M. Künzer Abgabe bis Fr 22.06.18

Algebraische Zahlentheorie, SS 18

Blatt 9

Aufgabe 33 (6 Punkte) Sei A ein Dedekindbereich. Sei $K := \mathrm{Quot}(A)$ perfekt. Seien $M|L|K$ endliche Körpererweiterungen. Sei $B := \Gamma_L(A)$ und $C := \Gamma_M(A)$. Zu zeigen ist folgendes.

(1) Sei $\mathfrak{g} \in \underline{\mathrm{Ideale}}^\times(B)$. Dann ist $\mathrm{N}_{L|K}(\mathfrak{g}^{-1}) = \mathrm{N}_{L|K}(\mathfrak{g})^{-1}$.

(2) Sei $\mathfrak{h} \in \underline{\mathrm{Ideale}}^\times(C)$. Dann ist $\mathrm{N}_{M|K}(\mathfrak{h}) = \mathrm{N}_{L|K}(\mathrm{N}_{M|L}(\mathfrak{h}))$.

(3) Sei $\mathfrak{f} \in \underline{\mathrm{Ideale}}^\times(A)$. Dann ist $\mathrm{N}_{L|K}(\mathfrak{f}B) = \mathfrak{f}^\ell$, wobei $\ell := [L:K]$.

Aufgabe 34 (4 Punkte) Zu zeige oder zu widerlegen ist folgendes. Sei A ein Dedekindbereich. Sei $K := \mathrm{Quot}(A)$ perfekt. Seien $L|K$ eine endliche Körpererweiterung. Sei $B := \Gamma_L(A)$.

(1) Es ist $B^{\#,A}$ das Urbild von A unter $\mathrm{Tr}_{L|K}$.

(2) Für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ideale}^\times_{\mathrm{prim}}(A)$ ist $(B^{\#,A})_\mathfrak{p} = (B_\mathfrak{p})^{\#,A_\mathfrak{p}}$.

Aufgabe 35 (8 Punkte) Zu zeigen ist folgendes.

(1) In $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\sqrt{-23})})$ hat das Element $[(2, \frac{1}{2}(1+\sqrt{-23}))]$ die Ordnung 3.

(2) In $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\sqrt{-47})})$ hat das Element $[(2, \frac{1}{2}(1+\sqrt{-47}))]$ die Ordnung 5.

Aufgabe 36 (8 Punkte) Zu zeigen oder zu widerlegen ist folgendes. Sei A ein Dedekindbereich mit $K := \mathrm{Quot}(A)$ perfekt. Sei $L|K$ eine endliche Körpererweiterung. Sei $B := \Gamma_L(A)$. Für $\mathfrak{b} \in \mathrm{Ideale}^\times(B)$ betrachten wir $\mathrm{Tr}_{L|K}(\mathfrak{b}) = \{\, \mathrm{Tr}_{L|K}(b) \,:\, b \in \mathfrak{b} \,\}$.

(1) Für $\mathfrak{b} \in \mathrm{Ideale}^\times(B)$ ist $B(\mathfrak{b} \cap A) = \mathfrak{b}$.

(2) Für $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}' \in \mathrm{Ideale}^\times(B)$ ist $A \cap (\mathfrak{b}\mathfrak{b}') = (A \cap \mathfrak{b})(A \cap \mathfrak{b}')$.

(3) Für $\mathfrak{b} \in \mathrm{Ideale}^\times(B)$ ist $\mathrm{Tr}_{L|K}(\mathfrak{b}) \in \mathrm{Ideale}^\times(A)$.

(4) Für $\mathfrak{h} \in \underline{\mathrm{Ideale}}^\times(B)$ ist $\mathrm{Tr}_{L|K}(\mathfrak{h}) \in \underline{\mathrm{Ideale}}^\times(A)$.

Aufgabe 37 (4 Punkte) Sei A ein Dedekindbereich. Sei $K := \mathrm{Quot}(A)$ perfekt. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ideale}^\times_{\mathrm{prim}}(A)$. Sei $L|K$ eine endliche Körpererweiterung. Sei $B = \Gamma_L(A)$. Zu zeigen ist folgendes.

(1) Es ist $(\mathfrak{D}_{L|K,A})_\mathfrak{p} = \mathfrak{D}_{L|K,A_\mathfrak{p}}$.

(2) Es ist $(\mathfrak{d}_{L|K,A})_\mathfrak{p} = \mathfrak{d}_{L|K,A_\mathfrak{p}}$.