R: kommutativer Ring

z.B. ist $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
kein Integritätsbereich:
$\underbrace{(2,0)}_{\neq (0,0)} \cdot \underbrace{(0,5)}_{\neq (0,0)} = (0,0)$

R Integritätsbereich, falls $\underbrace{1_R \neq 0_R}_{\text{d.h. } R \text{ nicht der Nullring}}$

$R \setminus \{0\}$

und falls $\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\lambda_a} & R \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$ inj. für $a \in R^\times$

R Körper, falls $1_R \neq 0_R$

und falls $\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\lambda_a} & R \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$ bij. für $a \in R^\times$

Dh. $\emptyset \neq R^\times = U(R)$.

Eine kommutative R-Algebra
ist ein kommutativer Ring S, zusammen
mit einem Ringmorphismus $R \xrightarrow{\alpha} S$.

also $\alpha(1) = 1$,
$\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y)$
$\alpha(x \cdot y) = \alpha(x) \cdot \alpha(y)$
stets

R: komm. Ring

damit Polynome auf traditionelle Weise schreibbar

I: Menge

$X := \{ X_i : i \in I \}$ mit $I \to X : i \mapsto X_i$ bij.

$$R[X] = \Big\{ \sum_{e \in E_I} r_e X^e : r_e \in R, \{ e \in E_I : r_e \neq 0 \} \text{ endlich} \Big\}$$

$$E_I = \Big\{ (e_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} : \{ i \in I : e_i \neq 0 \} \text{ endl.} \Big\}$$

$$X^e = \prod_{i \in I} X_i^{e_i}$$

Universelle Eigenschaft: Haben Abb. $X \xrightarrow{v} R[X]$, $X_i \mapsto X_i$.

Sei $T = (T, \beta)$ eine R-Algebra

Strukturmorphismus $R \xrightarrow{\beta} T$

Sei $X \xrightarrow{u} T$ eine Abbildung.

Dann gibt es genau einen R-Alg.mor.

$$R[X] \xrightarrow{f} T$$

mit $f \circ v = u$

$$\begin{tikzcd}
R[X] \arrow[rr, dashed, "\exists! f"] & & T \\
& X \arrow[ul, "v"] \arrow[ur, "u"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}$$

← R-Alg. mor.

← Abb.

R: komm. Ring

$S = (S, \alpha)$, $T = (T, \beta)$: komm. R-Alg.

- $\mathfrak{a} \subseteq S$ <u>Ideal</u>, falls abelsche Untergruppe und falls aus $s \in S$, $a \in \mathfrak{a}$ auch $sa \in \mathfrak{a}$ folgt.

$$S \xrightarrow{\rho = \rho_{S,\mathfrak{a}}} S/\mathfrak{a} \quad \text{Restklassenmorphismus}$$

$$s \longmapsto s + \mathfrak{a}$$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\rho\circ\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"'] & \\ S \arrow[r, "\rho"'] & S/\mathfrak{a} \end{tikzcd} \Rightarrow \left(S/\mathfrak{a}, \rho\circ\alpha\right) \text{ ist R-Alg. und } \rho \text{ ist R-Alg. mor.}$$

- Universelle Eigenschaft:

Sei $S \xrightarrow{f} T$ ein R-Alg. mor. mit $f(\mathfrak{a}) = 0$.

Dann gibt es genau einen R-Alg. mor. $S/\mathfrak{a} \xrightarrow{\bar{f}} T$ mit $\bar{f} \circ \rho = f$.

Nämlich: $\bar{f}(s + \mathfrak{a}) = f(s)$ für $s \in S$.

$$\begin{tikzcd} S/\mathfrak{a} \arrow[rr, dashed, "\bar{f}"] & \circlearrowleft & T \\ & S \arrow[ul, "\rho"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

← Konkurrent zu ρ

R: komm. Ring

S: komm. R-Algebra

- $\mathfrak{m} \subseteq S$ maximales Ideal

  $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $S/\mathfrak{m}$ Körper

  $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{m}$ maximal unter den Idealen $\neq S$

- $\mathfrak{p} \subseteq S$ Primideal

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $S/\mathfrak{p}$ integer

  $\overset{!}{\Longleftrightarrow}$ $\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ \mathfrak{p} \neq S \\ \bullet\ \text{sind } x, y \in S \text{ mit } xy \in \mathfrak{p}, \text{ dann} \\ \quad \text{ist } x \in \mathfrak{p} \text{ oder } y \in \mathfrak{p} \end{array} \right.$ (Bem. 39)

- $\mathfrak{p} \subseteq S$ Primärideal

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $S/\mathfrak{p}$ fast integer

  jeder Nullteiler von $S/\mathfrak{p}$ ist nilpotent und $0_{S/\mathfrak{p}} \neq 1_{S/\mathfrak{p}}$

  $\overset{!}{\Longleftrightarrow}$ $\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ \mathfrak{p} \neq S \\ \bullet\ \text{ist } x \in S \text{ und } y \in S \setminus \mathfrak{p} \text{ und } xy \in \mathfrak{p}, \\ \quad \text{dann } \exists\, k \geq 0 \text{ mit } x^k \in \mathfrak{p} \end{array} \right.$ (Bem. 40)

Bsp 37 $a_1, a_2 \in R$

$\leadsto \quad u_{a_1,a_2} : R[X_1, X_2] \longrightarrow R$ surjektiver R-Alg-Morph.

$X_1 \longmapsto a_1$

$X_2 \longmapsto a_2$

Beh.: $\operatorname{Kern}(u_{a_1,a_2}) \overset{!}{=} (X_1 - a_1, X_2 - a_2) \subseteq R[X_1, X_2]$.

$\supseteq$: Erzeuger gehen auf 0.

$\overset{!}{\subseteq}$: Sei $f(X_1, X_2) \in R[X_1, X_2]$ mit $0 = u_{a_1,a_2}(f(X_1, X_2)) = f(a_1, a_2)$.

R: komm. Ring, S: komm. R-Algebra

Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq S$ sei das Radikal:

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{ s \in S : \exists n \in \mathbb{Z}_{>0} \; s^n \in \mathfrak{a} \}$$

- $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}}$
- Ist $\mathfrak{p} \subseteq S$ ein Primideal, dann ist $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}}$
- Ist $\mathfrak{p} \subseteq S$ ein Primärideal, dann ist $\sqrt{\mathfrak{p}}$ ein Primideal

R: komm. Ring

S: komm. R-Alg.

Es heißt ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq S$ endlich erzeugt, wenn es ein $k \geq 0$ und $a_1, \dots, a_k \in S$ mit

$$\mathfrak{a} = \underbrace{(a_1, \dots, a_k)}$$

Menge aller Linearkomb. der a_i mit Koeff. in S

gibt.

Es heißt S noethersch, wenn jedes Ideal in S endlich erzeugt ist.

Es heißt S Hauptidealalgebra, wenn jedes Ideal von S von einem Element erzeugt ist.

<u>Lem. 53</u>: Es ist S genau dann noethersch, wenn jede aufsteigende abzählbare Kette

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \dots$$

von Idealen in S stationär wird, d.h. wenn ein $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ existiert mit

$$\mathfrak{a}_l = \mathfrak{a}_i \quad \text{für } i \in \mathbb{Z}_{\geq l}.$$

Reparaturen

Bem 44 $\mathfrak{p}$ als maximal voraussetzen, Beweis anpassen

Bsp 45 $R = K$ Körper, $(X_1, X_2) \subseteq R[X_1, X_2]$ max.

Bem 52 komplett neu

R: komm. Ring, S: komm. R-Algebra

~~Lemma~~ Satz 55 (Hilberts Basissatz)

Sei X ein einzelnes Element.

Ist S noethersch, – Jedes Ideal in S ist e.e. Äquivalent: Jede aufsteigende abzählb. Kette von Idealen wird stationär

dann ist auch $S[X]$ noethersch.

Korollar 56

Sei $n \geq 0$. Seien $X_1, \ldots, X_n$ Elemente.

Sei $\mathfrak{a} \subseteq S[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal.

Ist S noethersch,

dann ist auch

$$S[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a} \quad \text{noethersch.}$$

Somit sind die meisten kommutativen Ringe aus der geometrischen Praxis noethersch.

R: komm. Ring, S: komm. R-Alg.
"(S, α)"

Satz 57: Sei S noethersch.
Es enthält S nur endlich viele minimale Primideale.

Satz 62: Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von S.
Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und Primärideale

$$\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$$

mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_k$.

---

§ 1.2. Konstruktionen

§ 1.2.1. Lokalisierung

Elemente, die invertierbar gemacht werden sollen, "Nenner"

Def 63 Teilmenge $N \subseteq S$ heißt multiplikativ, falls $1 \in N$ und falls für $x, y \in S$:

$$x, y \in N \Rightarrow xy \in N$$

Bsp $\mathfrak{p} \subseteq S$ Primideal
$\Rightarrow S \setminus \mathfrak{p}$ mult.

R: komm. Ring, S: komm. R-Alg.

$N \subseteq S$: mult. Teilmenge

$$S/\!/N = \left\{ \frac{s}{n} : s \in S,\ n \in N \right\}$$

Quotientenalgebra

wobei $\frac{s}{n} = \frac{s'}{n'}$

$\iff \exists\, x \in N \quad x s n' = x s' n$

R-Algebrenmorphismus

$$S \xrightarrow{\lambda = \lambda_{S,N}} S/\!/N$$

$$s \longmapsto \frac{s}{1}$$

Es ist $\lambda_{S,N}(N) \subseteq U(S/\!/N)$.

Universelle Eigenschaft:

Sei T eine komm. R-Alg.

Sei $S \xrightarrow{f} T$ R-Alg.mo. mit $f(N) \subseteq U(T)$.

Dann gibt es genau einen R-Alg.mor

$$S/\!/N \xrightarrow{f'} T$$

mit $f' \circ \lambda_{S,N} = f$. Es ist $f'\left(\frac{s}{n}\right) = f(s) \cdot f(n)^{-1}$.

$$\boxed{\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda_{S,N}"'] & T \\ S/\!/N \arrow[ur, dashed, "\exists!\, f'"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", near start] & \end{tikzcd}}$$

R : komm. Ring, S: komm. R-Alg.

S **lokal**, falls es in S genau ein max. Ideal gibt.

D.h. falls $S \setminus U(S)$ ein Ideal in S ist.

Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(S)$. Sei $N := S \setminus \mathfrak{p}$.

Schreibe $S_\mathfrak{p} := S /\!\!/ N$.

Es ist $S_\mathfrak{p}$ lokal mit max. Ideal $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$.

Sei $x \in S$. Sei $N := \{x^k : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$

Schreibe $S_x := S /\!\!/ N$.

Lemma 76 Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in S.

Es ist $\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(S) : \mathfrak{p} \geq \mathfrak{a}\}$

Beweis :

Ü :

A 18 (1, 2) :

Voraussetzen, daß

$x \in S^\times \setminus U(S)$

[Wir haben in (1) gebraucht:
x nicht prim $\Rightarrow$ $\exists\, y, z \notin (x)$ mit $yz \in (x)$

Stimmt nicht, falls $(x) = S$.]

R: komm. Ring

Bem 78 (und Def.)

für $i,j \in I$ gibt es $k \in I$ mit $k \geq i$ und $k \geq j$

reflexiv & transitiv

I : nichtleeres gerichtetes Quasiposet

[Kategorie, für welche zwischen zwei Objekten ≤ 1 Morphismus]

$$\mathcal{S} = \left((S_i)_{i \in I} , \left(S_j \xleftarrow{u_{j,i}} S_i \right)_{j,i \in I,\, j \geq i} \right) :$$

$S_i = (S_i, \alpha_i)$

Diagramm von komm. R-Alg.

$$\begin{cases} u_{k,j} \circ u_{j,i} = u_{k,i} \quad \text{für } k \geq j \geq i \\ u_{i,i} = \mathrm{id}_{S_i} \end{cases}$$

$$\Pi = \{ (i, s_i) : i \in I,\ s_i \in S_i \}$$

$(i, s_i) \sim (j, s_j)$

$\iff \exists\, k \in I$ mit $k \geq i$, $k \geq j$, $u_{k,i}(s_i) = u_{k,j}(s_j)$.

Äql. bzgl. $(\sim)$

$$\varinjlim_{i \in I} S_i = \varinjlim \mathcal{S} = \{ [i, s_i] : (i, s_i) \in \Pi \}$$

Setze: $[i, s_i] \underset{\cdot}{+} [j, s_j] := [k, u_{k,i}(s_i) \underset{\cdot}{+} u_{k,j}(s_j)]$

für ein $k \in I$ mit $k \geq i$ und $k \geq j$.

$\perp$ (fast)

$\rightsquigarrow \varinjlim \mathcal{S}$ ist komm. Ring.

Dabei: $0_{\varinjlim \mathcal{S}} = [i, 0_{S_i}]$, $1_{\varinjlim \mathcal{S}} = [i, 1_{S_i}]$ für jedes $i \in I$.

Ringmorphismus: $S_i \xrightarrow{\omega_i^{\mathcal{S}}} \varinjlim \mathcal{S}$, $s_i \mapsto [i, s_i]$,

Für $j, i \in I$ mit $j \geq i$: $\omega_j^{\mathcal{S}} \circ u_{j,i} = \omega_i^{\mathcal{S}}$.

Sei $\alpha := \omega_i^{\mathcal{S}} \circ \alpha_i$ für ein beliebig gewähltes $i \in I$.

$\rightsquigarrow \underbrace{\varinjlim \mathcal{S}}_{\text{direkter Limes des Diagramms } \mathcal{S}} = (\varinjlim \mathcal{S}, \alpha)$ komm. R-Alg., $\omega_i^{\mathcal{S}}$ R-Alg.mor.

R: komm. Ring, S: komm. R-Alg.

Bem. 80

Für $x \in S$ sei $D_x = D_{S,x} := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(S) : x \notin \mathfrak{p}\}$

Für $y, x \in S$ sei $y \geq x$, falls $D_y \subseteq D_x$ ist.

Sei $N_x = \{x^k : k \geq 0\}$

reflexiv und transitiv

(1) $(S, \leq)$ ist Quasiposet.

Ist $N \subseteq S$ multiplikativ, dann ist N ein nichtleeres gerichtetes Teilquasiposet von S.

(2) $y \geq x \iff \sqrt{(y)} \subseteq \sqrt{(x)}$

(3) Sei $y \geq x$. Dann gibt es den R-Alg.mor.

$$S_y \xleftarrow{v_{y,x}} S_x$$

$$\frac{s}{1}\cdot\left(\frac{x^k}{1}\right)^{-} \longleftarrow\!\shortmid \frac{s}{x^k}$$

Es ist $v_{y,x} \circ \lambda_{S,N_x} = \lambda_{S,N_y}$.

(4) Seien $z, y, x \in S$ mit $z \geq y \geq x$ gegeben.

Dann: $v_{x,x} = \mathrm{id}_{S_x}$, $v_{z,y} \circ v_{y,x} = v_{z,x}$

Lemma 79:

$\eta_\ell \circ u_{\ell,k} = \eta_k$

R: komm. Ring, I: Quasiposet

$$\mathcal{Y} = \left((S_i)_{i\in I},\ \left(S_j \xleftarrow{u_{j,i}} S_i \right)_{j,i\in I,\ j\geq i} \right) :$$

Diagramm von komm. R-Alg, $\mathcal{S}_i = (S_i, \alpha_i)$.

(üblich) (formal) R-Alg. mit Strukturmorph.

$$\varprojlim_{i\in I} S_i = \varprojlim \mathcal{Y} \qquad \rho : R \to \varprojlim \mathcal{Y} : r \mapsto (\alpha_i(r))_i$$

$$:= \left\{ (s_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} S_i \ :\ u_{l,k}(s_k) = s_l \text{ für } l,k\in I \text{ mit } l\geq k \right\}$$

heißt inverser Limes von $\mathcal{Y}$

Haben R-Alg'morph. $\varprojlim \mathcal{Y} \xrightarrow{\omega^j_{\mathcal{Y}}} S_j$ für $j\in I$

$(s_i)_i \longmapsto s_j$

mit $u_{l,k}\circ\omega^k_{\mathcal{Y}} = \omega^l_{\mathcal{Y}}$ für $l,k\in I$ mit $l\geq k$.

Lemma 83 (Universelle Eigenschaft des inversen Limes)

(T,γ): komm. R-Alg.

$T \xrightarrow{\xi^j} S_j$: R-Alg. morph. für $j\in I$

mit $u_{l,k}\circ \xi^k = \xi^l$ für $l,k\in I$ mit $l\geq k$

Dann gibt es genau einen R-Alg. morph.

$T \xrightarrow{\xi} \varprojlim \mathcal{Y}$ mit $\omega^j_{\mathcal{Y}}\circ\xi = \xi^j$ für $j\in I$.

Es ist $\xi(t) = (\xi^i(t))_i$

$$\begin{tikzcd}
S_k & & \\
S_i \arrow[u, "u_{k,i}"] \arrow[d, "u_{j,i}"'] & \varprojlim \mathcal{Y} \arrow[ul, "\omega^k_{\mathcal{Y}}"'] \arrow[l, "\omega^i_{\mathcal{Y}}"] \arrow[dl, "\omega^j_{\mathcal{Y}}"] & T \arrow[l, "\exists!\,\xi"] \arrow[ull, bend right, "\xi^k"'] \arrow[ll, bend right, "\xi^i"'] \arrow[dll, bend left, "\xi^j"] \\
S_j & &
\end{tikzcd}$$

R: komm. Ring

S: diskrete Bewertungsalgebra (DBA),

d.h. lokale, integre Hauptidealalgebra über R, mit max. Ideal (p)

(aka "System")

Diagramm $\mathcal{S}$ aus:

$$\begin{array}{ccc} S/(p^j) & \xleftarrow{u_{j,i}} & S/(p^i) \\ s+(p^j) & \longleftarrow\!\!\shortmid & s+(p^i) \end{array}$$

für $i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ mit $i \not< j$, d.h. $i \geq j$

(Hatte ich die Pfeile $u_{j,i}$ falsch herum an der Tafel?)

$$\{(s_i+(p^i)) : s_i \equiv_{p^j} s_j \text{ f. } i \geq j\} = \hat{S} := \varprojlim \mathcal{S}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & \hat{S} \arrow[llll, bend right, "\omega^1"'] \arrow[lll, "\omega^2"'] \arrow[ll, "\omega^3"'] & \\
S/(p^1) & S/(p^2) \arrow[l, "u_{1,2}"'] & S/(p^3) \arrow[l, "u_{2,3}"'] & \ldots \arrow[l] & \\
 & & & S \arrow[lll, bend left, "\rho_{S,(p^1)}"] \arrow[ll, bend left, "\rho_{S,(p^2)}"] \arrow[l, "\rho_{S,(p^3)}"] \arrow[uu, "\exists!\,\kappa_S"'] &
\end{tikzcd}$$

$s \longmapsto (s+(p^i))_i$

S komplett $:\Longleftrightarrow$ κ_S Isom.

Lemma 90

(1) κ_S ist injektiv

(2) $\kappa_S^{-1}((p^k)) = (p^k)$ für $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

(3) $\hat{S}$ ist DBA mit max. Ideal (p)

(4) $S/(p^k) \xrightarrow{\sim} \hat{S}/(p^k)$, $s+(p^k) \longmapsto s+(p^k)$

(5) Es ist $\hat{S}$ komplett

wir schreiben oft: $s := \kappa_S(s)$

$p \in \mathbb{Z}$ Primzahl

$$\hat{\mathbb{Z}}_{(p)} = \left\{ (z_i + (p^i))_i \;:\; z_i \in \mathbb{Z} \,,\; z_j \equiv_{p^i} z_i \text{ für } j \geq i \right\}$$

eigtl. $\mathbb{Z}_{(p)}$, aber Repr. in $\mathbb{Z}$ kann man finden

Finden $w_k \in [0, p-1]$ mit:

$$z_i \equiv_{p^i} \sum_{k \in [0, i-1]} w_k p^k \qquad (w_k \text{ liegen eindeutig fest})$$

Schreiben dann:

$$(z_i + (p^i))_i =: \lfloor w_0 \,|\, w_1 \,|\, w_2 \,|\, \dots \rfloor$$

$$\underbrace{\mathbb{Z}_{(p)}}_{\text{abzählbar}} \xrightarrow[\text{inj.}]{\iota_{\mathbb{Z}_{(p)}}} \underbrace{\hat{\mathbb{Z}}_{(p)}}_{\text{überabzählbar!}}$$

R: komm. Ring, S: noeth. R-Alg.

$(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}) = \{x \in S : x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\}$

$\mathfrak{a} \subset S$: Ideal

$\mathrm{Ass}(S,\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S) : \exists s \in S \setminus \mathfrak{a} \text{ mit } \mathfrak{p} = (\mathfrak{a} : (s))\}$

$\mathrm{Ass}(S) := \mathrm{Ass}(S,(0))$

$\mathfrak{p}$ ist assoziiert zu $\mathfrak{a}$

Bem 94: $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(S,\mathfrak{a}) \Rightarrow \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$

Bem 96: $\mathrm{Ass}(S,\mathfrak{a}) \neq \emptyset$

Lem 97: Sei $y \in S \setminus \mathfrak{a}$.

Sei $\mathfrak{b} := (\mathfrak{a} : (y))$.

- In $\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S) : \mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{b}\}$ existiert ein minimales Element
- Jedes minimale Element $\mathfrak{p}$ in $\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S) : \mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{b}\}$ ist assoziiert zu $\mathfrak{a}$

Bew. $S_\mathfrak{p}$ ist noethersch.

Es ist $\mathrm{Ass}(S_\mathfrak{p}, \mathfrak{b}_\mathfrak{p}) \neq \emptyset$.

R: komm. Ring, S: noeth. komm. R-Alg

Primärzerlegung $\mathfrak{a} = \bigcap_{i \in [1,k]} \mathfrak{q}_i$ heißt reduziert,

falls:

- $\sqrt{\mathfrak{q}_i} \neq \sqrt{\mathfrak{q}_j}$ für $i, j \in [1,k]$ mit $i \neq j$
- $\mathfrak{a} \subset \bigcap_{i \in [1,k] \setminus \{j\}} \mathfrak{q}_i$ für $j \in [1,k]$

Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq S$ besitzt eine reduzierte Primärzerlegung.

Lemma 102: $N \subseteq S$ mult.,

$\mathfrak{q} \subseteq S$ Primärideal mit $\sqrt{\mathfrak{q}} \cap N = \emptyset$.

Dann: $\mathfrak{q}/\!\!/_N \subseteq S/\!\!/_N$ Primärideal, $\sqrt{\mathfrak{q}/\!\!/_N} = \sqrt{\mathfrak{q}}/\!\!/_N$,

$\mathfrak{q} = \lambda_{S,N}^{-1}(\mathfrak{q}/\!\!/_N)$

Aufgabe 33 $\mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathrm{Ideale}(S)$, $\mathfrak{a} := \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$

(1) Für $\mathfrak{d} \in \mathrm{Ideale}(S)$ ist
$(\mathfrak{a} : \mathfrak{d}) = (\mathfrak{b} : \mathfrak{d}) \cap (\mathfrak{c} : \mathfrak{d})$

(2) Sei $x \in S$ mit $(\mathfrak{a} : (x))$ prim gegeben.
Es ist $(\mathfrak{c} : (x)) \subseteq (\mathfrak{b} : (x))$ oder $(\mathfrak{c} : (x)) \supseteq (\mathfrak{b} : (x))$

(3) $\mathrm{Ass}(S, \mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Ass}(S, \mathfrak{b}) \cup \mathrm{Ass}(S, \mathfrak{c})$

R : kommutativer Ring

S : komplette diskrete Bewertungsalgebra über R

Cauchyfolgen konvergieren   Hauptidealalgebra, integer, lokal, kein Körper

(p) : max. Ideal in S

Bem 108

$f(X) \in S[X]$ normiert

$g_n(X),\ h_n(X) \in S[X]$ normiert für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

Sei $f(X) \equiv_{p^n} g_n(X)\, h_n(X)$

$$(*)\ \begin{cases} g_{n+1}(X) \equiv_{p^n} g_n(X) \\ h_{n+1}(X) \equiv_{p^n} h_n(X) \end{cases} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Insbes.: $\deg(g_n)$ und $\deg(h_n)$ konstant in n.

Schreiben: $g_n(X) =: \sum_{i \geq 0} u_{n,i} X^i$, $h_n(X) =: \sum_{i \geq 0} v_{n,i} X^i$.

Sei $u_{n,i} \to u_i$, $v_{n,i} \to v_i$ für $i \geq 0$.

Cauchyfolgen wegen $(*)$

Sei $g(X) := \sum_{i \geq 0} u_i X^i$, $h(X) := \sum_{i \geq 0} v_i X^i$

Dann : $f(X) = g(X)\, h(X)$

$g(X) \equiv_p g_1(X)$

$h(X) \equiv_p h_1(X)$

Bew. $(s_n)_n$ Folge in S mit $s_{n+1} \equiv_{p^n} s_n$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$\Longrightarrow$ $s_n \to s$ mit $s \equiv_{p^n} s_n$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

R: kommr Ring

R-Modul : ab. Gp. $(M, +)$, mit Abb.

$$R \times M \xrightarrow{(\cdot)} M$$
$$(r, m) \longmapsto r \cdot m = rm$$

derart, daß (Mod 1-3) gelten.

(Mod 1) $1 \cdot m = m$ für $m \in M$

(Mod 2) $r \cdot (r' \cdot m) = (r \cdot r') m$ für $r, r' \in R$ und $m \in M$

(Mod 3) $(r + r')(m + m') = r \cdot m + r' \cdot m + r \cdot m' + r' m'$ für $r, r' \in R$, $m, m' \in M$

Oft: $M := (M, +, \cdot)$

Falls R ein Körper ist, ist ein R-Modul dasselbe wie ein R-Vektorraum

---

M, N: R-Moduln

Eine Abb. $M \xrightarrow{f} N$

heißt R-linear, falls

$$f(r \cdot m + r' \cdot m') = r \cdot f(m) + r' \cdot f(m')$$

für $r, r' \in R$ und $m, m' \in M$

R: komm. Ring

M, N: R-Moduln

formale endliche R-Linearkombinationen über der Menge $M \times N$

$$M \otimes_R N := R(M \times N) / {}_R\langle X \rangle ,$$

wobei
$$X = \{(rm + r'm', n) - r(m,n) - r'(m',n) : r, r' \in R,\ m, m' \in M,\ n \in N\}$$
$$\cup \{(m, rn + r'n') - r(m,n) - r'(m,n') : r, r' \in R,\ m \in M,\ n, n' \in N\}$$

$$M \otimes_R N = \Big\{ \sum_{(m,n) \in W} m \otimes n : W \subseteq M \times N \text{ endl.} \Big\}$$

$$\tau = \tau_{M,N} : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$$
$$(m,n) \longmapsto \tau(m,n) = m \otimes n$$

$:= (m,n) + {}_R\langle X \rangle$

erfüllt $\tau(rm + r'm', n) = r\tau(m,n) + r'\tau(m',n)$

und $\tau(m, rn + r'n') = r\tau(m,n) + r'\tau(m,n')$ stets

Universelle Eigenschaft:

Für $t : M \times N \longrightarrow T$ (R-Modul)

mit $t(rm + r'm', n) = r t(m,n) + r' t(m',n)$

und $t(m, rn + r'n') = r t(m,n) + r' t(m,n')$ stets $\Big\}$ (*)

gibt es genau eine R-lineare Abb. $\hat{t}$ mit $\hat{t} \circ \tau = t$.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\tau"'] & T \\ M \otimes_R N \arrow[ur, "\exists!\, \hat{t}"'] & \end{tikzcd}$$

mit (*)

$\exists!\ \hat{t}$ R-linear

R: komm. Ring, S: komm. R-Alg.

$\mathrm{Jac}(S) := \bigcap \{ m : m \subset S \text{ max. Ideal} \}$

Jacobson-Radikal

Lemma 127 $x \in S$. Äq. sind:

(1) $\exists\, g(X) \in R[X]$ normiert mit $g(x) = 0$

(2) Es ist x ganz über R,
i.e. es ist $R[x]$ endlich über R,
i.e. es ist $R[x]$ ein e.e. R-Modul

(3) Es ist x enthalten in einer R-Teilalgebra $T \subseteq S$, welche endlich ist über R

Bem. 128 Sei S ganz über R. Sei S integer.
Sei $\alpha : R \to S$ injektiv.

Es gilt: R ist Körper $\Longleftrightarrow$ S ist Körper.

neu

Beweis.

Zu $\Leftarrow$. Sei $x \in R^*$. Zz: $x \in U(R)$.

Es ist $y := \alpha(x)^{-1} \in U(S) \subseteq S$ ganz über R.

R: komm. Ring, S, T komm. R-Alg.

$f : S \to T$: R-Alg'morph.

Es heißt S **jacobsonsch**, wenn $\mathrm{Jac}(S/\mathfrak{p}) = (0)$ für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)$.

Bem 133:
Ist S jacobsonsch, dann ist für $\mathfrak{a} \in \mathrm{Ideale}(S)$:

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap \{ \mathfrak{m} : \mathfrak{m} \subset S \text{ max. Id. mit } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m} \}$$

Lemma 134: Äq. sind:

(1) Es ist S jacobsonsch

(2) Für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)$ und $x \in S \setminus \mathfrak{p}$ ist

ist $(S/\mathfrak{p})_{x+\mathfrak{p}}$ kein Körper

oder $S/\mathfrak{p}$ ein Körper

i.e. $\underbrace{(S/\mathfrak{p})_{x+\mathfrak{p}}}_{\text{allg. } T_y = T/\!\!/N \text{ mit } N = \{y^0, y^1, y^2, \dots\}}$ Kp. $\Rightarrow$ $S/\mathfrak{p}$ Kp.

R : komm. Ring

S, T : komm. R-Alg.

$S \xrightarrow{f} T$: R-Alg-morph.

Schnitt der maximalen Ideale

S heißt jacobsonsch, falls $\mathrm{Jac}(S/\mathfrak{p}) = 0$ für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)$.

Lemma 136 Sei S jacobsonsch. Sei $T = S[x]$ für ein $x \in T$.

Folgende Aussagen gelten:

(1) T ist jacobsonsch.

(2) Ist $\mathfrak{q} \subset T$ ein max. Ideal, dann ist auch $\mathfrak{p} := f^{-1}(\mathfrak{q}) \subset S$ ein maximales Ideal, und es ist $T/\mathfrak{q}$ endlich über $S/\mathfrak{p}$ via $S/\mathfrak{p} \longrightarrow T/\mathfrak{q}$: $s + \mathfrak{p} \mapsto f(s) + \mathfrak{q}$

Hilberts Nullstellensatz

"zu $\mathfrak{a}$ gehörige Varietät"

K : alg. abg. Kp.

$\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ Ideal

$$V := \{ (v_i)_i \in K^{\oplus n} : \text{es ist } a(v_1, \dots, v_n) = 0 \text{ für } a(X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{a} \}$$

von Algebra zur Geometrie

Dann wird

$$\{ g(X_1, \dots, X_n) \in K[X_1, \dots, X_n] : \text{es ist } g(v_1, \dots, v_n) = 0 \text{ für } (v_i)_i \in V \}$$

$$\parallel$$

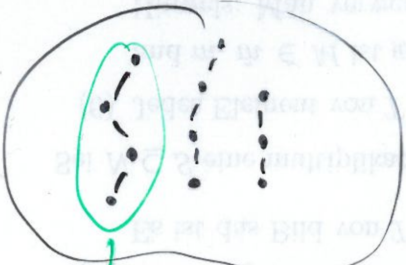
$$\sqrt{\mathfrak{a}}$$

von Geometrie zur Algebra zurück

R: komm. Ring

$S = (S,\alpha)$, $T = (T,\beta)$: komm. R-Alg., $f: S \to T$ R-Alg.-m.

Krulldimension $\quad \mathrm{Krdim}(S) :=$ maximale Anzahl der Inklusionen in einer echten Kette von Primidealen in S



$\mathrm{Spec}(S)$

von max. Länge

$\Rightarrow \mathrm{Krdim}(S) = 3$

Noether-Normalisierung: $\quad S$: endl. erz. R-Alg

$$\begin{array}{ccc} R[x_1,\dots,x_d] & \xrightarrow{\text{ganz}} & S \\ & \nwarrow_{\alpha|\dots} & \uparrow \alpha \\ & & R : \text{Kp.} \end{array}$$

(x_i): algebraisch unabhängig

i.e. $R[X_1,\dots,X_d] \xrightarrow{\sim} R[x_1,\dots,x_d] : X_i \mapsto x_i$

Bem 145 , $T = (T,f)$ ist S-Alg. Sei T ganz $/ S$.

(1) Situation: $\mathfrak{m} \subseteq S$ mult., $N := f(\mathfrak{m}) \subseteq T$

$\tilde{f} : S/\!/\mathfrak{m} \to T/\!/N : \frac{s}{m} \mapsto \frac{f(s)}{f(m)}$

Es ist $T/\!/N = (T/\!/N, \tilde{f})$ ganz über $S/\!/\mathfrak{m}$.

(2) Situation: $\mathfrak{a} \in \mathrm{Ideale}(S)$, $\bar{S} := S/\mathfrak{a}$, $\bar{s} := s+\mathfrak{a}$ f. $s \in S$

$\mathfrak{b} \in \mathrm{Ideale}(T)$, $\bar{T} := T/\mathfrak{b}$, $\bar{t} := t+\mathfrak{b}$ f. $t \in T$

Sei $f(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{b}$.

$\bar{f} : \bar{S} \to \bar{T} : \bar{s} \mapsto \bar{f}(\bar{s}) := \overline{f(s)}$

Es ist $\bar{T} = (\bar{T}, \bar{f})$ ganz über $\bar{S}$.

Änderungen:

- $0_S \neq 1_S$, $0_T \neq 1_T$ werde nun vorausgesetzt
- Vor Def. 141:
  "§ 2.4.1 Definition der Krulldimension"
- Vor Def. 143
  "§ 2.4.2 Noether-Normalisierung"
- Vor Bem 145
  "§ 2.4.3 Krulldimension und ganze Erweiterungen"
- Numerierung von Primidealketten üblicherweise ab 0:

  $\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_k$

R: komm Ring

S, T: komm R-Alg

$S \xrightarrow{f} T$: R-Alg'mor

noch nicht benötigt für L 147

Kor. 148: Ist $T = (T, f)$ ganz über S und ist f injektiv, dann ist $\mathrm{Krdim}(S) = \mathrm{Krdim}(T)$

max. Länge einer echten Primidealkette in S

Ein S-Modul M heißt einfach, wenn $0 \neq M$ und wenn 0 und M die einzigen Teilmoduln von M sind.

R: komm. Ring, S, T: komm. R-Alg., $\neq 0$

$f: S \to T$: R-Alg'mor, S noethersch

<u>Lemma 157</u>: Ist S lokal, mit $\mathfrak{m} \subset S$ max. Ideal, dann ist $\bigcap_{i \geq 1} \mathfrak{m}^i = (0)$

<u>Bem 158</u>: $\mathfrak{q} \subset T$ primär

$\Rightarrow f^{-1}(\mathfrak{q}) \subset S$ primär

<u>Lemma 156</u>: $\mathrm{Krdim}(S) = 0 \Rightarrow S$ artinsch

hat Komp'reihe, absteigende abzählbare Idealketten werden stationär

R: komm. Ring, S: noeth. komm. R-Alg., $0_S \neq 1_S$
T: komm. R-Alg.

Lemma 163

$\mathfrak{a} \in \mathrm{Ideale}(S)$, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\ell \in \mathrm{Spec}(S)$

$$\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i \in [1,\ell]} \mathfrak{p}_i$$

Dann: $\exists\, j \in [1,\ell]$ mit

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_j$$

Satz 164 (Krulls Höhensatz)

Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)$. Es ist

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \min \{ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \text{es gibt ein von } k \text{ Elt. erzeugtes Ideal } \mathfrak{a} \text{ von } S \text{ mit } \mathfrak{p} \text{ minimal über } \cancel{k}\ \mathfrak{a} \}$$

maximale Länge einer echten Kette von Primidealen, die in $\mathfrak{p}$ liegen

Bew.

Ad ($\leq$): erledigt.

Ad ($\geq$) !