M. Künzer Abgabe bis Mi 14.02.18

Kommutative Algebra, WS 17/18

Blatt 14

Aufgabe 51 (4+2 Bonuspunkte) Sei R ein kommutativer Ring.
Sei S eine kommutative R-Algebra.
Sei $M' \stackrel{i}{\to} M \stackrel{p}{\to} M''$ eine kurz exakte Sequenz von S-Moduln. Zu zeigen ist folgendes.

(1) Es hat genau dann M eine Kompositionsreihe, wenn M' und M'' Kompositionsreihen haben.

(2) Hat M eine Kompositionsreihe, dann ist $\ell(M) = \ell(M') + \ell(M'')$.

Aufgabe 52 ($2 \cdot (3+1)$ Bonuspunkte) Sei $R = \mathbf{C}$. Seien X, Y, Z drei Elemente.

(i) Sei $S = \mathbf{C}[X, Y]/(XY)$.

(ii) Sei $S = \mathbf{C}[X, Y, Z]/(XYZ)$.

(1) Man bestimme $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ und ein algebraisch unabhängiges Tupel $(z_i)_{i\in[1,k]}$ von Elementen von S derart, daß S ganz ist über $R[z_1, \ldots, z_k]$.

(2) Man bestimme $\operatorname{Krdim}(S)$.

Aufgabe 53 (4 Bonuspunkte) Sei R ein kommutativer Ring.
Sei S eine kommutative R-Algebra.
Sei S noethersch und artinsch. Zu zeigen ist folgendes.

(1) Es ist $\operatorname{Spec}(S)$ endlich. Es ist $\operatorname{Jac}(S) = \sqrt{(0)}$.

(2) Sei $\sqrt{(0)} = (0)$.

Dann ist S isomorph, als R-Algebra, zu einem direkten Produkt von Körpern.

Hinweis: Aufgabe 22.

Aufgabe 54 (4 Bonuspunkte) Sei R ein kommutativer Ring.
Sei T eine R-Algebra, nicht notwendig noethersch. Sei X ein Element.
Man zeige $\operatorname{Krdim}(T) + 1 \leqslant \operatorname{Krdim}(T[X]) \leqslant 2\operatorname{Krdim}(T) + 1$.
Hinweis: Lemma 167.