M. Künzer Abgabe bis Mi 22.11.17

Kommutative Algebra, WS 17/18

Blatt 4

Aufgabe 14 (10 Punkte) Zu zeigen oder zu widerlegen.
Sei R ein kommutativer Ring. Seien S und T kommutative R-Algebren.
Sei $S \xrightarrow{f} T$ ein R-Algebrenmorphismus.

(1) Ist R noethersch, dann ist auch $R[X_i : i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}]$ noethersch.

(2) Ist S noethersch und f surjektiv, dann ist auch T noethersch.

(3) Ist T noethersch und f injektiv, dann ist auch S noethersch.

(4) Sei f surjektiv. Die Abbildung aus Aufgabe 10 schränkt auf die jeweiligen Teilmengen der Primideale ein.

(5) Sei f surjektiv. Die Abbildung aus Aufgabe 10 schränkt auf die jeweiligen Teilmengen der maximalen Ideale ein.

Aufgabe 15 (8 Punkte) In der Situation von Aufgabe 13 wollen wir folgendes zeigen.
Es ist $\mathfrak{p}^2 = (\bar{X}) \cap (\bar{X}^2, \bar{X}\bar{Z}, \bar{Y})$ eine Primärzerlegung von $\mathfrak{p}^2$.

Aufgabe 16 (6 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring. Sei S eine kommutative R-Algebra. Zu zeigen ist folgendes.

(1) Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in S. Sei $x \in S$. Sind $(\mathfrak{a} : (x))$ und $\mathfrak{a} + (x)$ endlich erzeugt, dann auch $\mathfrak{a}$.

(2) Es ist S genau dann noethersch, wenn alle Primideale von S endlich erzeugt sind.

Aufgabe 17 (3 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring. Sei S eine kommutative R-Algebra. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(S)$. Zu zeigen ist folgendes.
Sei $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Sei $\mathfrak{q}_i$ ein Primärideal in S mit $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}$ für $i \in [1, k]$.
Dann ist auch $\mathfrak{q} := \bigcap_{i \in [1,k]} \mathfrak{q}_i$ ein Primärideal in S mit $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$.

www.mathematik.uni-stuttgart.de/fachbereich/Kuenzer/ca17/