M. Künzer Abgabe bis Mi 08.11.17

Kommutative Algebra, WS 17/18

Blatt 2

Aufgabe 5 (1+1 Punkte) Seien R und S kommutative Ringe. Zu zeigen ist folgendes.

(1) Es ist R auf eindeutige Weise eine $\mathbf{Z}$-Algebra.

(2) Es ist jeder Ringmorphismus $R \xrightarrow{f} S$ ein $\mathbf{Z}$-Algebrenmorphismus.

Aufgabe 6 (2+1 Punkte) Zu zeigen ist folgendes.

(1) Seien S und T kommutative Ringe.
Ist $S \xrightarrow{f} T$ ein bijektiver Ringmorphismus, dann auch $S \xleftarrow{f^-} T$.

(2) Sei R ein kommutativer Ring. Seien $S = (S, \alpha)$ und $T = (T, \beta)$ kommutative R-Algebren.
Ist $S \xrightarrow{f} T$ ein bijektiver R-Algebrenmorphismus, dann auch $S \xleftarrow{f^-} T$.

Aufgabe 7 (2+6+2+3 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring.
Sei I eine Menge. Sei $X = \{\, X_i \,:\, i \in I \,\}$ eine Menge, wobei $I \to X \colon i \mapsto X_i$ bijektiv sei.
Wir schreiben die Elemente von $R[X]$ zunächst als Koeffiziententupel $(r_e)_e = (r_e)_{e \in E_I}$ mit Einträgen aus R, wobei jeweils $\{\, e \in E_I \,:\, r_e \neq 0 \,\}$ endlich ist. Cf. auch (4).
Zu zeigen ist folgendes.

(1) Für $(r_e)_e\, ,\, (r'_e)_e \in R[X]$ sind auch $(r'_e)_e + (r''_e)_e := (r'_e + r''_e)_e \in R[X]$
und $(r'_e)_e \cdot (r''_e)_e := \Big(\sum_{\substack{(e',\, e'') \in E_I \times E_I \\ e' + e'' = e}} r'_{e'}\, r''_{e''} \Big)_e$ wieder in $R[X]$.

(2) Es ist $R[X] = (R[X], +, \cdot)$ ein kommutativer Ring.

(3) Zusammen mit $R \xrightarrow{\alpha_{R,X}} R[X] \colon r \mapsto (r\partial_{(0)_i,\, e})_e$ ist $R[X]$ eine R-Algebra.

(4) Schreiben wir für $j \in I$ etwas mißbräuchlich $d[j] := (\partial_{j,i})_i$ und $X_j := (\partial_{d[j],e})_e$, sowie $r := \alpha_{R,X}(r)$ für $r \in R$, so erhalten wir für $(r_e)_e \in R[X]$ die Gleichheit

$$(r_e)_{e \in E_I} = \sum_{e \,=\, (e_i)_i \,\in\, E_I} r_e \prod_{i \in I} X_i^{e_i} \;;$$

Aufgabe 8 (1+3 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring.
Seien R-Algebren $S = (S, \alpha)$ und $T = (T, \beta)$ gegeben. Sei $S \xrightarrow{f} T$ ein R-Algebrenmorphismus.
Sei $\mathfrak{b} \subseteq T$ ein Ideal. Sei $\mathfrak{a} := f^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq S$. Zu zeigen ist folgendes.

(1) Es ist $\mathfrak{a} \subseteq S$ ein Ideal.

(2) Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} S/\mathfrak{a} & \xrightarrow{\bar{f}} & T/\mathfrak{b} \\ s + \mathfrak{a} & \mapsto & f(s) + \mathfrak{b} \end{array}$$

ist wohldefiniert und ein injektiver R-Algebrenmorphismus.