{g} X$ in $\mathcal{C}$ mit $g \cdot_{\mathcal{C}} f = 1_X$ und $f \cdot_{\mathcal{C}} g = 1_Y$ gibt – nämlich dasselbe g.

- Wir behaupten, daß der Begriff des initialen Objekts dual zu dem des terminalen Objekts ist.

  Sei $X \in \mathcal{C}_0$. Es ist X genau dann initial in $\mathcal{C}^\circ$, wenn $\#_{\mathcal{C}^\circ}(X,Y) = 1$ für alle $Y \in (\mathcal{C}^\circ)_0$ ist. Wegen $(\mathcal{C}^\circ)_0 = \mathcal{C}_0$ und wegen ${}_{\mathcal{C}^\circ}(X,Y) = {}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ ist dies äquivalent dazu, daß $\#_{\mathcal{C}}(Y,X) = 1$ für alle $Y \in \mathcal{C}_0$ ist, i.e. dazu, daß X ein terminales Objekt in $\mathcal{C}$ ist.

- Wir behaupten, daß der Begriff des Nullobjekts selbstdual ist.

  Sei $X \in \mathcal{C}_0$. Es ist nach vorstehender Überlegung X genau dann initial und terminal in $\mathcal{C}^\circ$, wenn es terminal und initial in $\mathcal{C}$ ist.

Aufgabe 2.

(1) Die Aussage ist richtig. Denn sei $fg = 1_X$, und seien $T \overset{t}{\underset{t'}{\rightrightarrows}} X$ mit $tf = t'f$ gegeben. Dann folgt $t = tfg = t'fg = t'$.

(2) Die Aussage ist falsch. Sei z.B. $\mathcal{C} = \mathbf{Z}$-Mod, und sei $(X \xrightarrow{f} Y) = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$. Die f zugrundeliegende Abbildung ist injektiv. Also folgt aus $T \overset{t}{\underset{t'}{\rightrightarrows}} X$ mit $tf = t'f$, d.h. aus $(m)tf = (m)t'f$ für alle $m \in T$, daß $(m)t = (m)t'$, und also, daß $t = t'$. Somit ist f monomorph. Dahingegen ist ${}_{\mathbf{Z}\text{-Mod}}(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \{0,1\} \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, und keiner der beiden Morphismen in die Gegenrichtung ist eine Retraktion zu f. Somit ist f keine Coretraktion.

(3) Die Aussage ist richtig. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ monomorph, und gebe es ein $X \xleftarrow{g} Y$ mit $gf = 1_Y$. Dann ist $fgf = f$, und wegen f monomorph auch $fg = 1_X$.

(4) Die Aussage ist falsch. Sei z.B. $\mathcal{C} =$ (Ringe), und sei $(X \xrightarrow{f} Y) = (\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Q})$ die Inklusionsabbildung, die z nach $\frac{z}{1}$ schickt. Da die zugrundeliegende Abbildung injektiv ist, liegt ein Monomorphismus vor (vgl. das Argument zu (2)). Wir behaupten, daß ein Epimorphismus vorliegt. Seien $\mathbf{Q} \overset{t}{\underset{t'}{\rightrightarrows}} T$ zwei Ringmorphismen, und sei $ft = ft'$, in anderen Worten, sei $t|_{\mathbf{Z}} = t'|_{\mathbf{Z}}$. Sei $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$. Wir haben zu zeigen, daß $(\frac{a}{b})t = (\frac{a}{b})t'$. Zunächst ist nach Voraussetzung $(\frac{a}{1})t = (\frac{a}{1})t'$, so daß es zu zeigen genügt, daß $(\frac{1}{b})t = (\frac{1}{b})t'$. Nun ist aber

$$(\tfrac{1}{b})t \;=\; (\tfrac{1}{b})t(\tfrac{b}{1})t'(\tfrac{1}{b})t' \;=\; (\tfrac{1}{b})t(\tfrac{b}{1})t(\tfrac{1}{b})t' \;=\; (\tfrac{1}{b})t' \,.$$

(5) Die Aussage ist richtig. Denn sei $T \overset{t}{\underset{t'}{\rightrightarrows}} X$ mit $tf = t'f$ gegeben. Es folgt $tfg = t'fg$, und wegen fg monomorph in der Tat, daß $t = t'$.

Aufgabe 3.

(1) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung von Mengen. Wir wollen für f folgende Implikationen zeigen.

$$\text{monomorph} \Longrightarrow \text{injektiv} \Longrightarrow \text{Coretraktion} \Longrightarrow \text{monomorph}$$

Coretraktion $\Longrightarrow$ monomorph. Siehe 2 (1).

Monomorph $\Longrightarrow$ injektiv. Seien $x,\ x' \in X$ mit $(x)f = (x')f$ gegeben. Sei $T = \{m\}$ eine einelementige Menge, und sei $(m)t := x$ und $(m)t' := x'$. Da $(m)tf = (x)f = (x')f = (m)t'f$, ist $tf = t'f$, und daher $t = t'$ wegen f monomorph. Dies bedeutet aber gerade, daß $x = m(t) = (m)t' = x'$.

Injektiv $\Longrightarrow$ Coretraktion. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ injektiv. Wir wollen eine Abbildung $Y \xrightarrow{g} X$ konstruieren mit $fg = 1_X$. Sei $x_0 \in X$ beliebig gewählt. Sei

$$\begin{array}{ccl} Y & \xrightarrow{g} & X \\ y & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{falls } (x)f = y \\ x_0 & \text{falls } y \notin (X)f\ . \end{cases} \end{array}$$

(2) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung von Mengen. Wir wollen für f folgende Implikationen zeigen.

$$\text{epimorph} \Longrightarrow \text{surjektiv} \Longrightarrow \text{Retraktion} \Longrightarrow \text{epimorph}$$

Retraktion $\Longrightarrow$ epimorph. Dual zu 2 (1).

Epimorph $\Longrightarrow$ surjektiv. Sei $Y \xrightarrow{t} \{0,1\}$ dadurch erklärt, daß $(y)t = 0$ stets. Sei $Y \xrightarrow{t'} \{0,1\}$ dadurch erklärt, daß $(y)t' = 0$, falls $y \in (X)f$, und $(y)t' = 1$ sonst. Nun ist $ft = ft'$, also, wegen f epimorph, auch $t = t'$, was aber gerade besagt, daß $Y \smallsetminus (X)f = \emptyset$.

Surjektiv $\Longrightarrow$ Retraktion. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ surjektiv. Wir wollen eine Abbildung $Y \xrightarrow{g} X$ konstruieren mit $gf = 1_Y$. Dazu wählen wir für jedes $y \in Y$ aus der nichtleeren Menge $f^{-1}(\{y\})$ ein Element $g(y)$ aus, unter Verwendung des Auswahlaxioms.

(3) Ist die zugrundeliegende Abbildung injektiv, so ist der Morphismus monomorph, wie man durch Einsetzen von Elementen sieht. Zu zeigen bleibt die umgekehrte Richtung. Sei also $X \xrightarrow{f} Y$ ein Monomorphismus von R-Moduln. Wir wollen zeigen, daß f injektiv ist. Sei K der Kern von f, sei $K \xrightarrow{i} X$ seine Inklusion nach X, und sei $K \xrightarrow{0} X$ die Nullabbildung. Dann ist $if = 0 = 0f$, und also, wegen f monomorph, $i = 0$, d.h. $K = 0$.

(4) Ist die zugrundeliegende Abbildung surjektiv, so ist der Morphismus epimorph, wie man durch Einsetzen von Elementen sieht. Zu zeigen bleibt die umgekehrte Richtung. Sei also $X \xrightarrow{f} Y$ ein Epimorphismus von R-Moduln. Wir wollen zeigen, daß f surjektiv ist. Sei $C := Y/(X)f$ der Cokern von f, sei $Y \xrightarrow{n} C$ die Restklassenabbildung, und sei $Y \xrightarrow{0} C$ die Nullabbildung. Es ist $fn = 0 = f0$, und also, wegen f epimorph, $n = 0$, d.h. $C = 0$.

(5) Ist die zugrundeliegende Abbildung surjektiv, so ist der Morphismus epimorph, wie man durch Einsetzen von Elementen sieht. Zu zeigen bleibt die umgekehrte Richtung. Wir folgen der Anleitung in [**?**, p. 21, Ex. 5]. Sei $G \xrightarrow{f} H$ ein epimorpher Gruppenmorphismus. Schreibe $M := (G)f$ für sein Bild.

Ist $[H : M] = 1$, so ist f surjektiv und wir sind fertig.

Ist $[H : M] = 2$, so ist $M \trianglelefteq H$. Komposition von f mit der trivialen Abbildung nach H/M und mit der Restklassenabbildung nach H/M zeigt, daß f nicht epimorph sein kann, und die Fallvoraussetzung hat einen Widerspruch zur Folge.

Bleibt der Fall, in welchem $[H : M] \geq 3$ ist, zu betrachten. Bezeichne $\mathcal{S}_H$ die Gruppe der Bijektionen von H auf sich, mit der Komposition $\sigma\rho$ als Multiplikation von $\sigma,\ \rho \in \mathcal{S}_H$.

Sei $H \xrightarrow{c} \mathcal{S}_H$ der Gruppenmorphismus, der h auf die Bijektion $H \longrightarrow H,\ x \longmapsto xh$ schickt (Cayley-Injektion).

Definieren wir nun ein $\sigma \in \mathcal{S}_H$ wie folgt. Seien $a,\, b \in H$ mit $\#\{M, aM, bM\} = 3$. Setze

$$\begin{array}{rcl} H & \xrightarrow{\sigma} & H \\ h & \longmapsto & \begin{cases} ba^{-1}h & \text{für } h \in aM \\ ab^{-1}h & \text{für } h \in bM \\ h & \text{für } h \in M \smallsetminus (Ma \cup Mb)\ . \end{cases} \end{array}$$

Es hat σ die Ordnung 2. Sei nun $H \xrightarrow{c^\sigma} \mathcal{S}_H$ der Gruppenmorphismus, der h auf die Bijektion $\sigma(x \longmapsto xh)\sigma$ schickt.

Wir behaupten, daß $fc^\sigma = fc$, und wegen f epimorph dann also $c^\sigma = c$. Sei $m \in M$. Wir haben zu zeigen, daß $mc^\sigma = mc$. Sei $x \in H$. Wir haben zu zeigen, daß $x(mc^\sigma) = x(mc)$. Nun aber ist

$$x(mc^\sigma) \;=\; x\sigma(x \longmapsto xm)\sigma = (x\sigma)m\sigma\ ,$$

wohingegen

$$x(mc) \;=\; xm\ .$$

Zu zeigen ist also, daß $(x\sigma)m = (xm)\sigma$. Da aber x und xm in derselben Linksnebenklasse modulo M liegen, multipliziert σ dasselbe Element zu x wie zu xm von links dazu, und die beiden Elemente stimmen in der Tat überein.

Nun bildet c aber $a \in H$ auf $(x \longmapsto xa)$ ab, wohingegen c^σ das Element $a \in H$ auf $\sigma(x \longmapsto xa)\sigma$ schickt. Die Bijektion $(a)c \in \mathcal{S}_H$ schickt demgemäß 1_H auf a, während die Bijektion $(a)c^\sigma \in \mathcal{S}_H$ das Element 1_H auf $((1_H)\sigma \cdot a)\sigma = (a)\sigma = b$ schickt. Da $a \neq b$ ist also $(a)c \neq (a)c^\sigma$, daher $c \neq c^\sigma$, und die Fallvoraussetzung endet in einem Widerspruch.

Aufgabe 4.

(1) "Das" terminale Objekt in (Mengen) ist durch "die" einelementige Menge $\{*\}$ gegeben (es ist nur bis auf eindeutigen Isomorphismus bestimmt), das initiale Objekt durch die leere Menge $\emptyset$. Da initiales und terminales Objekt nicht isomorph sind, gibt es kein Nullobjekt.

(2) Das initiale Objekt ist der Ring $\mathbf{Z}$, da die Abbildungsvorschrift $1_{\mathbf{Z}} \longmapsto 1_R$ stets einen Ringmorphismus von $\mathbf{Z}$ in einen beliebigen Ring R definiert, und 1_R auch das einzige mögliche Bild von $1_{\mathbf{Z}}$ ist. Das terminale Objekt ist der Nullring $0 = \{0\} = \{1\}$. Da initiales und terminales Objekt nicht isomorph sind, gibt es kein Nullobjekt.

(3) Das Nullobjekt in R-Mod ist durch den Nullmodul $0 = \{0\}$ gegeben.