Kommutative Algebra, WS 17/18

Blatt 3

Aufgabe 9 (3 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R.
Zu zeigen ist, daß auf der abelschen Gruppe $R/\mathfrak{a}$ mittels $(r+\mathfrak{a})\cdot(r'+\mathfrak{a}) := rr'+\mathfrak{a}$ für $r,\ r' \in R$ die Struktur eines kommutativen Rings definiert wird.

Aufgabe 10 (3 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring. Seien S und T kommutative R-Algebren.
Sei $S \xrightarrow{f} T$ ein surjektiver R-Algebrenmorphismus. Sei $\mathfrak{k} \subseteq S$ sein Kern.
Bezeichne Ideale(S) die Menge der Ideale von S. Zu zeigen ist folgende Bijektion.

$$\text{Ideale}(T) \leftrightarrow \{\, \mathfrak{b} \in \text{Ideale}(S) \,:\, \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq S \,\}\,, \qquad \mathfrak{c} \mapsto f^{-1}(\mathfrak{c})\,, \qquad f(\mathfrak{c}) \leftarrow\!\shortmid \mathfrak{c}\,.$$

Aufgabe 11 (12 Punkte) Zu zeigen oder zu widerlegen.
Sei R ein kommutativer Ring. Sei S eine kommutative R-Algebra. Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale in S.

(1) Es ist $\mathbf{Z}$ eine Hauptidealalgebra über $\mathbf{Z}$.
(2) Ist K ein Körper und X ein Element, dann ist $K[X]$ eine Hauptidealalgebra über K.
(3) Ist R eine Hauptidealalgebra über R, dann ist $R[X]$ eine Hauptidealalgebra über R.
(4) Es ist $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{b}}$.
(5) Es ist $\sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$.
(6) Es ist $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}$.

Aufgabe 12 (4 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring. Sei S eine kommutative R-Algebra.
Zu zeigen ist die Äquivalenz der Aussagen (1) und (2).

(1) Es ist S noethersch.
(2) Jede nichtleere Teilmenge der Menge der Ideale von S hat ein maximales Element.

Aufgabe 13 (12 Punkte) Sei K ein Körper. Seien X, Y, Z drei Elemente.
Sei $S := K[X,Y,Z]/(XY - Z^2)$. Wir schreiben $\bar{\xi} := \xi + (XY - Z^2)$ für $\xi \in K[X,Y,Z]$.
Sei $\mathfrak{p} := (\bar{X}, \bar{Y}) \subseteq S$. Zu zeigen ist folgendes.

(1) Es ist $K[X,Y] \to S\colon X \mapsto \bar{X},\ Y \mapsto \bar{Y}$ ein injektiver K-Algebrenmorphismus.
(2) Für jedes $\xi \in S$ gibt es eindeutige Elemente $f(X,Y)$, $g(X,Y) \in K[X,Y]$ mit $\xi = f(\bar{X},\bar{Y}) + \bar{Z}g(\bar{X},\bar{Y})$.
(3) Es ist $\mathfrak{p} \subseteq S$ ein Primideal.
(4) Jedes Element von $\mathfrak{p}^2$ ist von der Form $a(\bar{X},\bar{Y})\bar{X}^2 + b(\bar{X},\bar{Y})\bar{X}\bar{Y} + c(\bar{X},\bar{Y})\bar{X}\bar{Z}$ für gewisse $a(X,Y)$, $b(X,Y)$, $c(X,Y) \in K[X,Y]$.
(5) Es ist $\bar{X}\bar{Y} \in \mathfrak{p}^2$, aber $\bar{X} \notin \mathfrak{p}^2$ und $\bar{Y}^n \notin \mathfrak{p}^2$ für alle $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.
(6) Es ist $\mathfrak{p}^2 \subseteq S$ nicht primär.