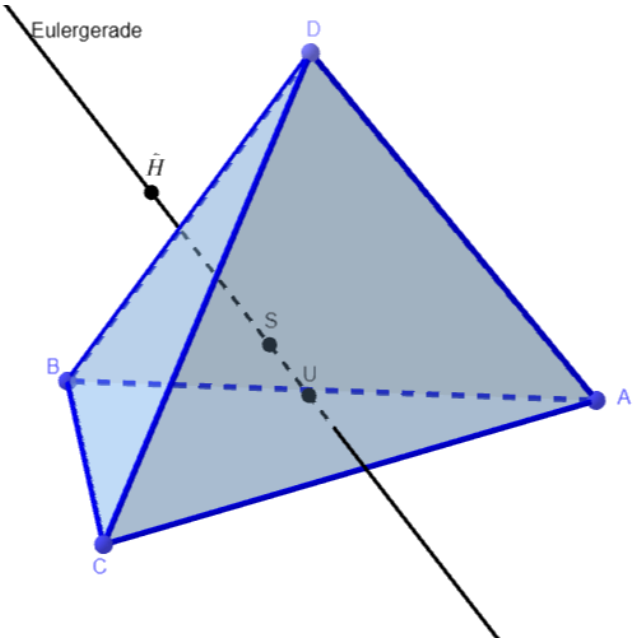
Bachelorarbeit Mathematik

Die Eulergerade im Dreidimensionalen



Laura Mignoli

Universität Stuttgart
Fakultät für Mathematik und Physik
Betreuer: Priv.-Doz. Dr. Matthias Künzer
August 2026

Universität Stuttgart

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**
1.1 Zielsetzung 2
1.2 Vorgehen 2
1.3 Gliederung 3
1.4 Anmerkung GeoGebra 4

2 Grundlegende Konstruktionen im zweidimensionalen Raum **5**
2.1 Strecken und Geraden 5
2.2 Begriffe in einem Dreieck 5

3 Die Eulergerade im zweidimensionalen Raum **8**
3.1 Konstruktion der Eulergerade 8
3.2 Eigenschaften der Eulergeraden in der zweidimensionalen Ebene . . 13

4 Grundlegende Konstruktionen im dreidimensionalen Raum **17**
4.1 Begriffe im $\mathbb{R}^3$ 17
4.2 Begriffe in einem Tetraeder 17

5 Die Eulergerade im dreidimensionalen Raum **21**
5.1 Konstruktion der Eulergeraden im dreidimensionalen Raum 21
5.2 Der Schwerpunkt und der Medialtetraeder 25
5.3 Der Umkugelmittelpunkt 27
5.4 Der fehlende Höhenschnittpunkt 30
5.5 Der eulermodifizierte Höhenschnittpunkt und die Eulergerade . . . 33

6 Literatur **43**

1 Einleitung

1.1 Zielsetzung

Die Geometrie des Dreiecks birgt eine Vielzahl faszinierender und eleganter Eigenschaften, deren Entdeckung und systematische Erforschung zum festen Fundament der elementaren und höheren Mathematik gehören. Eine der bekanntesten ist die sogenannte Eulergerade, benannt nach Leonhard Euler **[2,** S.162**]**. In jedem beliebigen echten Dreieck liegen der Umkreismittelpunkt U, der Schwerpunkt S und der Höhenschnittpunkt H stets auf einer gemeinsamen Geraden, der Eulergeraden. Unter Verwendung einer zentrischen Streckung mit Zentrum S und Streckfaktor $k = -\frac{1}{2}$ erhält man die Vektorbeziehung $\overrightarrow{SH} = -2 \cdot \overrightarrow{SU}$ **[3]**.

Diese geometrische Gesetzmäßigkeit wirft unmittelbar die Frage auf, ob und inwiefern sich dieses Konzept von einem zweidimensionalen Dreieck auf einen dreidimensionalen Tetraeder übertragen lässt. Dies soll in dieser Bachelorarbeit untersucht werden.

1.2 Vorgehen

Während sich grundlegende Konzepte wie der Schwerpunkt und der Umkugelmittelpunkt relativ natürlich und widerspruchsfrei von der Ebene auf den dreidimensionalen Raum übertragen lassen, zeigt sich bei der Betrachtung der Höhengeraden und des Höhenschnittpunkts eine wesentliche Komplikation: Im Allgemeinen besitzen Tetraeder keinen Höhenschnittpunkt. Anders als im Dreieck, in dem sich die drei Höhengeraden stets in genau einem Punkt schneiden, können die vier Höhengeraden eines allgemeinen Tetraeders windschief zueinander verlaufen.

Um dennoch eine Eulergerade für einen Tetraeder konstruieren zu können, bedarf es eines angepassten geometrischen Konzeptes, nämlich dessen der eulerverschobenen Höhengeraden.

Wir betrachten den Tetraeder $\triangle ABCD$. Sei S der Schwerpunkt des Tetraeders $\triangle ABCD$. Sei U der Umkugelmittelpunkt des Tetraeders $\triangle ABCD$. Es fehlt noch der Ersatz für den fehlenden Höhenschnittpunkt.
Sei $\mathscr{A} = \triangle BCD$ die der Ecke A gegenüberliegenden Seite. Sei $S_{\mathscr{A}}$ der Schwerpunkt des Dreiecks $\mathscr{A}$. Sei $U_{\mathscr{A}}$ der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\mathscr{A}$. Sei $\vec{e}_{\mathscr{A}} := \overrightarrow{S_{\mathscr{A}}U_{\mathscr{A}}}$ der zugehörige Eulervektor. Sei $h_{\mathscr{A}}$ die Höhengerade des Tetraeders $\triangle ABCD$, die durch den Punkt A verläuft und senkrecht auf der Ebene durch $\mathscr{A}$ steht. Sei $\tilde{h}_{\mathscr{A}} := h_{\mathscr{A}} - 3 \cdot e_{\mathscr{A}}$ die eulerverschobene Höhengerade zu $\mathscr{A}$.

Die eulerverschobenen Höhengeraden der Tetraederseiten schneiden sich in einem Punkt:

$$\{\tilde{H}\} := \tilde{h}_{\mathscr{A}} \cap \tilde{h}_{\mathscr{B}} \cap \tilde{h}_{\mathscr{C}} \cap \tilde{h}_{\mathscr{D}}.$$

Nun liegen U, S und $\tilde{H}$ auf einer Geraden, genannt die Eulergerade. Es gilt

$$\overrightarrow{S\tilde{H}} = -3 \cdot \overrightarrow{SU}.$$

Die folgende Abbildung zeigt die Eulergerade des Beispiels 46. Hierbei sind der Schwerpunkt S, der Umkugelmittelpunkt U und der eulermodifizierte Höhenschnittpunkt $\tilde{H}$ zu sehen. Dabei sind die Konstruktionsschritte des eulermodifizierten Höhenschnittpunktes ebenfalls zu sehen.

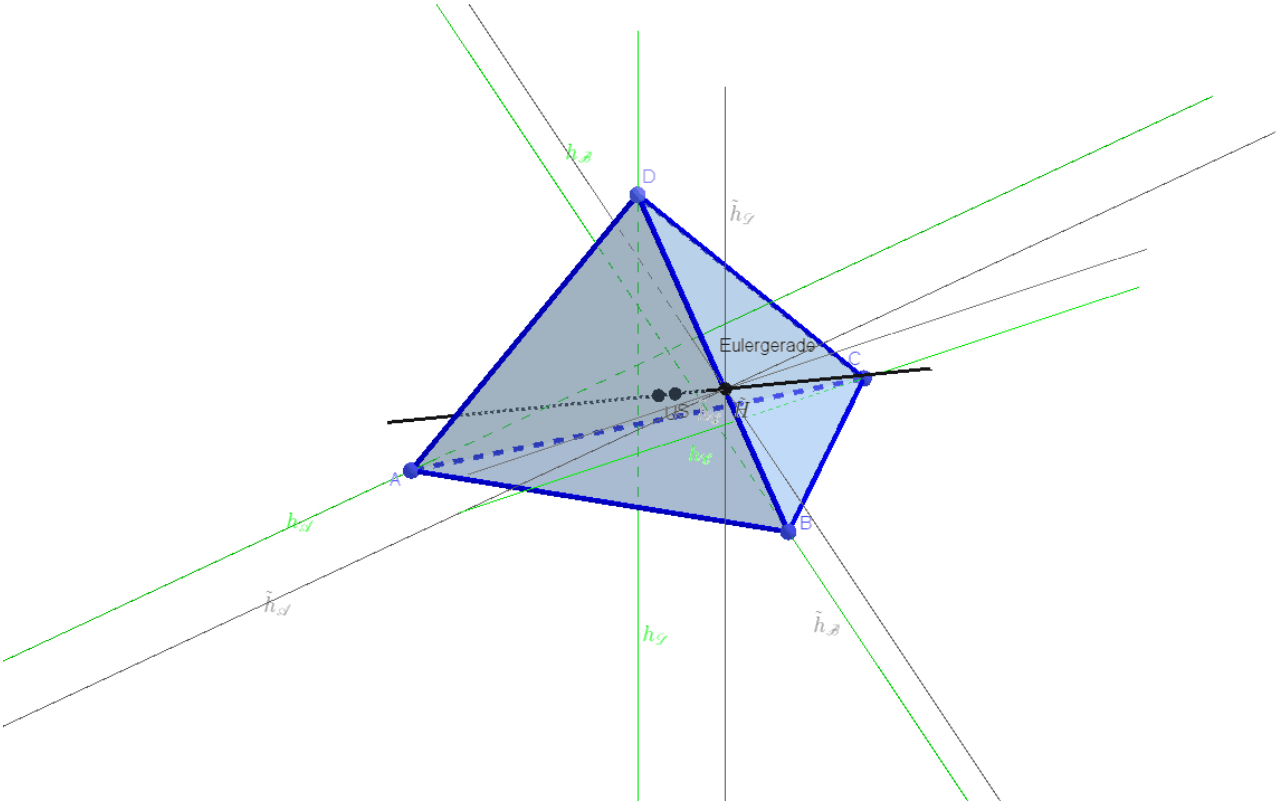


Abbildung 1: Konstruktionsvorgehen zur Eulergerade im Dreidimensionalen.

1.3 Gliederung

Die vorliegende Arbeit führt schrittweise an die Konstruktion der Eulergerade im Dreidimensionalen heran. In Kapitel 2 werden zunächst die grundlegenden Kon-

struktionen und Definitionen im zweidimensionalen Raum wiederholt. Anschließend wird in Kapitel 3 die Eulergerade Schritt für Schritt konstruiert und visuell anhand eines Beispieldreiecks dargestellt. Weiter wird die Beziehung zwischen dem Schwerpunkt S, den Umkreismittelpunkt U und dem Höhenschnittpunkt H hergeleitet. Im weiteren Verlauf wird die Erweiterung auf den dreidimensionalen Fall untersucht.
Kapitel 4 beginnt mit den grundlegenden Konstruktionen im dreidimensionalen Raum anhand eines Tetraeders. Hierbei werden notwendige Begriffe wie Seitenflächenschwerpunkte, Mittellotebenen, der eulermodifizierte Höhenschnittpunkt, eulerverschobenen Höhen und der Umkugelmittelpunkt definiert.
Den Kern der Arbeit bildet Kapitel 5. Hierbei wird die Eulergerade zunächst Schritt für Schritt konstruiert und visuell anhand eines Beispieltetraeders dargestellt. Weiter wird der Schwerpunkt S vom Zweidimensionalen in das Dreidimensionale übertragen und die Existenz und Eindeutigkeit des Umkugelmittelpunkts U wird gezeigt. Anschließend wird der allgemein fehlende Höhenschnittpunkt im Tetraeder thematisiert. Dabei wird das Konzept des eulermodifizierten Höhenschnittpunkts $\tilde{H}$ eingeführt. Sodann wird der zentrale Beweis erbracht, dass die Punkte S, U und $\tilde{H}$ im dreidimensionalen Raum ebenfalls auf einer Geraden liegen, die Eulergerade. Abschließend wird mittels GeoGebra die Eulergerade eines Tetraeders in einem Beispiel konstruiert und $\overrightarrow{S\tilde{H}} = -3 \cdot \overrightarrow{SU}$ verifiziert.

1.4 Anmerkung GeoGebra

Jede Grafik dieser Bachelorarbeit wurde eigenständig mit Hilfe der Verwendung der Applikation GeoGebra erstellt **[1]**. GeoGebra-Grafiken sind sogenannte GeoGebra-Applets. Für den Fall, dass der Wunsch besteht, die Konstruktionen im Dreidimensionalen selbst zu bewegen oder die Applet-Konstruktionen im Detail nachzuvollziehen, ist eine GeoGebra-Bibliothek angelegt worden. Diese ist der Arbeit angehängt; vgl. Anhang GeoGebra-Dateien und Abbildungsverzeichnis am Ende der Arbeit. Um die dort angegebenen Dateien ausführen zu können, müssen Sie die GeoGebra Applikation auf Ihrem Endgerät im Browser öffnen. Die heruntergeladenen GeoGebra-Dateien können nun in GeoGebra geöffnet werden. Danach können Sie die Konstruktionen einsehen.

2 Grundlegende Konstruktionen im zweidimensionalen Raum

Zunächst werden alle nötigen Begriffe definiert, um die Eulergerade im zweidimensionalen Raum untersuchen zu können.

2.1 Strecken und Geraden

Definition 1. Punkte. Jeder Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ wird mit seinem Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ identifiziert, wobei O der Ursprung des Raumes $\mathbb{R}^2$ ist.

Definition 2. Strecken. Seien A, $B \in \mathbb{R}^2$. Dann schreiben wir $\overrightarrow{AB}$ für die Strecke von A nach B.

Definition 3. Streckenlängen. Seien A, $B \in \mathbb{R}^2$. Dann schreiben wir $|\overrightarrow{AB}|$ für die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$, also für die Strecke $\overline{AB}$.

Definition 4. Gerade. Seien A, $B \in \mathbb{R}^2$. Dann schreiben wir AB für die Gerade, die die Punkte A und B enthält. Es gilt A, $B \in AB$.

Definition 5. Kollinearität. Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^2$. Dann heißen diese Punkte kollinear, wenn es eine Gerade g gibt, die sie alle enthält, wenn also $A, B, C \in g$ gilt.

2.2 Begriffe in einem Dreieck

Seien A, B, $C \in \mathbb{R}^2$ nicht kollinear. Wir betrachten das Dreieck $\triangle ABC$.

Definition 6. Seitenhalbierende. Eine Gerade heißt Seitenhalbierende, wenn sie einen Eckpunkt mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite verbindet. Wir bezeichnen mit M_{BC} den Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$, mit M_{AC} den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ und mit M_{AB} den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.
Für die Seitenhalbierenden s_A,s_B, s_C des Dreiecks $\triangle ABC$ gilt

$$s_A := AM_{BC}$$
$$s_B := BM_{AC}$$
$$s_C := CM_{AB}.$$

Definition 7. Schwerpunkt. Der Schwerpunkt S des Dreiecks $\triangle ABC$ ist der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden s_A, s_B, s_C; siehe auch Satz 14.

Definition 8. Mittelsenkrechte. Eine Gerade heißt Mittelsenkrechte des Dreiecks $\triangle ABC$, wenn sie durch den Mittelpunkt einer Dreiecksseite geht und senkrecht auf ihr steht.
Für die Mittelsenkrechten m_{AB}, m_{AC}, m_{BC} des Dreiecks $\triangle ABC$ gilt

$$\begin{aligned} m_{AB} \perp AB \quad &\text{und} \quad M_{AB} \in m_{AB} \\ m_{AC} \perp AC \quad &\text{und} \quad M_{AC} \in m_{AC} \\ m_{BC} \perp BC \quad &\text{und} \quad M_{BC} \in m_{BC}. \end{aligned}$$

Definition 9. Umkreismittelpunkt. Der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks $\triangle ABC$ ist der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten m_{AB}, m_{BC}, m_{AC}, also $\{U\} = m_{AB} \cap m_{BC} \cap m_{AC}$; siehe auch Satz 18. Für U gilt $r = |\overline{AU}| = |\overline{BU}| = |\overline{CU}|$, wobei r der Radius des Umkreises ist. Also

$$\{U\} = m_{AB} \cap m_{BC} \cap m_{AC}.$$

Definition 10. Höhengerade. Eine Gerade heißt Höhengerade des Dreiecks $\triangle ABC$, wenn sie durch einen Eckpunkt geht und senkrecht auf der gegenüberliegenden Seite steht.
Für die Höhengeraden h_A, h_B, h_C des Dreiecks $\triangle ABC$ gilt

$$\begin{aligned} h_A \perp BC \quad &\text{und} \quad A \in h_A \\ h_B \perp AC \quad &\text{und} \quad B \in h_B \\ h_C \perp AB \quad &\text{und} \quad C \in h_C. \end{aligned}$$

Definition 11. Höhenschnittpunkt. Der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks $\triangle ABC$ ist der Schnittpunkt der drei Höhengeraden h_A, h_B, h_C, also
$\{H\} = h_A \cap h_B \cap h_C$; siehe auch Satz 19.

Die Eulergerade des Dreiecks $\triangle ABC$ wird mit Hilfe einer zentrischen Streckung konstruiert. Dabei ist das Zentrum der Schwerpunkt S des Dreiecks $\triangle ABC$.

Definition 12. Zentrische Streckung. Seien $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $P, Z \in \mathbb{R}^2$. Weiterhin sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Abbildung.
Dann ist φ eine zentrische Streckung, wenn gilt

$$\varphi(P) = Z + k \cdot \overrightarrow{ZP} \quad \text{für } P \in \mathbb{R}^2,$$

wobei Z das Zentrum und k der Streckfaktor ist. Weiterhin gilt: φ ist winkeltreu, geradentreu und längenverhältnistreu. Es führt φ jede Gerade in eine dazu parallele Gerade über.

Definition 13. Eulergerade. Eine Gerade heißt Eulergerade, wenn sie den Schwerpunkt S, den Höhenschnittpunkt H und den Umkreismittelpunkt U des Dreiecks $\triangle ABC$ enthält, also wenn $S, H, U \in$ Eulergerade; siehe auch Satz 20.
Für die Eulergerade gilt

$$\overrightarrow{SU} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{SH}.$$

3 Die Eulergerade im zweidimensionalen Raum

Es seien nicht kollineare Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Wir betrachten das Dreieck $\triangle ABC$.

3.1 Konstruktion der Eulergerade

Im Folgenden konstruieren wir die Eulergerade für das Dreieck $\triangle ABC$.

Schritt 1: Für die drei nicht kollinearen Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ konstruieren wir das Dreieck $\triangle ABC$.

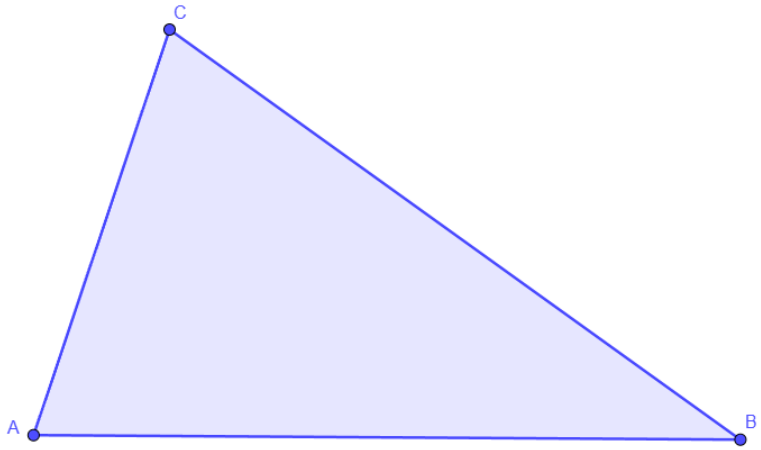


Abbildung 2: 2D Konstruktion Schritt 1 (Dreieck).

Schritt 2: Wir bilden die drei Höhengeraden h_A, h_B, h_C. Der Schnittpunkt dieser Geraden ist der Höhenschnittpunkt H.

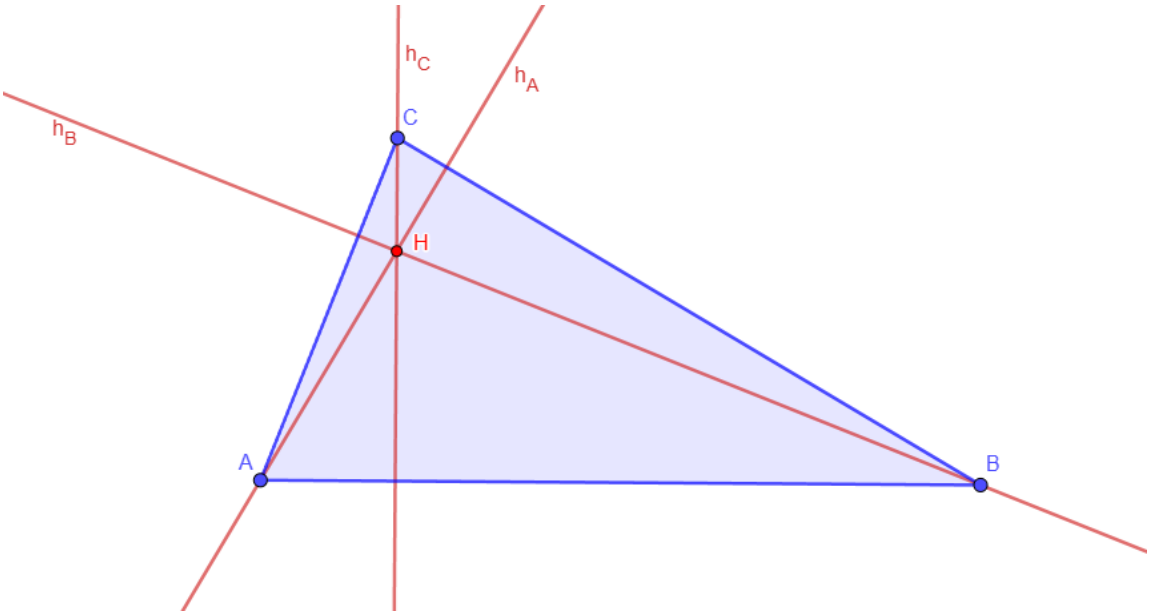


Abbildung 3: 2D Konstruktion Schritt 2 (Höhenschnittpunkt).

Schritt 3: Wir konstruieren die drei Mittelsenkrechten m_{AB}, m_{AC}, m_{BC}. Der Schnittpunkt dieser Geraden ist der Umkreismittelpunkt U.

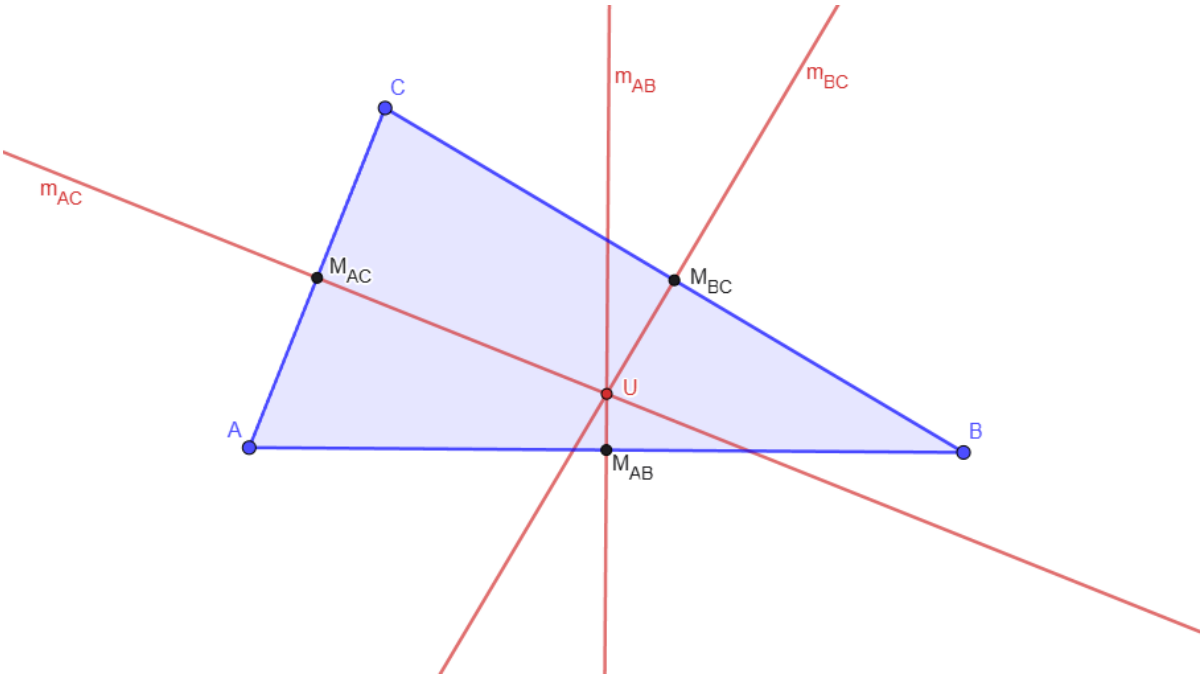


Abbildung 4: 2D Konstruktion Schritt 3 (Umkreismittelpunkt).

Schritt 4: Wir konstruieren die drei Seitenhalbierenden s_A, s_B, s_C. Der Schnittpunkt dieser Geraden ist der Schwerpunkt S.

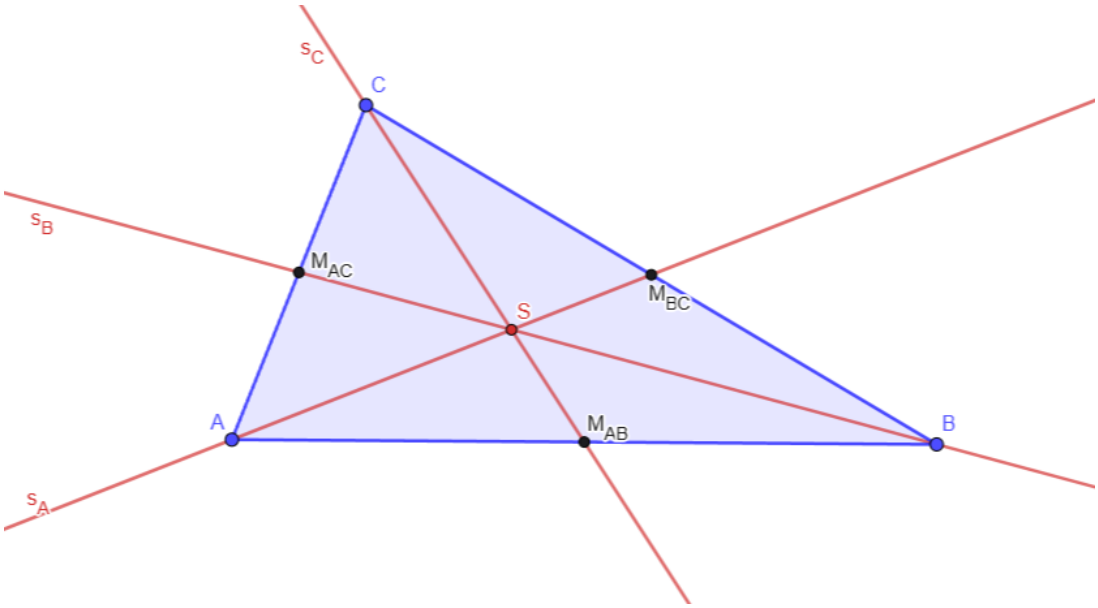


Abbildung 5: 2D Konstruktion Schritt 4 (Schwerpunkt).

Schritt 5: Wir legen eine Gerade durch die Punkte U, S und H. Diese Gerade wird als Eulergerade bezeichnet.

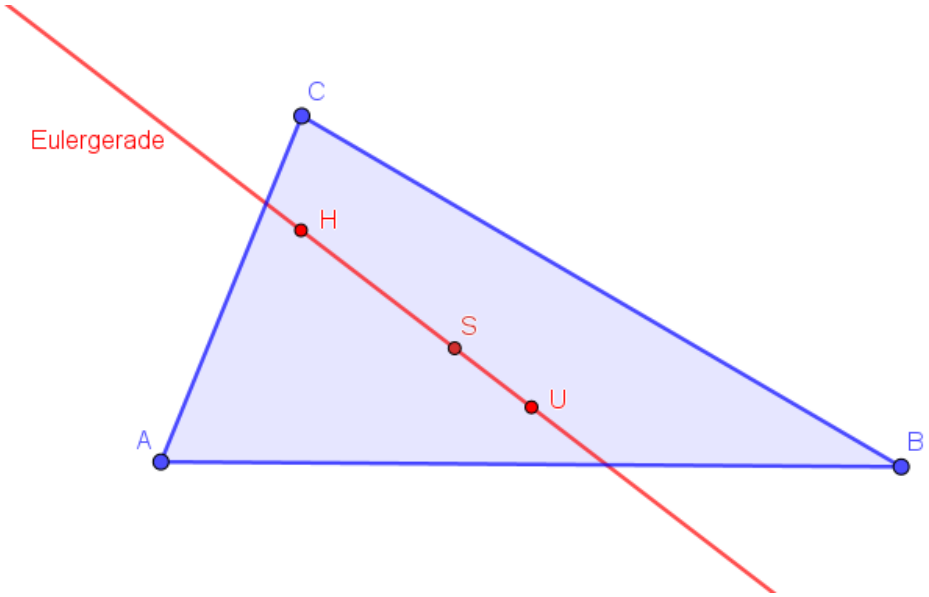


Abbildung 6: 2D Konstruktion Schritt 5 (Eulergerade).

3.2 Eigenschaften der Eulergeraden in der zweidimensionalen Ebene

Wir betrachten weiterhin das Dreieck $\triangle ABC$.

Satz 14. *Es ist $S = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$. Dann ist S der Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$, also der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden s_A, s_B, s_C.*
Es gilt $-2 \cdot \overrightarrow{SM_{BC}} = \overrightarrow{SA}$, $-2 \cdot \overrightarrow{SM_{AC}} = \overrightarrow{SB}$, $-2 \cdot \overrightarrow{SM_{AB}} = \overrightarrow{SC}$.

Beweis. Zunächst berechnen wir die drei Seitenmitten M_{AB}, M_{AC}, M_{BC}. Es gilt

$$\begin{aligned} M_{AB} &= A + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = A + \tfrac{1}{2} \cdot (B - A) = \tfrac{1}{2} \cdot (A + B) \\ M_{AC} &= A + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = A + \tfrac{1}{2} \cdot (C - A) = \tfrac{1}{2} \cdot (A + C) \\ M_{BC} &= B + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = B + \tfrac{1}{2} \cdot (C - B) = \tfrac{1}{2} \cdot (B + C). \end{aligned}$$

Sei $S_0 := \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$. Wir haben $S_0 \stackrel{!}{=} S$ zu zeigen. Dazu zeigen wir: S_0 liegt auf allen Seitenhalbierenden.
Nun behaupten wir, A, S_0, M_{BC} liegen auf einer Geraden. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AS_0} &= S_0 - A = \tfrac{1}{3} \cdot (A + B + C) - A = -\tfrac{2}{3} \cdot A + \tfrac{1}{3} \cdot B + \tfrac{1}{3} \cdot C \\ \overrightarrow{S_0 M_{BC}} &= M_{BC} - S_0 = \tfrac{1}{2} \cdot (B + C) - \tfrac{1}{3} \cdot (A + B + C) = -\tfrac{1}{3} \cdot A + \tfrac{1}{6} \cdot B + \tfrac{1}{6} \cdot C \end{aligned}$$

Mit dem Faktor $k = 2$ multiplizieren wir die Gleichung $\overrightarrow{S_0 M_{BC}}$ und erhalten

$$\overrightarrow{AS_0} = 2 \cdot \overrightarrow{S_0 M_{BC}}, \quad |\overrightarrow{AS_0}| = |2 \cdot \overrightarrow{S_0 M_{BC}}| = 2 \cdot |\overrightarrow{S_0 M_{BC}}|.$$

Analog folgt

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BS_0} &= 2 \cdot \overrightarrow{S_0 M_{AC}} \\ \overrightarrow{CS_0} &= 2 \cdot \overrightarrow{S_0 M_{AB}}. \end{aligned}$$

Damit gilt $S_0 \in AM_{BC}$, $S_0 \in BM_{AC}$, $S_0 \in CM_{AB}$. Somit schneiden sich die drei Seitenhalbierenden im Punkt S_0. Also ist $S_0 = S$. □

Definition 15. Medialdreieck. Wir schreiben $A' := M_{BC}$, $B' := M_{AC}$ und $C' := M_{AB}$. Das Dreieck $\triangle A'B'C'$ heißt Medialdreieck von $\triangle ABC$. Somit sind die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ die Ecken des Medialdreiecks $\triangle A'B'C'$.

Definition 16. Höhengerade des Medialdreiecks. Eine Gerade heißt Höhengerade des Medialdreiecks $\triangle A'B'C'$, wenn sie durch einen Eckpunkt geht und senkrecht auf der gegenüberliegenden Seite steht.
Für die Höhengeraden h'_A, h'_B, h'_C des Medialdreiecks $\triangle A'B'C'$ gilt

$$\begin{aligned} h'_A \perp B'C' \quad &\text{und} \quad A' \in h'_A \\ h'_B \perp A'C' \quad &\text{und} \quad B' \in h'_B \\ h'_C \perp A'B' \quad &\text{und} \quad C' \in h'_C. \end{aligned}$$

Bemerkung 17. Wir definieren die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \overrightarrow{P} = S + \overrightarrow{SP} \longmapsto \varphi(P) = S - \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{SP}.$$

Diese stellt eine Streckung mit Zentrum S und Streckfaktor $k = -\frac{1}{2}$ dar. Die Umkehrabbildung ist dementsprechend eine Streckung mit Zentrum S und Streckfaktor -2, also

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : Q = S + \overrightarrow{SQ} \longmapsto \varphi^{-1}(Q) = S - 2\overrightarrow{SQ}.$$

Mit dem Dreieck $\triangle ABC$ erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= M_{BC} = A' \\ \varphi(B) &= M_{AC} = B' \\ \varphi(C) &= M_{AB} = C' \\ \varphi(\triangle ABC) &= \triangle M_{BC}M_{AC}M_{AB} = \triangle A'B'C'. \end{aligned}$$

Satz 18. *Es existiert genau ein Punkt $U \in \mathbb{R}^2$, welcher der Schnittpunkt aller drei Mittelsenkrechten m_{AB}, m_{AC}, m_{BC} des Dreiecks $\triangle ABC$ ist. Wir bezeichnen ihn als Umkreismittelpunkt.*

Beweis. Wir bilden die drei Mittelsenkrechten m_{AB}, m_{AC}, m_{BC} des Dreiecks $\triangle ABC$. Da die Punkte A, B, C nicht kollinear sind, sind auch die Mittelsenkrechten m_{AB}, m_{AC}, m_{BC} nicht parallel. Somit schneiden sich jeweils zwei von ihnen. Folglich ist zu zeigen, dass sich alle drei in genau einem Punkt schneiden.

Wir betrachten zunächst die Mittelsenkrechten m_{BC} und m_{AC}.
Sei $m_{BC} \cap m_{AC} =: \{U\}$. Es ist $|\overrightarrow{BU}| = |\overrightarrow{CU}|$ wegen $U \in m_{BC}$. Es ist auch $|\overrightarrow{CU}| = |\overrightarrow{AU}|$ wegen $U \in m_{AC}$. Damit gilt $\overrightarrow{BU} = \overrightarrow{AU}$ und daher $U \in m_{AB}$.

Also gilt $\{U\} = m_{BC} \cap m_{AC} \cap m_{AB}$. □

Wir betrachten weiterhin das Dreieck $\triangle ABC$.

Satz 19. *Die Höhengeraden $h_{A'}$, $h_{B'}$, $h_{C'}$ des Medialdreiecks $\triangle A'B'C'$ sind die Mittelsenkrechten m_{BC}, m_{AC}, m_{AB} des Dreiecks $\triangle ABC$. Der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks $\triangle ABC$ ist zugleich der Schnittpunkt der Höhengeraden des Medialdreiecks $\triangle A'B'C'$. Wir schreiben $H' := U$.*

Beweis. Wir betrachten zunächst $h_{C'}$. Es gilt $C' \in h_{C'}$ und $h_{C'} \perp A'B'$.

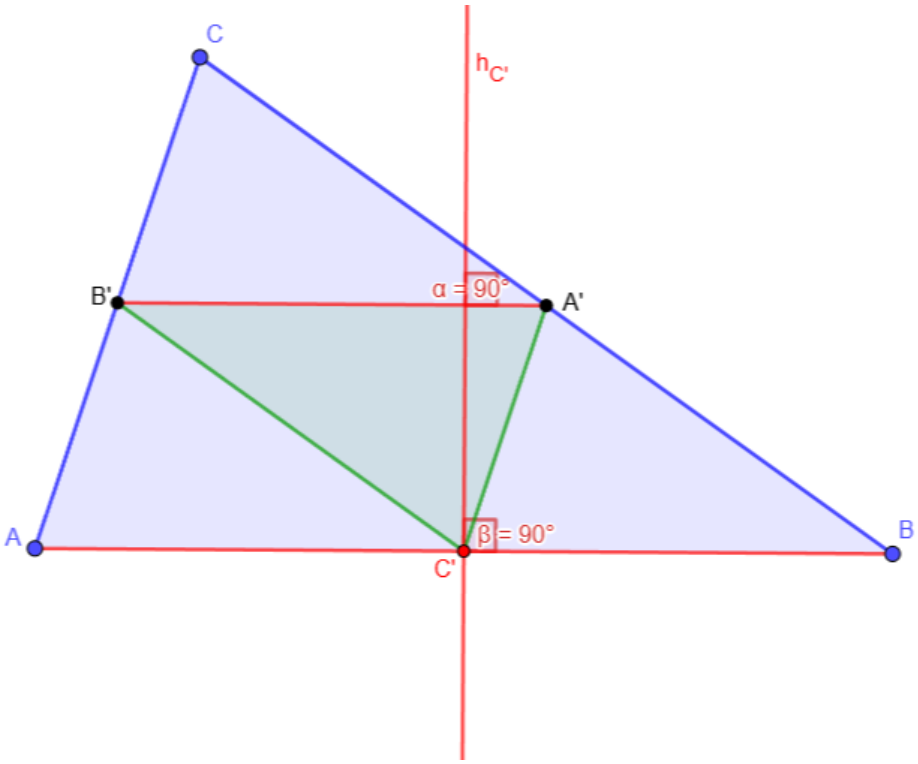


Abbildung 7: Beweisskizze Satz 19.

Wegen $A'B' = \varphi(AB)$ folgt $AB \parallel A'B'$. Damit gilt $h_{C'} \perp AB$, wobei $C' = M_{AB}$. Also ist $h_{C'} = m_{AB}$. Analog gilt $h_{A'} = m_{BC}$ und $h_{B'} = m_{AC}$.

Weiterhin wissen wir nach Satz 18, dass der Schnittpunkt U der Mittelsenkrechten m_{AB}, m_{AC}, m_{BC} des Dreiecks $\triangle ABC$ existiert und eindeutig ist. Also ist $H' := U$ der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $\triangle A'B'C'$. □

Satz 20. *Der Umkreismittelpunkt $U = \varphi(H)$, der Schwerpunkt S und der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks $\triangle ABC$ liegen auf einer Geraden, genannt Eulergerade. Dabei ist $\overrightarrow{SU} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{SH}$.*

Beweis. Wir betrachten erneut die Abbildung φ aus Bemerkung 17. Da φ geraden- und winkeltreu ist, bildet φ den Höhenschnittpunkt H des Dreiecks $\triangle ABC$ auf den Höhenschnittpunkt H' des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ ab. Weiter ist φ eine zentrische Streckung mit Zentrum S und Streckfaktor $k = -\frac{1}{2}$. Es gilt also

$$\overrightarrow{SH'} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{SH}.$$

Mit $H' = U$ folgt

$$\overrightarrow{SU} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{SH}.$$

Insbesondere liegen U, S und H auf einer Geraden, genannt Eulergerade. □

4 Grundlegende Konstruktionen im dreidimensionalen Raum

In Kapitel 3 haben wir die Eulergrade im Zweidimensionalen konstruiert und grundlegende Beziehungen zwischen dem Umkreismittelpunkt U, dem Schwerpunkt S und dem Höhenschnittpunkt H hergeleitet. Im Folgenden wollen wir uns der Eulergeraden im dreidimensionalen Raum widmen. Dazu behalten wir das bisherige Vorgehen bei und starten demnach mit den grundlegenden Konstruktionen.

4.1 Begriffe im $\mathbb{R}^3$

Definition 21. Punkte. Jeder Punkt $P \in \mathbb{R}^3$ wird mit seinem Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ identifiziert, wobei O der Ursprung des Raumes $\mathbb{R}^3$ ist.

Definition 22. Koplanarität. Seien $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$. Dann heißen diese Punkte koplanar, wenn es eine Ebene E gibt, die sie alle enthält, wenn also $A, B, C, D \in E$ gilt.

Definition 23. Ebene durch ein Dreieck. Sei $\mathscr{A}$ ein Dreieck im Raum $\mathbb{R}^3$. Für die Ebene, die das Dreieck $\mathscr{A}$ enthält, schreiben wir $E_{\mathscr{A}}$.

4.2 Begriffe in einem Tetraeder

Seien $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ nicht koplanar. Wir betrachten den Tetraeder $\triangle ABCD$. Wir betrachten den Tetraeder $\triangle ABCD$ im Raum $\mathbb{R}^3$.

Definition 24. Seitenflächen. Für die Seitenflächen des Tetraeders $\triangle ABCD$ gilt

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &:= \triangle BCD\\ \mathscr{B} &:= \triangle ACD\\ \mathscr{C} &:= \triangle ABD\\ \mathscr{D} &:= \triangle ABC.\end{aligned}$$

Definition 25. Seitenflächenschwerpunkte.

Für die Seitenflächen des Tetraeders $\triangle ABCD$ gilt:
Der Schwerpunkt der Seite $\mathscr{A}$ wird als $S_{\mathscr{A}}$ bezeichnet.

Der Schwerpunkt der Seite $\mathscr{B}$ wird als $S_{\mathscr{B}}$ bezeichnet.
Der Schwerpunkt der Seite $\mathscr{C}$ wird als $S_{\mathscr{C}}$ bezeichnet.
Der Schwerpunkt der Seite $\mathscr{D}$ wird als $S_{\mathscr{D}}$ bezeichnet.

Definition 26. Schwergeraden. Eine Gerade heißt Schwergerade des Tetraeders $\triangle ABCD$, wenn sie durch einen Eckpunkt und den Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche geht.
Wir haben also die Schwergeraden $AS_{\mathscr{A}}$, $BS_{\mathscr{B}}$, $CS_{\mathscr{C}}$, $DS_{\mathscr{D}}$ des Tetraeders $\triangle ABCD$.

Definition 27. Schwerpunkt. Der Schwerpunkt S des Tetraeders $\triangle ABCD$ ist der Schnittpunkt der vier Schwergeraden $AS_{\mathscr{A}}$, $BS_{\mathscr{B}}$, $CS_{\mathscr{C}}$, $DS_{\mathscr{D}}$; siehe auch Satz 37.

Definition 28. Umkreismittelpunktsenkrechte. Eine Gerade heißt Umkreismittelpunktsenkrechte des Tetraeders $\triangle ABCD$, wenn sie senkrecht auf einer Seitenfläche steht und ihren Umkreismittelpunkt enthält.
Für die Umkreismittelpunktsenkrechten $u_{\mathscr{A}}$, $u_{\mathscr{B}}$, $u_{\mathscr{C}}$, $u_{\mathscr{D}}$ des Tetraeders $\triangle ABCD$ gilt also

$$\begin{aligned} u_{\mathscr{A}} \perp \mathscr{A} \quad &\text{und} \quad U_{\mathscr{A}} \in u_{\mathscr{A}} \\ u_{\mathscr{B}} \perp \mathscr{B} \quad &\text{und} \quad U_{\mathscr{B}} \in u_{\mathscr{B}} \\ u_{\mathscr{C}} \perp \mathscr{C} \quad &\text{und} \quad U_{\mathscr{C}} \in u_{\mathscr{C}} \\ u_{\mathscr{D}} \perp \mathscr{D} \quad &\text{und} \quad U_{\mathscr{D}} \in u_{\mathscr{D}}, \end{aligned}$$

wobei $U_{\mathscr{A}}$, $U_{\mathscr{B}}$, $U_{\mathscr{C}}$, $U_{\mathscr{D}}$ die Umkreismittelpunkte der jeweiligen Seitenflächen sind.

Definition 29. Umkugelmittelpunkt. Der Umkugelmittelpunkt U des Tetraeders $\triangle ABCD$ ist der Schnittpunkt der vier Umkreismittelpunktsenkrechten $u_{\mathscr{A}}$, $u_{\mathscr{B}}$, $u_{\mathscr{C}}$, $u_{\mathscr{D}}$; siehe auch Satz 41.

Definition 30. Mittellotebene. Eine Ebene heißt Mittellotebene des Tetraeders $\triangle ABCD$, wenn sie senkrecht auf einer Kante steht und deren Mittelpunkt enthält.
Für die Mittellotebenen E_{AB}, E_{AC}, E_{BC}, E_{AD}, E_{BD}, E_{CD} des Tetraeders $\triangle ABCD$ gilt

$$\begin{aligned} M_{AB} \in E_{AB} \quad &\text{und} \quad E_{AB} \perp AB \\ M_{AC} \in E_{AC} \quad &\text{und} \quad E_{AC} \perp AC \\ M_{BC} \in E_{BC} \quad &\text{und} \quad E_{BC} \perp BC \\ M_{AD} \in E_{AD} \quad &\text{und} \quad E_{AD} \perp AD \\ M_{BD} \in E_{BD} \quad &\text{und} \quad E_{BD} \perp BD \\ M_{CD} \in E_{CD} \quad &\text{und} \quad E_{CD} \perp CD. \end{aligned}$$

Definition 31. Höhengerade. Eine Gerade heißt Höhengerade des Tetraeders $\triangle ABCD$, wenn sie durch einen Eckpunkt geht und senkrecht auf der Ebene durch die gegenüberliegende Seitenfläche steht.
Für die Höhengeraden $h_{\mathscr{A}}$, $h_{\mathscr{B}}$, $h_{\mathscr{C}}$, $h_{\mathscr{D}}$ des Tetraeders $\triangle ABCD$ gilt

$$\begin{aligned} A \in h_{\mathscr{A}} \quad &\text{und} \quad h_{\mathscr{A}} \perp E_{\mathscr{A}} \\ B \in h_{\mathscr{B}} \quad &\text{und} \quad h_{\mathscr{B}} \perp E_{\mathscr{B}} \\ C \in h_{\mathscr{C}} \quad &\text{und} \quad h_{\mathscr{C}} \perp E_{\mathscr{C}} \\ D \in h_{\mathscr{D}} \quad &\text{und} \quad h_{\mathscr{D}} \perp E_{\mathscr{D}}. \end{aligned}$$

Die Eulergerade wird auch im Dreidimensionalen mit Hilfe einer zentrischen Streckung konstruiert. Dabei ist das Zentrum der Schwerpunkt S des Tetraeders $\triangle ABCD$.

Definition 32. Zentrische Streckung. Seien $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $P, Z \in \mathbb{R}^3$. Weiterhin sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Abbildung.
Dann ist φ eine zentrische Streckung, wenn gilt

$$\varphi(P) = Z + k \cdot \overrightarrow{ZP} \quad \text{für } P \in \mathbb{R}^3,$$

wobei Z das Zentrum und k der Streckfaktor ist. Weiterhin gilt: φ ist winkeltreu, ebenentreu, geradentreu und längenverhältnistreu. Es führt φ jede Ebene in eine dazu parallele Ebene über.

Definition 33. Eulervektoren. Die Eulervektoren der Seitenflächen des Tetraeders $\triangle ABCD$ sind die Verbindungsvektoren der jeweiligen Schwer- und Umkreismittelpunkte; siehe auch Lemma 44.
Es gilt für die Eulervektoren

$$\begin{aligned} \vec{e}_{\mathscr{A}} &:= \overrightarrow{S_{\mathscr{A}} U_{\mathscr{A}}} \\ \vec{e}_{\mathscr{B}} &:= \overrightarrow{S_{\mathscr{B}} U_{\mathscr{B}}} \\ \vec{e}_{\mathscr{C}} &:= \overrightarrow{S_{\mathscr{C}} U_{\mathscr{C}}} \\ \vec{e}_{\mathscr{D}} &:= \overrightarrow{S_{\mathscr{D}} U_{\mathscr{D}}}. \end{aligned}$$

Definition 34. Eulerverschobene Höhengerade. Eine eulerverschobene Höhengerade des Tetraeders $\triangle ABCD$ resultiert aus einer Höhengerade durch Verschiebung um das (-3)- fache des dazugehörigen Eulervektors; siehe auch Lemma 44.

Es gilt für die eulerverschobenen Höhengeraden also

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{\mathscr{A}} &:= h_{\mathscr{A}} - 3 \cdot \vec{e}_{\mathscr{A}} \\ \tilde{h}_{\mathscr{B}} &:= h_{\mathscr{B}} - 3 \cdot \vec{e}_{\mathscr{B}} \\ \tilde{h}_{\mathscr{C}} &:= h_{\mathscr{C}} - 3 \cdot \vec{e}_{\mathscr{C}} \\ \tilde{h}_{\mathscr{D}} &:= h_{\mathscr{D}} - 3 \cdot \vec{e}_{\mathscr{D}}.\end{aligned}$$

Definition 35. Eulermodifizierter Höhenschnittpunkt. Der eulermodifizierte Höhenschnittpunkt $\tilde{H}$ des Tetraeders $\triangle ABCD$ ist der Schnittpunkt der vier eulerverschobenen Höhengeraden $\tilde{h}_{\mathscr{A}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{B}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{C}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{D}}$; siehe auch Lemma 44.

Definition 36. Eulergerade. Eine Gerade heißt Eulergerade des Tetraeders $\triangle ABCD$, wenn sie den Schwerpunkt S, den Umkugelmittelpunkt U und den eulermodifizierten Höhenschnittpunkt $\tilde{H}$ enthält, wenn also $S, U, \tilde{H} \in$ Eulergerade gilt; siehe auch Satz 45.
Für die Eulergerade gilt

$$\overrightarrow{S\tilde{H}} = -3 \cdot \overrightarrow{SU}.$$

5 Die Eulergerade im dreidimensionalen Raum

Es seien nicht koplanare Punkte $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Wir betrachten den Tetraeder $\triangle ABCD$. Dabei werden wieder die Seitenflächen $\triangle BCD$ als $\mathscr{A}$, $\triangle ACD$ als $\mathscr{B}$, $\triangle ABD$ als $\mathscr{C}$ und $\triangle ABC$ als $\mathscr{D}$ bezeichnet.

5.1 Konstruktion der Eulergeraden im dreidimensionalen Raum

Im Folgenden konstruieren wir die Eulergerade für den Tetraeder $\triangle ABCD$.

Schritt 1: Für die vier nicht koplanaren Punkte $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ konstruieren wir den Tetraeder $\triangle ABCD$.

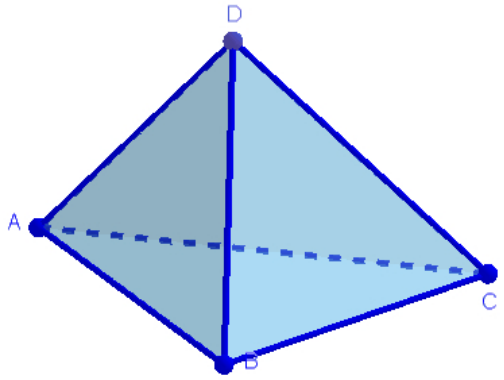


Abbildung 8: 3D Konstruktion Schritt 1 (Tetraeder).

Schritt 2: Wir bilden die vier Schwergeraden $AS_{\mathscr{A}}$, $BS_{\mathscr{B}}$, $CS_{\mathscr{C}}$, $DS_{\mathscr{D}}$. Der Schnittpunkt dieser Geraden ist der Schwerpunkt S.

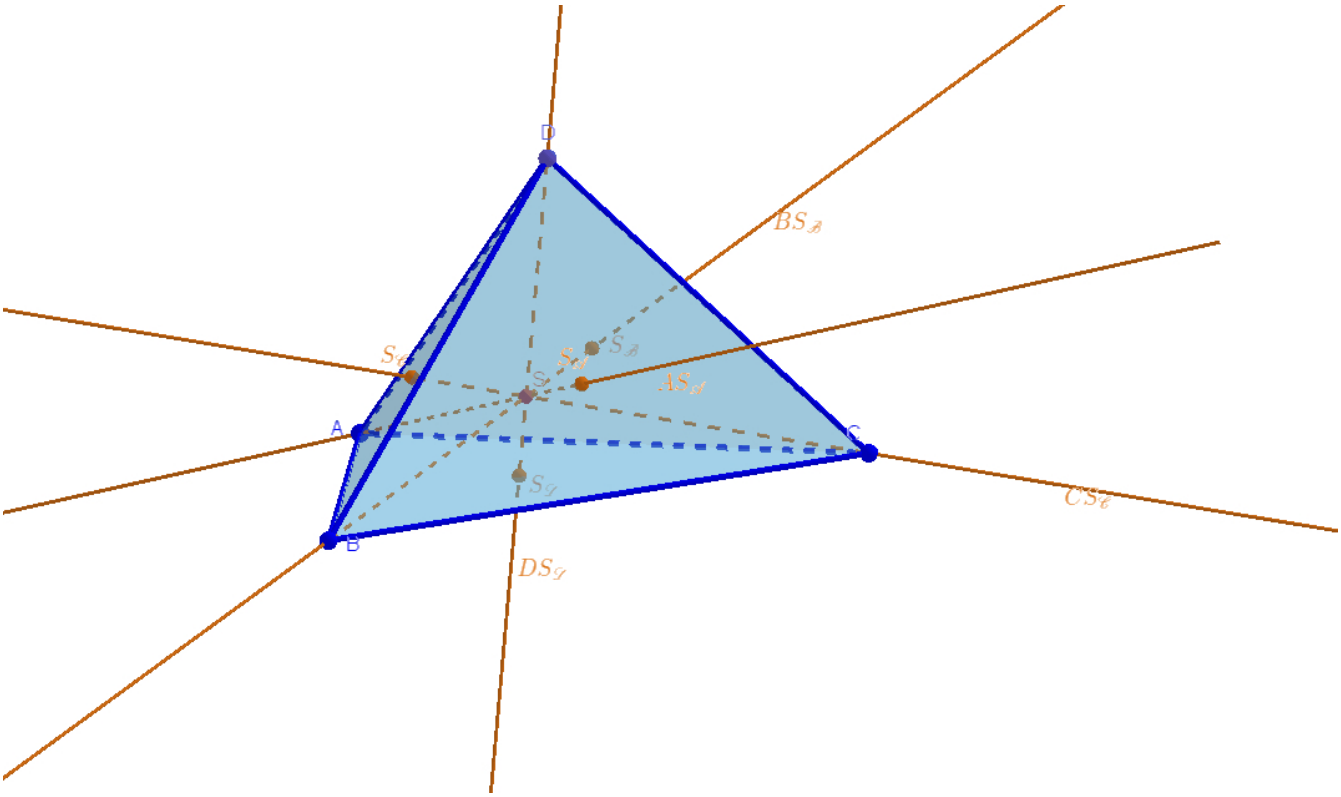


Abbildung 9: 3D Konstruktion Schritt 2 (Schwerpunkt).

Schritt 3: Wir konstruieren die vier Umkreismittelpunktsenkrechten $u_{\mathscr{A}}$, $u_{\mathscr{B}}$, $u_{\mathscr{C}}$, $u_{\mathscr{D}}$. Der Schnittpunkt dieser Geraden ist der Umkugelmittelpunkt U.

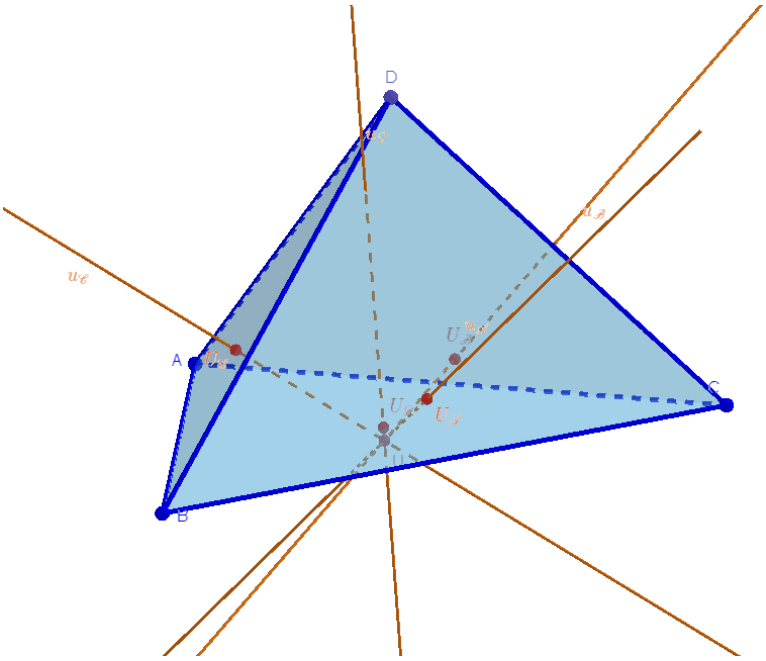


Abbildung 10: 3D Konstruktion Schritt 3 (Umkugelmittelpunkt).

Schritt 4: Wir konstruieren die vier Höhengeraden $h_{\mathscr{A}}$, $h_{\mathscr{B}}$, $h_{\mathscr{C}}$, $h_{\mathscr{D}}$ und die vier eulerverschobenen Höhengeraden $\tilde{h}_{\mathscr{A}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{B}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{C}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{D}}$. Diese schneiden sich im eulermodifizierten Höhenschnittpunkt $\tilde{H}$.

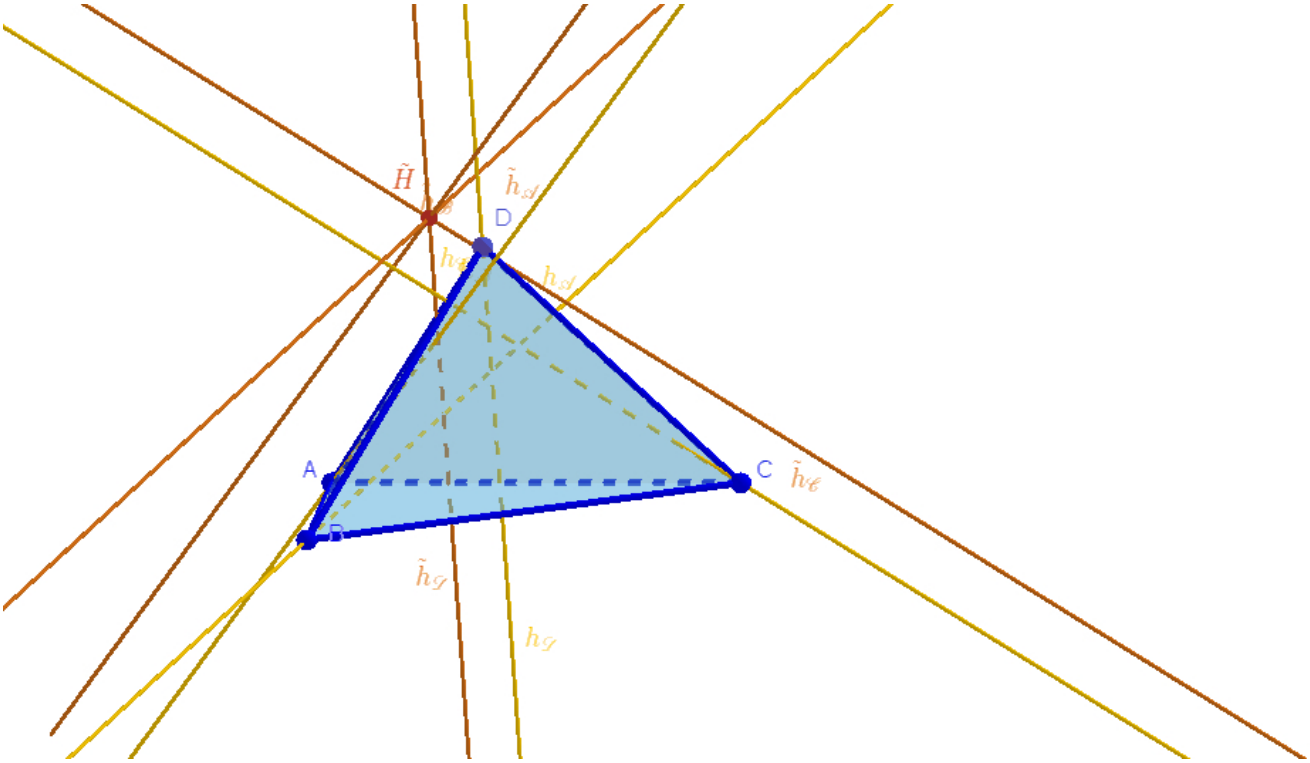


Abbildung 11: 3D Konstruktion Schritt 4 (Eulermodifizierter Höhenschnittpunkt).

Schritt 5: Wir legen eine Gerade durch die Punkte U, S und $\tilde{H}$. Diese Gerade wird als Eulergerade bezeichnet.

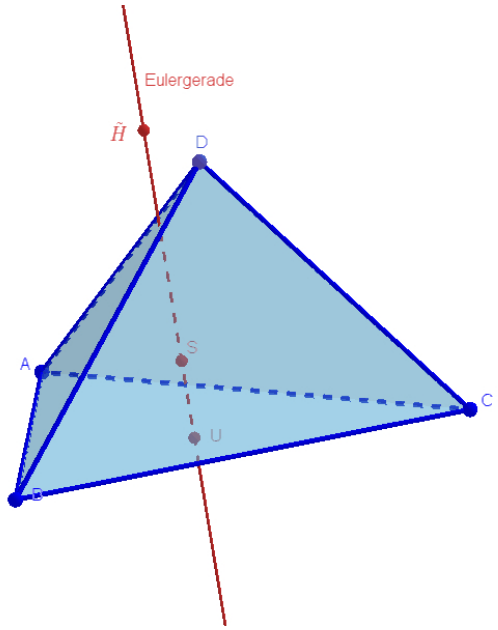


Abbildung 12: 3D Konstruktion Schritt 5 (Eulergerade).

5.2 Der Schwerpunkt und der Medialtetraeder

Wir betrachten weiterhin den Tetraeder $\triangle ABCD$. Die Seitenfläche $\triangle BCD$ wird wieder als $\mathscr{A}$, $\triangle ACD$ als $\mathscr{B}$, $\triangle ABD$ als $\mathscr{C}$ und $\triangle ABC$ als $\mathscr{D}$ bezeichnet.

Satz 37. *Es ist $S = \frac{1}{4}\cdot(A+B+C+D)$ der Schwerpunkt des Tetraeders $\triangle ABCD$, also der Schnittpunkt aller vier Schwergeraden $AS_{\mathscr{A}}, BS_{\mathscr{B}}, CS_{\mathscr{C}}, DS_{\mathscr{D}}$. Es gilt $-3\cdot\overrightarrow{SS_{\mathscr{A}}} = \overrightarrow{SA}$, $-3\cdot\overrightarrow{SS_{\mathscr{B}}} = \overrightarrow{SB}$, $-3\cdot\overrightarrow{SS_{\mathscr{C}}} = \overrightarrow{SC}$ und $-3\cdot\overrightarrow{SS_{\mathscr{D}}} = \overrightarrow{SD}$.*

Beweis. Sei $S_0 = \frac{1}{4}\cdot(A+B+C+D)$. Wir haben $S_0 \overset{!}{=} S$ zu zeigen. Dazu zeigen wir: S_0 liegt auf allen Schwergeraden.

Zunächst berechnen wir gemäß Satz 14 den Schwerpunkt $S_{\mathscr{D}}$ der Seitenfläche $\mathscr{D}$ durch

$$S_{\mathscr{D}} = \tfrac{1}{3}\cdot(A+B+C).$$

Nun betrachten wir die zwei Vektoren $\overrightarrow{S_{\mathscr{D}}S_0}$ und $\overrightarrow{S_0D}$. Diese berechnen wir durch

$$\overrightarrow{S_0S_{\mathscr{D}}} = -S_0 + S_{\mathscr{D}} = -\tfrac{1}{4}\cdot(A+B+C+D) + \tfrac{1}{3}\cdot(A+B+C) = \tfrac{1}{12}\cdot(A+B+C) - \tfrac{1}{4}\cdot D$$
$$\overrightarrow{S_0D} = -S_0 + D = -\tfrac{1}{4}\cdot(A+B+C+D) + D = -\tfrac{1}{4}\cdot(A+B+C) + \tfrac{3}{4}\cdot D.$$

Daraus folgt $\overrightarrow{S_0S_{\mathscr{D}}}\cdot(-3) = \overrightarrow{S_0D}$. Insbesondere liegt S_0 auf der Schwergeraden $DS_{\mathscr{D}}$.

Analog folgt für die anderen Schwerpunkte $S_{\mathscr{A}}$, $S_{\mathscr{B}}$, $S_{\mathscr{C}}$

$$\overrightarrow{S_0S_{\mathscr{A}}}\cdot(-3) = \overrightarrow{S_0A}$$
$$\overrightarrow{S_0S_{\mathscr{B}}}\cdot(-3) = \overrightarrow{S_0B}$$
$$\overrightarrow{S_0S_{\mathscr{C}}}\cdot(-3) = \overrightarrow{S_0C}.$$

Insbesondere liegt S_0 auf allen Schwergeraden. Somit ist $S_0 = S$. □

Definition 38. Medialtetraeder. Wir schreiben $A' := S_{\mathscr{A}}$, $B' := S_{\mathscr{B}}$, $C' := S_{\mathscr{C}}$, $D' := S_{\mathscr{D}}$. Der Tetraeder $\triangle A'B'C'D'$ heißt Medialtetraeder von $\triangle ABCD$. Somit sind die Schwerpunkte der Seitenfläche des Tetraeders $\triangle ABCD$ die Ecken des Medialtetraeders $\triangle A'B'C'D'$. Die Seitenflächen des Medialtetraederes werden mit $\mathscr{A}' := \triangle BCD$, $\mathscr{B}' := \triangle ACD$, $\mathscr{C}' := \triangle ABD$, $\mathscr{D}' := \triangle ABC$ bezeichnet.

Definition 39. Höhengerade des Medialtetraeders. Eine Gerade heißt Höhengerade des Medialtetraeders $\triangle A'B'C'D'$, wenn sie durch einen Eckpunkt geht und senkrecht auf der Ebene durch die gegenüberliegende Seitenfläche steht.
Für die Höhengeraden $h'_{\mathscr{A}'}$, $h'_{\mathscr{B}'}$, $h'_{\mathscr{C}'}$, $h'_{\mathscr{D}'}$ des Medialtetraeders $\triangle A'B'C'D'$ gilt

$$A' \in h'_{\mathscr{A}'} \quad \text{und} \quad h'_{\mathscr{A}'} \perp E_{\mathscr{A}'}$$
$$B' \in h'_{\mathscr{B}'} \quad \text{und} \quad h'_{\mathscr{B}'} \perp E_{\mathscr{B}'}$$
$$C' \in h'_{\mathscr{C}'} \quad \text{und} \quad h'_{\mathscr{C}'} \perp E_{\mathscr{C}'}$$
$$D' \in h'_{\mathscr{D}'} \quad \text{und} \quad h'_{\mathscr{D}'} \perp E_{\mathscr{D}'}.$$

Bemerkung 40. Wir definieren uns die Abbildung φ durch

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P} = S + \overrightarrow{SP} \longmapsto \varphi(P) = S - \tfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{SP}$$

Diese stellt eine Streckung mit Zentrum S und Streckfaktor $k = -\frac{1}{3}$ dar. Die Umkehrabbildung ist dementsprechend eine Streckung mit Zentrum S und Streckfaktor $k = -3$, also

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : Q = S + \overrightarrow{SQ} \longmapsto \varphi^{-1}(Q) = S - 3\overrightarrow{SQ}.$$

Es folgt mit Satz 37 und der Abbildung φ

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= S_{\mathscr{A}} = A' \\ \varphi(B) &= S_{\mathscr{B}} = B' \\ \varphi(C) &= S_{\mathscr{C}} = C' \\ \varphi(D) &= S_{\mathscr{D}} = D'.\end{aligned}$$

5.3 Der Umkugelmittelpunkt

Wir betrachten weiterhin den Tetraeder $\triangle ABCD$.

Satz 41. *Es existiert genau ein Punkt $U \in \mathbb{R}^3$, welcher der Schnittpunkt aller vier Umkreismittelpunktsenkrechten $u_{\mathscr{A}}, u_{\mathscr{B}}, u_{\mathscr{C}}, u_{\mathscr{D}}$ ist. Diesen bezeichnen wir als Umkugelmittelpunkt. Es gilt $|\overrightarrow{UA}| = |\overrightarrow{UB}| = |\overrightarrow{UC}| = |\overrightarrow{UD}|$.*

Beweis. Wir bilden die Mittellotebenen E_{AB} der Strecke $\overline{AB}$, E_{AC} der Strecke $\overline{AC}$ und E_{AD} der Strecke $\overline{AD}$.

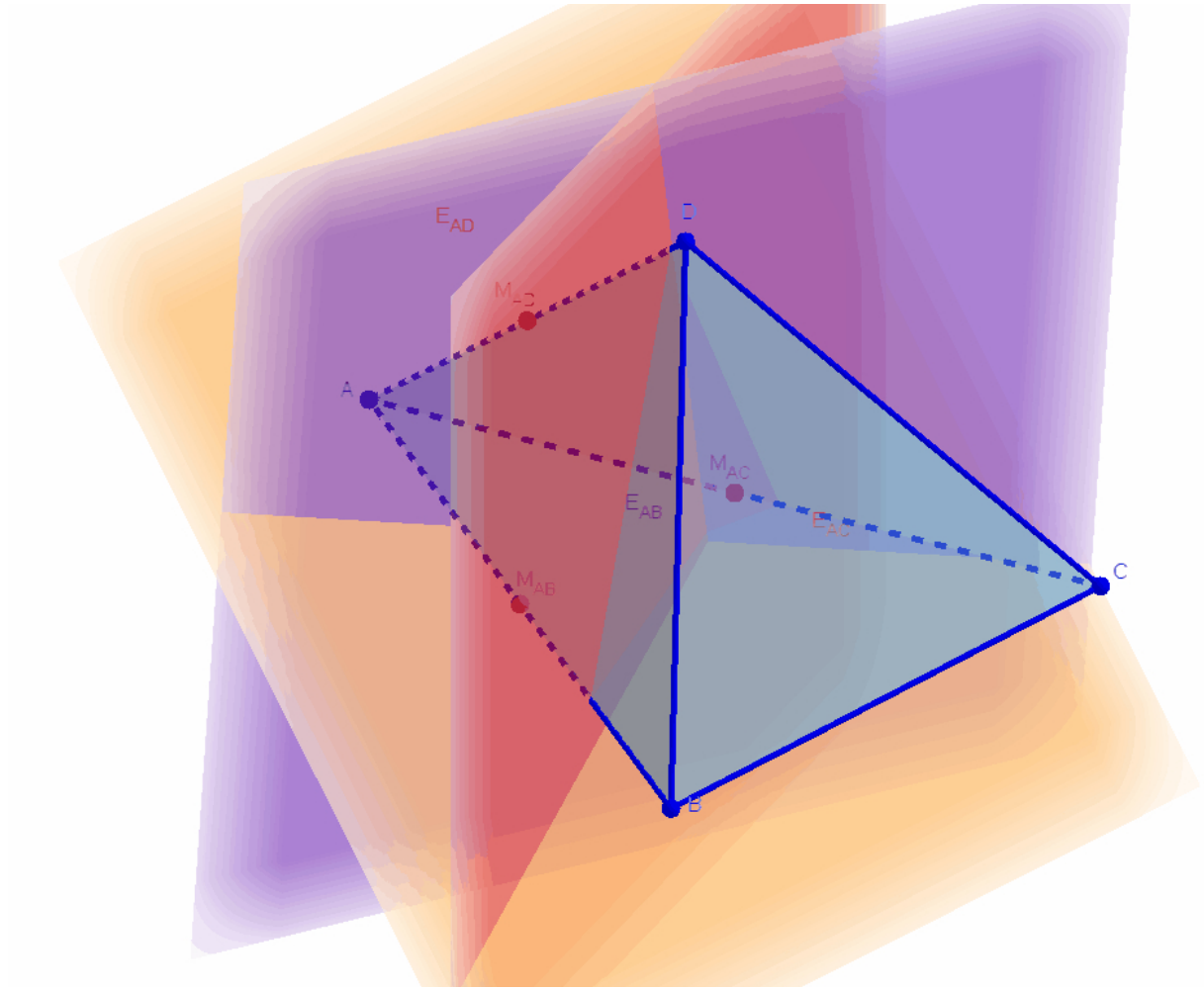


Abbildung 13: Beweisskizze Satz 41.

Wir wollen nun zeigen, dass sich E_{AB}, E_{AC}, E_{AD} in genau einem Punkt schneiden.

Zunächst betrachten wir die beiden Mittellotebenen E_{AB} und E_{AC}. Da die Punkte A, B und C nicht kollinear sind, sind $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ linear unabhängig. Dementsprechend müssen sich die Mittellotebenen E_{AB} und E_{AC} in einer Geraden $u_{\mathscr{g},0}$ schneiden. Für diese gilt also

$$E_{AB} \cap E_{AC} = \left\{ P \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{PB}| \wedge |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{PC}| \right\} =: u_{\mathscr{g},0}.$$

Für einen Punkt P auf $u_{\mathscr{g},0}$ gilt also auch $|\overrightarrow{BP}| = |\overrightarrow{PC}|$. Folglich ist $u_{\mathscr{g},0} \subseteq E_{BC}$.

Damit ist auch

$$u_{\mathscr{D},0} = u_{\mathscr{D},0} \cap E_{BC} = E_{AB} \cap E_{AC} \cap E_{BC}.$$

Insgesamt ist

$$u_{\mathscr{D},0} = E_{AB} \cap E_{AC} \cap E_{BC} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |\overrightarrow{AX}| = |\overrightarrow{BX}| = |\overrightarrow{CX}| \right\}.$$

Nun ist $U_{\mathscr{D}} \in u_{\mathscr{D},0}$, da $|\overrightarrow{AU_{\mathscr{D}}}| = |\overrightarrow{BU_{\mathscr{D}}}| = |\overrightarrow{CU_{\mathscr{D}}}|$. Ferner ist $u_{\mathscr{D},0}$ senkrecht auf $E_{\mathscr{D}}$, da $u_{\mathscr{D},0} \subseteq E_{AB}$ und $u_{\mathscr{D},0} \subseteq E_{AC}$. Damit ist $u_{\mathscr{D},0}$ die Umkreismittelpunktsenkrechte der Seitenfläche $\mathscr{D}$, also $u_{\mathscr{D},0} = u_{\mathscr{D}}$.

Analog können die restlichen Umkreismittelpunktsenkrechten konstruiert werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
u_{\mathscr{A}} &= E_{BC} \cap E_{BD} \cap E_{CD} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |\overrightarrow{BX}| = |\overrightarrow{CX}| = |\overrightarrow{DX}| \right\} \\
u_{\mathscr{B}} &= E_{AC} \cap E_{AD} \cap E_{CD} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |\overrightarrow{AX}| = |\overrightarrow{CX}| = |\overrightarrow{DX}| \right\} \\
u_{\mathscr{C}} &= E_{AB} \cap E_{AD} \cap E_{BD} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |\overrightarrow{AX}| = |\overrightarrow{BX}| = |\overrightarrow{DX}| \right\} \\
u_{\mathscr{D}} &= E_{AB} \cap E_{AC} \cap E_{BC} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |\overrightarrow{AX}| = |\overrightarrow{BX}| = |\overrightarrow{CX}| \right\}.
\end{aligned}$$

Nun schneiden wir alle sechs Mittellotebenen. Damit ergibt sich

$$\mathscr{U} := E_{AB} \cap E_{AC} \cap E_{AD} \cap E_{BC} \cap E_{BD} \cap E_{CD} = u_{\mathscr{A}} \cap u_{\mathscr{B}} \cap u_{\mathscr{C}} \cap u_{\mathscr{D}}.$$

Wir beachten noch

$$\mathscr{U} = E_{AB} \cap E_{AC} \cap E_{AD} \cap E_{BC} \cap E_{BD} \cap E_{CD} = E_{AB} \cap E_{AC} \cap E_{AD},$$

da $E_{AB} \cap E_{AC} \cap E_{AD} \subseteq E_{BC}, E_{BD}, E_{CD}$.

Es ist noch zu zeigen, dass die Menge $\mathscr{U}$ nicht leer ist und sie lediglich ein Element U enthält.

Dazu betrachten wir die Mittellotebenen genauer. Für $X \in \mathbb{R}^3$ ist $X \in E_{AB}$ genau dann, wenn $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{M_{AB}X}$ ist. Also ist

$$E_{AB} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (B-A)^\intercal \cdot (X - (\tfrac{1}{2} \cdot (A+B))) = 0 \right\}.$$

Somit gilt für $X \in E_{AB}$

$$(B-A)^\intercal \cdot X = (B-A)^\intercal \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot (A+B)) = \tfrac{1}{2} \cdot (|B|^2 - |A|^2).$$

Nun wenden wir dieses Vorgehen auf die drei Mittellotebenen E_{AB}, E_{AC} und E_{AD} in unserem Tetraeder $\triangle ABCD$ an. Anschließend fassen wir die Ergebnisse in einem linearen Gleichungssystem $M \cdot X = b$ zusammen. Sei dazu

$$M = \begin{pmatrix} (B-A)^\intercal \\ (C-A)^\intercal \\ (D-A)^\intercal \end{pmatrix}.$$

Die Matrix M besteht aus den drei Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, transponiert in den Zeilen. Dann ist

$$\mathscr{U} = E_{AB} \cap E_{AC} \cap E_{AD} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; M \cdot X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} |B|^2 - |A|^2 \\ |C|^2 - |A|^2 \\ |D|^2 - |A|^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Da die Punkte A, B, C und D nicht koplanar sind, sind die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ linear unabhängig. Damit ist die Matrix M invertierbar und es existiert eine eindeutige Lösung U, nämlich

$$U = M^{-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} |B|^2 - |A|^2 \\ |C|^2 - |A|^2 \\ |D|^2 - |A|^2 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\mathscr{U} = \{U\}$. □

Bemerkung 42. Wir wollen die Bedeutung von $\varphi^{-1}(U)$ im Tetraeder $\triangle ABCD$ untersuchen. Im zweidimensionalen Fall war $\varphi^{-1}(U)$ der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$. Naheliegend ist hier also die Frage nach dem Höhenschnittpunkt des Tetraeders $\triangle ABCD$. Dieser existiert allerdings im Allgemeinen nicht. Diese Tatsache wollen wir in Beispiel 43 nachweisen.

Stattdessen wollen wir im weiteren Verlauf den Schnittpunkt der eulerverschobenen Höhen betrachten, siehe auch Beispiel 43 und Lemma 44.

5.4 Der fehlende Höhenschnittpunkt

Beispiel 43. Wir wollen anhand eines Beispiels nachweisen, dass ein Tetraeder im Allgemeinen keinen Höhenschnittpunkt hat. Seien

$$A = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten den Tetraeder $\triangle ABCD$, unter Verwendung von GeoGebra. Wir behaupten, dass $h_{\mathscr{C}}$ und $h_{\mathscr{D}}$ windschief sind.

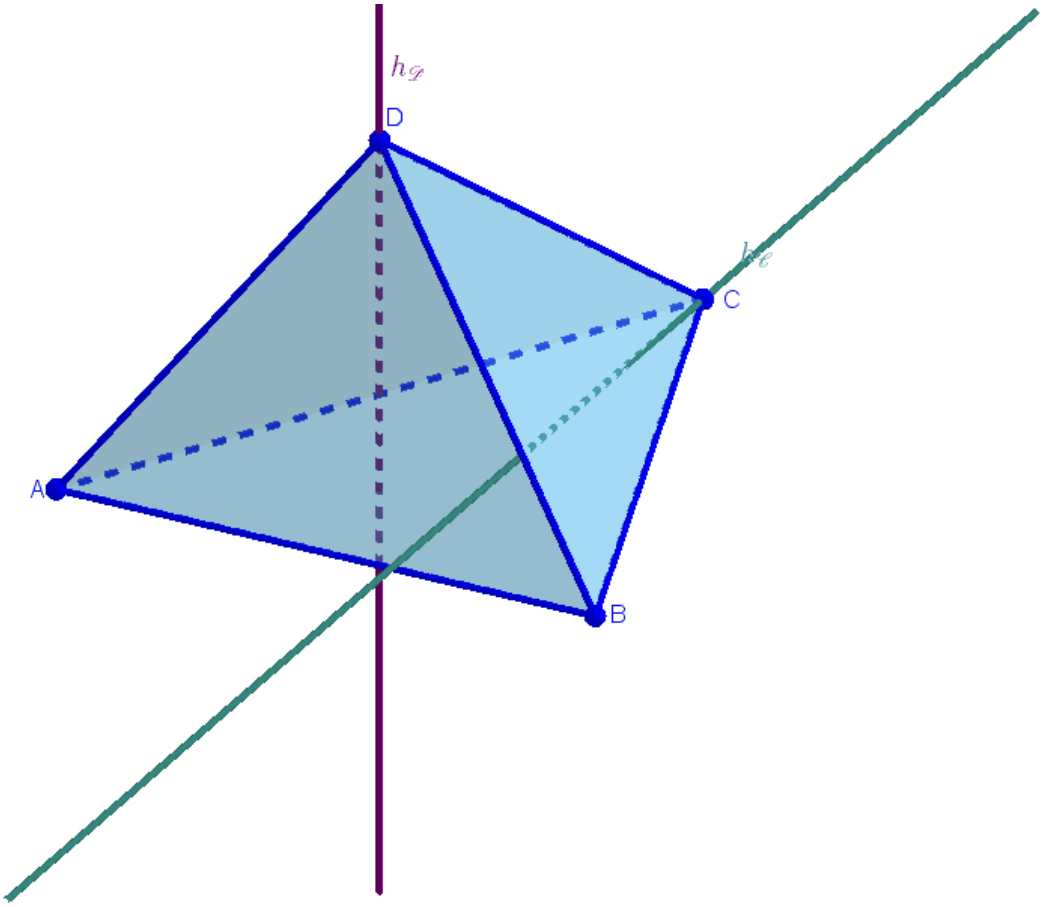


Abbildung 14: Beispiel 43 (windschiefe Höhengeraden).

Es gilt für die Höhengeraden

$$h_{\mathscr{D}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$h_{\mathscr{C}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Nun wollen wir rechnerisch nachweisen, dass sich $h_{\mathscr{C}}$ und $h_{\mathscr{D}}$ nicht schneiden.

Es steht

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 27 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

senkrecht auf $\mathscr{D} = \triangle ABC$. Und es steht

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

senkrecht auf $\mathscr{C} = \triangle ABD$.

Nun betrachten wir den Verbindungsvektor $\overrightarrow{DC}$ der beiden Aufpunkte der Geraden $h_{\mathscr{C}}$ und $h_{\mathscr{D}}$. Es gilt

$$\overrightarrow{DC} = C - D = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Wir prüfen $\overrightarrow{DC}$ und die beiden Richtungsvektoren der Höhengeraden $h_{\mathscr{C}}$, $h_{\mathscr{D}}$ auf lineare Unabhängigkeit. Tatsächlich ist

$$\det\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & -8 \\ 3 & 0 & -20 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}\right) = 0 + 0 - 24 - 0 + 60 - 0 = 36 \neq 0.$$

Damit sind die beiden Richtungsvektoren der Höhengeraden $h_{\mathscr{C}}$, $h_{\mathscr{D}}$ und deren Verbindungsvektor der beiden Aufpunkte $\overrightarrow{DC}$ linear unabhängig. Sie liegen daher nicht in einer Ebene. Also sind die Geraden $h_{\mathscr{C}}$ und $h_{\mathscr{D}}$ windschief, sie besitzen also keinen Schnittpunkt. Es existiert im Ergebnis kein Höhenschnittpunkt im Tetraeder $\triangle ABCD$.

5.5 Der eulermodifizierte Höhenschnittpunkt und die Eulergerade

Lemma 44. *Wir erinnern an die Umkreismittelpunktsenkrechten $u_{\mathscr{A}}$, $u_{\mathscr{B}}$, $u_{\mathscr{C}}$, $u_{\mathscr{D}}$. Weiter erinnern wir an die Eulervektoren*

$$\begin{aligned}\vec{e}_{\mathscr{A}} &= \overrightarrow{S_{\mathscr{A}}U_{\mathscr{A}}}\\ \vec{e}_{\mathscr{B}} &= \overrightarrow{S_{\mathscr{B}}U_{\mathscr{B}}}\\ \vec{e}_{\mathscr{C}} &= \overrightarrow{S_{\mathscr{C}}U_{\mathscr{C}}}\\ \vec{e}_{\mathscr{D}} &= \overrightarrow{S_{\mathscr{D}}U_{\mathscr{D}}}.\end{aligned}$$

und an die eulerverschobenen Höhengeraden $\tilde{h}_{\mathscr{A}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{B}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{C}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{D}}$; vgl. Definition 34. Es gilt für die eulerverschobenen Höhengeraden des Tetraeders $\triangle ABCD$

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{\mathscr{A}} &= \varphi^{-1}(u_{\mathscr{A}})\\ \tilde{h}_{\mathscr{B}} &= \varphi^{-1}(u_{\mathscr{B}})\\ \tilde{h}_{\mathscr{C}} &= \varphi^{-1}(u_{\mathscr{C}})\\ \tilde{h}_{\mathscr{D}} &= \varphi^{-1}(u_{\mathscr{D}}).\end{aligned}$$

Weiter erinnern wir an den Umkugelmittelpunkt U des Tetraeders $\triangle ABCD$. Es ist $\tilde{H} := \varphi^{-1}(U)$ der Schnittpunkt der eulerverschobenen Höhengeraden $\tilde{h}_{\mathscr{A}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{B}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{C}}$ und $\tilde{h}_{\mathscr{D}}$ des Tetraeders $\triangle ABCD$. Es heißt $\tilde{H}$ der eulermodifizierte Höhenschnittpunkt der eulerverschobenen Höhengeraden des Tetraeders $\triangle ABCD$.

Beweis. Wir konstruieren den Medialtetraeder $\triangle A'B'C'D'$. Weiterhin erinnern wir an

$$\varphi(A) = S_{\mathscr{A}} = A', \quad \varphi(B) = S_{\mathscr{B}} = B', \quad \varphi(C) = S_{\mathscr{C}} = C', \quad \varphi(D) = S_{\mathscr{D}} = D'.$$

Die folgende Abbildung zeigt den Tetraeder $\triangle ABCD$ und darin den Medialtetraeder $\triangle A'B'C'D'$.

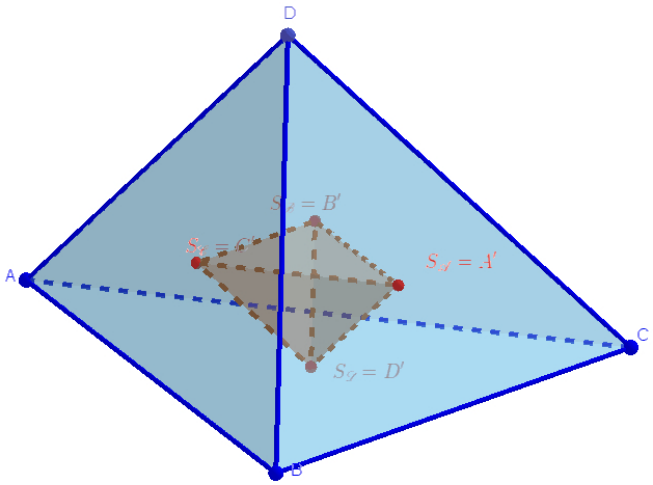


Abbildung 15: Lemma 44 (Medialtetraeder).

Wir wissen, $h'_{\mathscr{D}'}$ ist die Höhengerade des Medialtetraeders durch $\mathscr{D}' = S_{\mathscr{D}}$ auf $E_{\mathscr{D}'}$. Weiterhin wissen wir, $u_{\mathscr{D}}$ geht durch den Umkreismittelpunkt $U_{\mathscr{D}}$ und steht senkrecht auf $E_{\mathscr{D}}$.

Es ist $E_{\mathscr{D}'}$ parallel zu $E_{\mathscr{D}}$. Damit stehen $h'_{\mathscr{D}'}$ und $u_{\mathscr{D}}$ senkrecht auf $E_{\mathscr{D}}$. Somit entsteht $u_{\mathscr{D}}$ durch Verschieben von $h'_{\mathscr{D}'}$ um den Eulervektor

$$\vec{e}_{\mathscr{D}} = \overrightarrow{S_{\mathscr{D}} U_{\mathscr{D}}}.$$

Wir schreiben $\tilde{h}'_{\mathscr{D}'} := u_{\mathscr{D}}$. Insgesamt ist also

$$\tilde{h}'_{\mathscr{D}'} = h'_{\mathscr{D}'} + \vec{e}_{\mathscr{D}}.$$

Nun wenden wir die Abbildung φ^{-1} an. Nach Definition 34 ist

$$\tilde{h}_{\mathscr{D}} = h_{\mathscr{D}} - 3 \cdot \vec{e}_{\mathscr{D}}.$$

Es ist

$$h_{\mathscr{D}} = \varphi^{-1}(h'_{\mathscr{D}'}).$$

Dann ist

$$\tilde{h}_{\mathscr{D}} = h_{\mathscr{D}} - 3 \cdot \vec{e}_{\mathscr{D}} = \varphi^{-1}(h'_{\mathscr{D}'}) - 3 \cdot \vec{e}_{\mathscr{D}} = \varphi^{-1}(h'_{\mathscr{D}'} + \vec{e}_{\mathscr{D}}) = \varphi^{-1}(\tilde{h'}_{\mathscr{D}'}) = \varphi^{-1}(u_{\mathscr{D}}).$$

Analog ist auch $\tilde{h}_{\mathscr{A}} = \varphi^{-1}(u_{\mathscr{A}})$, $\tilde{h}_{\mathscr{B}} = \varphi^{-1}(u_{\mathscr{B}})$, $\tilde{h}_{\mathscr{C}} = \varphi^{-1}(u_{\mathscr{C}})$.

Für den eulermodifizierten Höhenschnittpunkt $\tilde{H}$ und den Umkugelmittelpunkt U gilt also

$$\begin{aligned}\{\tilde{H}\} = \varphi^{-1}(\{U\}) &= \varphi^{-1}(u_{\mathscr{A}} \cap u_{\mathscr{B}} \cap u_{\mathscr{C}} \cap u_{\mathscr{D}}) \\ &= \varphi^{-1}(u_{\mathscr{A}}) \cap \varphi^{-1}(u_{\mathscr{B}}) \cap \varphi^{-1}(u_{\mathscr{C}}) \cap \varphi^{-1}(u_{\mathscr{D}}) \\ &= \tilde{h}_{\mathscr{A}} \cap \tilde{h}_{\mathscr{B}} \cap \tilde{h}_{\mathscr{C}} \cap \tilde{h}_{\mathscr{D}}.\end{aligned}$$

Satz 45. Wir erinnern an die eulerverschobenen Höhengeraden

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{\mathscr{A}} &= h_{\mathscr{A}} - 3 \cdot \vec{e}_{\mathscr{A}} = \varphi^{-1}(\tilde{h'}_{\mathscr{A}'}) \quad \text{mit} \quad e_{\mathscr{A}} = \overrightarrow{S_{\mathscr{A}} U_{\mathscr{A}}} \\ \tilde{h}_{\mathscr{B}} &= h_{\mathscr{B}} - 3 \cdot \vec{e}_{\mathscr{B}} = \varphi^{-1}(\tilde{h'}_{\mathscr{B}'}) \quad \text{mit} \quad e_{\mathscr{B}} = \overrightarrow{S_{\mathscr{B}} U_{\mathscr{B}}} \\ \tilde{h}_{\mathscr{C}} &= h_{\mathscr{C}} - 3 \cdot \vec{e}_{\mathscr{C}} = \varphi^{-1}(\tilde{h'}_{\mathscr{C}'}) \quad \text{mit} \quad e_{\mathscr{C}} = \overrightarrow{S_{\mathscr{C}} U_{\mathscr{C}}} \\ \tilde{h}_{\mathscr{D}} &= h_{\mathscr{D}} - 3 \cdot \vec{e}_{\mathscr{D}} = \varphi^{-1}(\tilde{h'}_{\mathscr{D}'}) \quad \text{mit} \quad e_{\mathscr{D}} = \overrightarrow{S_{\mathscr{D}} U_{\mathscr{D}}}.\end{aligned}$$

Es schneiden sich die eulerverschobenen Höhengeraden $\tilde{h}_{\mathscr{A}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{B}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{C}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{D}}$ im Punkt $\tilde{H} = \varphi^{-1}(U)$.

Es liegen U, S, $\tilde{H}$ auf einer Geraden, genannt Eulergerade. Es gilt $-3 \cdot \overrightarrow{SU} = \overrightarrow{S\tilde{H}}$.

Beweis. Zu zeigen ist angesichts Lemma 44 nur noch: $-3 \cdot \overrightarrow{SU} = \overrightarrow{S\tilde{H}}$. In der Tat ist $\overrightarrow{S\tilde{H}} = \overrightarrow{S\varphi^{-1}(U)} = -3 \cdot \overrightarrow{SU}$. □

Beispiel 46. Wir wollen nun an einem Beispiel illustrieren, dass sich die eulerverschobenen Höhengeraden $\tilde{h}_{\mathscr{A}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{B}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{C}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{D}}$ in einem Tetraeder im eulermodifizierten Höhenschnittpunkt $\tilde{H}$ schneiden. Die folgenden Rechnungen sind mittels GeoGebra durchgeführt; siehe `Beispiel 46 (Eulergerade).ggb` im digitalen Anhang. Seien

$$A = \begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}.$$

die Eckpunkte des Tetraeders $\triangle ABCD$. Wir erinnern an $S_{\mathscr{A}} = A'$, $S_{\mathscr{B}} = B'$, $S_{\mathscr{C}} = C'$, $S_{\mathscr{D}} = D'$. Dann gilt für die Eckpunkte des Medialtetraeders $\triangle A'B'C'D'$

$$A' = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix}, \quad B' = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}, \quad C' = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix}, \quad D' = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Es gilt für die Höhengeraden im Medialtetraeder $\triangle A'B'C'D'$

$$h'_{\mathscr{A}'} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} + a' \begin{pmatrix} 20/9 \\ -4/9 \\ 4/3 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad a' \in \mathbb{R}$$

$$h'_{\mathscr{B}'} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4/3 \end{pmatrix} + b' \cdot \begin{pmatrix} 4/3 \\ -8/3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad b' \in \mathbb{R}$$

$$h'_{\mathscr{C}'} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} + c' \cdot \begin{pmatrix} -8/9 \\ -20/9 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad c' \in \mathbb{R}$$

$$h'_{\mathscr{D}'} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + d' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad d' \in \mathbb{R}.$$

Nun verschieben wir die 4 Höhengeraden $h'_{\mathscr{A}'}$, $h'_{\mathscr{B}'}$, $h'_{\mathscr{C}'}$, $h'_{\mathscr{D}'}$ um den Eulervektor der jeweiligen Seite. Es gilt für die Schwerpunkte

$$S_{\mathscr{A}} = A' = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}, \quad S_{\mathscr{B}} = B' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}, \quad S_{\mathscr{C}} = C' = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}, \quad S_{\mathscr{D}} = D' = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und für die Umkreismittelpunkte

$$U_{\mathscr{A}} = \begin{pmatrix} 23/14 \\ 47/70 \\ 52/35 \end{pmatrix}, \quad U_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 21/178 \\ 225/178 \\ 70/89 \end{pmatrix}, \quad U_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} -19/50 \\ -7/10 \\ 29/25 \end{pmatrix}, \quad U_{\mathscr{D}} = \begin{pmatrix} 5/18 \\ 17/18 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt für den Eulervektor der jeweiligen Seite

$$\vec{e}_{\mathscr{A}} = \overrightarrow{S_{\mathscr{A}} U_{\mathscr{A}}} = \begin{pmatrix} -1/42 \\ 71/210 \\ 16/105 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{\mathscr{B}} = \overrightarrow{S_{\mathscr{B}} U_{\mathscr{B}}} = \begin{pmatrix} 21/178 \\ 47/178 \\ -146/267 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{\mathscr{C}} = \overrightarrow{S_{\mathscr{C}} U_{\mathscr{C}}} = \begin{pmatrix} -7/150 \\ -1/30 \\ -13/75 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{\mathscr{D}} = \overrightarrow{S_{\mathscr{D}} U_{\mathscr{C}}} = \begin{pmatrix} -7/18 \\ 11/18 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt für die eulerverschobenen Höhengeraden, d.h. die Umkreismittelpunktsenkrechten,

$$u_{\mathscr{A}} = \tilde{h}'_{\mathscr{A}'} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 23/14 \\ 47/70 \\ 52/35 \end{pmatrix} + \tilde{a}' \cdot \begin{pmatrix} 20/9 \\ -4/9 \\ 4/3 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \tilde{a}' \in \mathbb{R}$$

$$u_{\mathscr{B}} = \tilde{h}'_{\mathscr{B}'} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 21/178 \\ 225/178 \\ 70/89 \end{pmatrix} + \tilde{b}' \cdot \begin{pmatrix} 4/3 \\ -8/3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \tilde{b}' \in \mathbb{R}$$

$$u_{\mathscr{C}} = \tilde{h}'_{\mathscr{C}'} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -19/50 \\ -7/10 \\ 29/25 \end{pmatrix} + \tilde{c}' \cdot \begin{pmatrix} -8/9 \\ -20/9 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \tilde{c}' \in \mathbb{R}$$

$$u_{\mathscr{D}} = \tilde{h}'_{\mathscr{D}'} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5/18 \\ 17/18 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{d}' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \tilde{d}' \in \mathbb{R}.$$

Nun wollen wir rechnerisch nachweisen, dass sich $u_{\mathscr{A}}$, $u_{\mathscr{B}}$, $u_{\mathscr{C}}$, $u_{\mathscr{D}}$ in einem Punkt schneiden. Dazu setzen wir zunächst die Parametrisierungen der Höhengeraden $u_{\mathscr{A}}$, $u_{\mathscr{D}}$ gleich. Wir lösen das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 23/14 + 20/9 \cdot \tilde{a}' \\ 47/70 - 4/9 \cdot \tilde{a}' \\ 52/35 + 4/3 \cdot \tilde{a}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/18 \\ 17/18 \\ 3 \cdot \tilde{d}' \end{pmatrix}.$$

Mit der ersten Zeile erhalten wir

$$\tilde{a}' = -43/70.$$

Eingesetzt in die zweite Zeile erhalten wir $\frac{17}{18} = \frac{17}{18}$. Eingesetzt in die letzte Zeile erhalten wir

$$\tilde{d}' = 2/9.$$

Für den Schnittpunkt von $u_{\mathscr{A}}$ und $u_{\mathscr{D}}$ gilt also

$$U = \begin{pmatrix} 5/18 \\ 17/18 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Nun überprüfen wir, ob dieser Punkt auch auf den Umkreismittelpunktsenkrechten $u_{\mathscr{B}}$ und $u_{\mathscr{C}}$ liegt. Dazu setzen wir U in beide Gleichungen ein. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 5/18 \\ 17/18 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21/178 \\ 225/178 \\ 70/89 \end{pmatrix} + \tilde{b}' \cdot \begin{pmatrix} 4/3 \\ -8/3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

für $\tilde{b}' = 32/267$ und

$$\begin{pmatrix} 5/18 \\ 17/18 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19/50 \\ -7/10 \\ 29/25 \end{pmatrix} + \tilde{c}' \cdot \begin{pmatrix} -8/9 \\ -20/9 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

für $\tilde{c}' = -37/50$. Damit schneiden sich die eulerverschobenen Höhengeraden, d.h. die Umkreismittelpunktsenkrechten $u_{\mathscr{A}}$, $u_{\mathscr{B}}$, $u_{\mathscr{C}}$, $u_{\mathscr{D}}$, im Punkt

$$U = \begin{pmatrix} 5/18 \\ 17/18 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Es ist U der Umkugelmittelpunkt des Tetraeders $\triangle ABCD$.

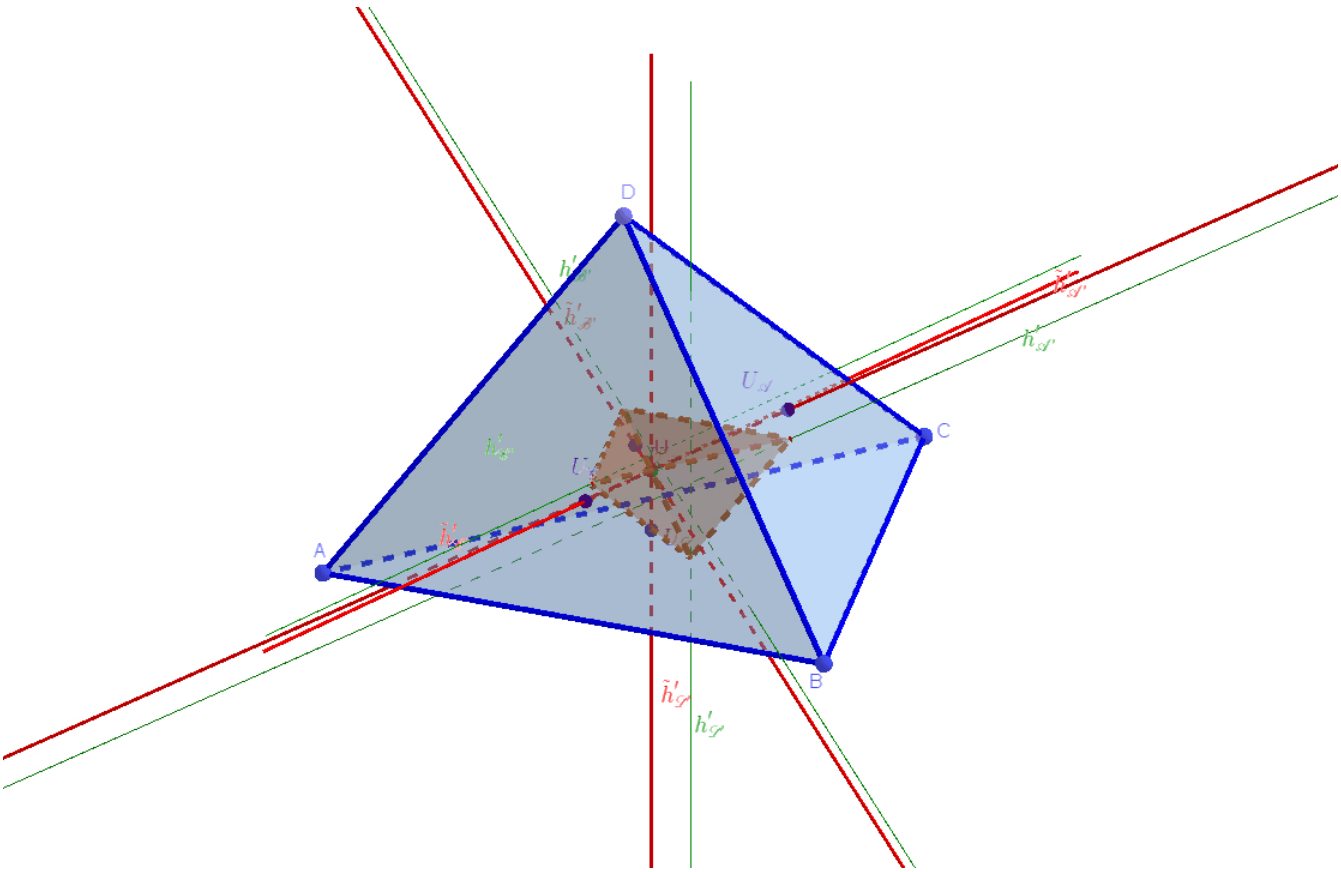


Abbildung 16: Beispiel 46 (Umkugelmittelpunkt).

Nun illustrieren wir, dass sich die Höhengeraden $h_{\mathscr{A}}$, $h_{\mathscr{B}}$, $h_{\mathscr{C}}$, $h_{\mathscr{D}}$ des Tetraeders $\triangle ABCD$ im eulermodifizierten Höhenschnittpunkt $\tilde{H}$ schneiden. Dazu verschie-

ben wir die Höhengeraden $h_{\mathscr{A}}$, $h_{\mathscr{B}}$, $h_{\mathscr{C}}$, $h_{\mathscr{D}}$ um das (-3)-fache des jeweiligen Eulervektors. Mit GeoGebra gilt für die Höhengeraden

$$h_{\mathscr{A}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$h_{\mathscr{B}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 24 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad b \in \mathbb{R}$$

$$h_{\mathscr{C}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$h_{\mathscr{D}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad d \in \mathbb{R}.$$

Für die eulerverschobenen Höhen gilt also

$$\tilde{h}_{\mathscr{A}} = h_{\mathscr{A}} - 3 \cdot \vec{e}_{\mathscr{A}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -41/14 \\ -71/70 \\ -16/35 \end{pmatrix} + \tilde{a} \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tilde{a} \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{h}_{\mathscr{B}} = h_{\mathscr{B}} - 3 \cdot \vec{e}_{\mathscr{B}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 293/178 \\ -497/178 \\ 146/89 \end{pmatrix} + \tilde{b} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 24 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tilde{b} \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{h}_{\mathscr{C}} = h_{\mathscr{C}} - 3 \cdot \vec{e}_{\mathscr{C}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 157/50 \\ 31/10 \\ 13/25 \end{pmatrix} + \tilde{c} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{h}_{\mathscr{D}} = h_{\mathscr{D}} - 3 \cdot \vec{e}_{\mathscr{D}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7/6 \\ -11/6 \\ 4 \end{pmatrix} + \tilde{d} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tilde{d} \in \mathbb{R}.$$

Nun wollen wir rechnerisch nachweisen, dass sich $\tilde{h}_{\mathscr{A}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{B}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{C}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{D}}$ in einem Punkt schneiden. Dazu setzen wir zunächst die Parametrisierungen der eulerverschobenen Höhengeraden $\tilde{h}_{\mathscr{A}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{D}}$ gleich. Wir lösen das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -41/14 - 20 \cdot \tilde{a} \\ -71/70 + 4 \cdot \tilde{a} \\ -16/35 - 12 \cdot \tilde{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/6 \\ -11/6 \\ 4 + 27 \cdot \tilde{d} \end{pmatrix}.$$

Mit der ersten Zeile erhalten wir

$$\tilde{a} = -43/210.$$

Eingesetzt in die zweite Zeile erhalten wir $-\frac{11}{6} = -\frac{11}{6}$. Eingesetzt in die letzte Zeile erhalten wir

$$\tilde{d} = -2/27.$$

Für den Schnittpunkt gilt also

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 7/6 \\ -11/6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nun überprüfen wir, ob dieser Punkt auch auf den Höhengeraden $\tilde{h}_{\mathscr{B}}$ und $\tilde{h}_{\mathscr{C}}$ liegt. Dazu setzen wir $\tilde{H}$ in beide Gleichungen ein. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 7/6 \\ -11/6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 293/178 \\ -497/178 \\ 146/89 \end{pmatrix} + \tilde{b} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 24 \\ 9 \end{pmatrix}$$

für $\tilde{b}' = 32/801$ und

$$\begin{pmatrix} 7/6 \\ -11/6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 157/50 \\ 31/10 \\ 13/25 \end{pmatrix} + \tilde{c} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ -6 \end{pmatrix}$$

für $\tilde{c}' = -37/150$. Damit schneiden sich die eulerverschobenen Höhengeraden $\tilde{h}_{\mathscr{A}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{B}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{C}}$, $\tilde{h}_{\mathscr{D}}$ im Punkt

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 7/6 \\ -11/6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

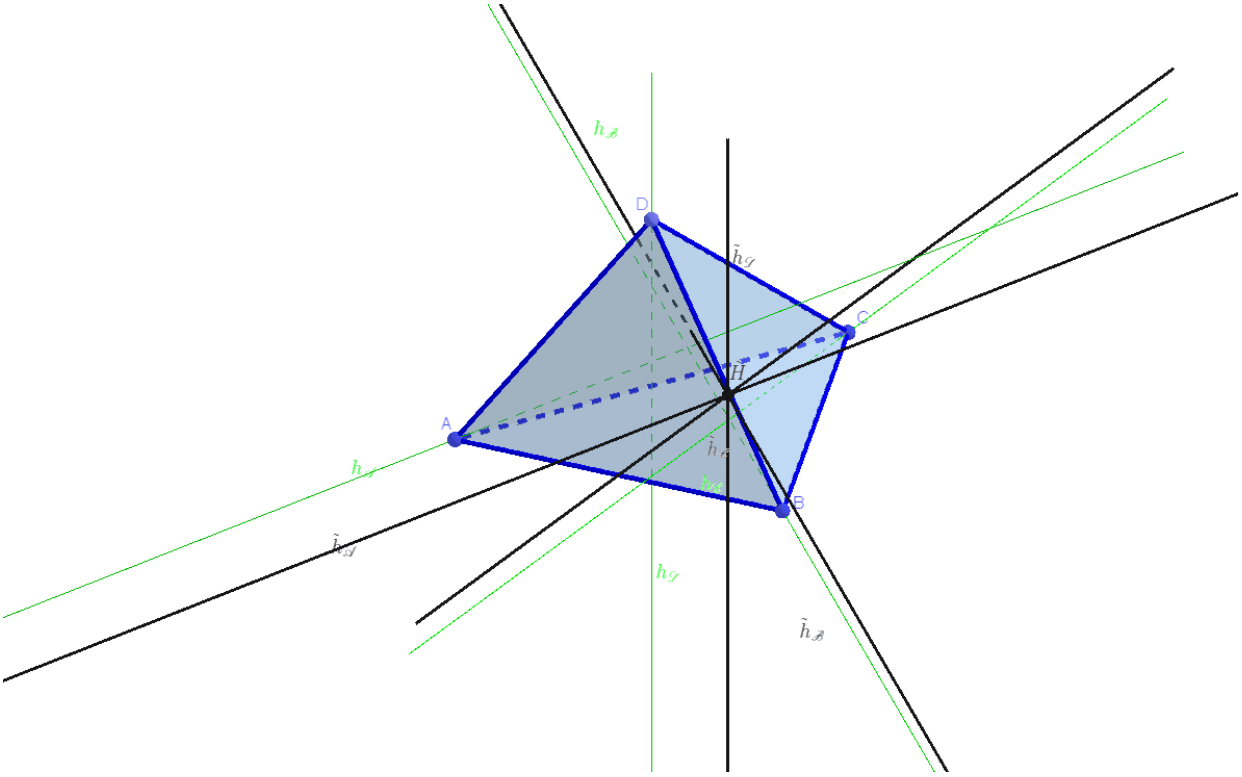


Abbildung 17: Beispiel 46 (Eulermodifizierte Höhenschnittpunkt).

Nun berechnen wir den Schwerpunkt des Tetraeders $\triangle ABCD$. Es gilt

$$S = \frac{1}{4} \cdot (A + B + C + D) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als letztes wollen wir wir den Zusammenhang zwischen S, U, $\tilde{H}$ verifizieren. Wir berechnen dazu

$$\overrightarrow{SU} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 25/36 \\ -1/3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{S\tilde{H}} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -25/12 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $\overrightarrow{S\tilde{H}} = -3 \cdot \overrightarrow{SU}$.

In unserem Tetraeder liegen also der Schwerpunkt S, der Umkugelmittelpunkt U

und der eulermodifizierte Höhenschnittpunkt $\tilde{H}$ auf der Eulergeraden, wie in der folgenden Abbildung zu erkennen.

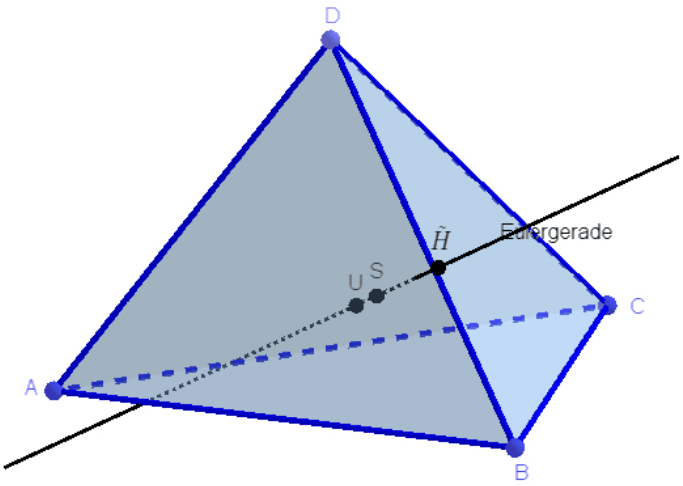


Abbildung 18: Beispiel 46 (Eulergerade).

Es wird ein Tetraeder betrachtet. In jeder Seitenfläche verfügen wir über den Verbindungsvektor von Schwerpunkt zu Umkreismittelpunkt. Unter Verwendung dieses Vektors wird aus der Höhengeraden auf einer Seitenfläche die eulerverschobene Höhengerade konstruiert. Die vier eulerverschobenen Höhengeraden schneiden sich in einem Punkt, dem eulermodifizierten Höhenschnittpunkt. Nun liegen der Schwerpunkt des Tetraeders, der Umkugelmittelpunkt und der eulermodifizierte Höhenschnittpunkt auf einer Geraden, der Eulergeraden des Tetraeders. Der Abstand von eulermodifiziertem Höhenschnittpunkt und Schwerpunkt beträgt das Dreifache des Abstandes von Umkugelmittelpunkt und Schwerpunkt.

6 Literatur

[1] International GeoGebra Institute: *GeoGebra Classic 5* (Version 5.2). URL: `https://www.GeoGebra.org/` (abgerufen am 18. August 2026).

[2] Max Koecher, Aloys Krieg: *Ebene Geometrie*. 3. Auflage. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

[3] Wikipedia-Autoren: *Eulersche Gerade*. In: *Wikipedia – Die freie Enzyklopädie*. URL: `https://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Gerade` (abgerufen am 18. August 2026).

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1 (GeoGebra: Eulergerade Einleitung.ggb)
Abbildung 2 (GeoGebra: 2D Konstruktion Schritt 1 (Dreieck).ggb)
Abbildung 3 (GeoGebra: 2D Konstruktion Schritt 2 (Höhenschnittpunkt).ggb)
Abbildung 4 (GeoGebra: 2D Konstruktion Schritt 3 (Umkreismittelpunkt).ggb)
Abbildung 5 (GeoGebra: 2D Konstruktion Schritt 4 (Schwerpunkt).ggb)
Abbildung 6 (GeoGebra: 2D Konstruktion Schritt 5 (Eulergerade).ggb)
Abbildung 7 (GeoGebra: Beweisskizze Satz 19.ggb)
Abbildung 8 (GeoGebra: 3D Konstruktion Schritt 1 (Tetraeder).ggb)
Abbildung 9 (GeoGebra: 3D Konstruktion Schritt 2 (Schwerpunkt).ggb)
Abbildung 10 (GeoGebra: 3D Konstruktion Schritt 3 (Umkugelmittelpunkt).ggb)
Abbildung 11 (GeoGebra: 3D Konstruktion Schritt 4 (Eulermodifizierter Höhenschnittpunkt).ggb)
Abbildung 12 (GeoGebra: 3D Konstruktion Schritt 5 (Eulergerade).ggb)
Abbildung 13 (GeoGebra: Beweisskizze Satz 41.ggb)
Abbildung 14 (GeoGebra: Beispiel 43 (windschiefe Höhengeraden).ggb)
Abbildung 15 (GeoGebra: Lemma 44 (Medialtetraeder).ggb)
Abbildung 16 (GeoGebra: Beispiel 46 (Umkugelmittelpunkt).ggb)
Abbildung 17 (GeoGebra: Beispiel 46 (Eulermodifizierte Höhenschnittpunkt).ggb)
Abbildung 18 (GeoGebra: Beispiel 46 (Eulergerade).ggb)

Eigenständigkeitserklärung

Ich erkläre mit meiner Unterschrift, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt habe. Alle Stellen dieser Arbeit, die dem Wortlaut, dem Sinn oder der Argumentation nach anderen Werken entnommen sind (einschließlich des World Wide Web und anderer elektronischer Text- und Datensammlungen), habe ich unter Angabe der Quellen vollständig kenntlich gemacht. Jede Nutzung von KI-Tools, die im Zusammenhang mit meiner Arbeit stand, habe ich per Screenshot dokumentiert und der*dem Prüfenden im Anhang oder als separate PDF-Datei zur Verfügung gestellt.

Ort, Datum Unterschrift

Laura Mignoli