M. Künzer | Abgabe bis Mi 13.12.17

Kommutative Algebra, WS 17/18

Blatt 7

Aufgabe 27 (1+4+1 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring.

(1) Zu zeigen ist, daß ein linear geordnetes Poset gerichtet ist.

(2) Sei $I = \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$, angeordnet mit $(\leqslant)$.
Sei $X = \{\, X_i \,:\, i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \,\}$.
Sei $X_{[1,n]} := \{\, X_i \,:\, i \in [1,n] \,\}$ für $x \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$.
Zu konstruieren ist ein Diagramm kommutativer R-Algebren auf $\mathbf{Z}_{\geqslant 1}$, welches bei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ den Eintrag $R[X_{[1,n]}]$ hat und dessen direkter Limes zu $R[X]$ isomorph ist.

(3) Ist der direkte Limes eines Diagramms noetherscher kommutativer R-Algebren auf einem gerichteten Quasiposet wieder noethersch?

Aufgabe 28 (3+3+3 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring.
Sei S eine kommutative R-Algebra. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(S)$. Sei $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

(1) Zu verifizieren sind $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} + \mathfrak{b}_\mathfrak{p} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} \cap \mathfrak{b}_\mathfrak{p} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{b}_\mathfrak{p} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})_\mathfrak{p}$ für $\mathfrak{a},\ \mathfrak{b} \in \operatorname{Ideale}(S)$.

(2) Zu konstruieren ist der R-Algebrenmorphismus $f\colon S/\mathfrak{p}^k \to S_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\mathfrak{p}^k\colon s + \mathfrak{p}^k \mapsto \frac{s}{1} + \mathfrak{p}_\mathfrak{p}^k$.

(3) Sei nun S eine integre Hauptidealalgebra und sei $\mathfrak{p} \neq (0)$.
Zu zeigen ist, daß f ein R-Algebrenisomorphismus ist.

Aufgabe 29 (8 Punkte) Folgendes ist zu zeigen oder zu widerlegen.
Sei R ein kommutativer Ring. Sei S eine kommutative R-Algebra.

(1) Es ist $\mathrm{D}_x \cap \mathrm{D}_y = \mathrm{D}_{xy}$ für $x,\ y \in S$.

(2) Zu $\mathfrak{p},\ \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(S)$ mit $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ gibt es $x,\ y \in S$ mit $\mathfrak{p} \in \mathrm{D}_x$, $\mathfrak{q} \in \mathrm{D}_y$ und $\mathrm{D}_x \cap \mathrm{D}_y = \emptyset$.

(3) Zu $\mathfrak{p},\ \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(S)$ mit $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ gibt es ein $x \in S$ mit
$(\mathfrak{p} \in \mathrm{D}_x$ und $\mathfrak{q} \notin \mathrm{D}_x)$ oder $(\mathfrak{q} \in \mathrm{D}_x$ und $\mathfrak{p} \notin \mathrm{D}_x)$.

(4) Sei I eine Menge. Seien $x_i \in S$ für $i \in I$ derart gegeben, daß $\bigcup_{i\in I} \mathrm{D}_{x_i} = \operatorname{Spec}(S)$ ist. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\bigcup_{j\in J} \mathrm{D}_{x_j} = \operatorname{Spec}(S)$.