M. Künzer Abgabe bis Mi 22.11.17

Kommutative Algebra, WS 17/18

# Blatt 4

**Aufgabe 14 (10 Punkte)** Zu zeigen oder zu widerlegen.
Sei $R$ ein kommutativer Ring. Seien $S$ und $T$ kommutative $R$-Algebren.
Sei $S \xrightarrow{f} T$ ein $R$-Algebrenmorphismus.

(1) Ist $R$ noethersch, dann ist auch $R[X_i : i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}]$ noethersch.

(2) Ist $S$ noethersch und $f$ surjektiv, dann ist auch $T$ noethersch.

(3) Ist $T$ noethersch und $f$ injektiv, dann ist auch $S$ noethersch.

(4) Sei $f$ surjektiv. Die Abbildung aus Aufgabe 10 schränkt auf die jeweiligen Teilmengen der Primideale ein.

(5) Sei $f$ surjektiv. Die Abbildung aus Aufgabe 10 schränkt auf die jeweiligen Teilmengen der maximalen Ideale ein.

**Aufgabe 15 (8 Punkte)** In der Situation von Aufgabe 13 wollen wir folgendes zeigen.
Es ist $\mathfrak{p}^2 = (\bar{X}) \cap (\bar{X}^2, \bar{X}\bar{Z}, \bar{Y})$ eine Primärzerlegung von $\mathfrak{p}^2$.

**Aufgabe 16 (6 Punkte)** Sei $R$ ein kommutativer Ring. Sei $S$ eine kommutative $R$-Algebra.
Zu zeigen ist folgendes.

(1) Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $S$. Sei $x \in S$. Sind $(\mathfrak{a} : (x))$ und $\mathfrak{a} + (x)$ endlich erzeugt, dann auch $\mathfrak{a}$.

(2) Es ist $S$ genau dann noethersch, wenn alle Primideale von $S$ endlich erzeugt sind.

**Aufgabe 17 (3 Punkte)** Sei $R$ ein kommutativer Ring. Sei $S$ eine kommutative $R$-Algebra.
Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(S)$. Zu zeigen ist folgendes.
Sei $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ . Sei $\mathfrak{q}_i$ ein Primärideal in $S$ mit $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}$ für $i \in [1, k]$.
Dann ist auch $\mathfrak{q} := \bigcap_{i \in [1,k]} \mathfrak{q}_i$ ein Primärideal in $S$ mit $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$.