M. Künzer Abgabe bis Mi 10.01.18

Kommutative Algebra, WS 17/18

Blatt 9

Aufgabe 33 (1+3+2 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring. Sei S eine kommutative R-Algebra. Seien $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c} \in$ Ideale(S). Schreibe $\mathfrak{a} := \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$. Zu zeigen ist folgendes.

(1) Für $\mathfrak{d} \in$ Ideale(S) ist $(\mathfrak{a} : \mathfrak{d}) = (\mathfrak{b} : \mathfrak{d}) \cap (\mathfrak{c} : \mathfrak{d})$.

(2) Sei $x \in S$ mit $(\mathfrak{a} : (x))$ prim gegeben. Es ist $(\mathfrak{c} : (x)) \subseteq (\mathfrak{b} : (x))$ oder $(\mathfrak{c} : (x)) \supseteq (\mathfrak{b} : (x))$.

(3) Es ist $\mathrm{Ass}(S, \mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Ass}(S, \mathfrak{b}) \cup \mathrm{Ass}(S, \mathfrak{c})$.

Aufgabe 34 ((3+3+2) + (3+3+2) Punkte)
Seien X, Y, Z Elemente.

(i) Zu zeigen ist, daß eine reduzierte Primärzerlegung vorliegt.

(ii) Zu finden ist eine alternative reduzierte Primärzerlegung.

(iii) Satz 105 ist im vorliegenden Fall zu verifizieren.

(1) $(X)^2 \cap (X, Y)^3$ in $\mathbf{C}[X, Y]$.

(2) $(X, Y) \cap (X, Y, Z)^2$ in $\mathbf{C}[X, Y, Z]$.

Aufgabe 35 (3+1 Punkte) Zu zeigen ist folgendes.

(1) Sei R ein kommutativer Ring. Zu zeigen ist unter Verwendung von Satz 105, daß in einer integren Hauptidealalgebra S über R jedes Ideal genau eine reduzierte Primärzerlegung besitzt.

(2) Man finde die reduzierte Primärzerlegung von (180) in der $\mathbf{Z}$-Algebra $\mathbf{Z}$.

Aufgabe 36 (3 Punkte)
Man finde eine lokale kommutative $\mathbf{C}$-Algebra, in welcher das Nullideal eine reduzierte Primärzerlegung mit zwei Teilnehmern hat.
Kann diese integer sein?