Algebraische Zahlentheorie, SS 18

Blatt 8

Aufgabe 30 (1+9+4+4 Punkte) Sei A ein Dedekindbereich.
Sei $K := \mathrm{Quot}(A)$. Sei $L|K$ eine endliche Körpererweiterung. Sei $B := \Gamma_L(A)$.

(1) Sei $C|A$ eine Erweiterung kommutativer Ringe. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ eine Teilmenge.
Sei $\mathfrak{c} \in \mathrm{Ideale}(C)$. Man zeige $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} := {}_{\mathbf{Z}}\langle\, ac \,:\, a \in \mathfrak{a},\, c \in \mathfrak{c} \,\rangle \in \mathrm{Ideale}(C)$.

(2) Sei $\mathfrak{a} \in \mathrm{Ideale}(A)$. Schreibe $\bar{A} := A/\mathfrak{a}$ und $\bar{a} := a + \mathfrak{a} \in \bar{A}$ für $a \in A$. Sei $b \in B$. Sei $\mu_{b,K}(X) =: X^n + \sum_{i\in[0,n-1]} a_i X^i$. Schreibe $\bar{\mu}_{b,K}(X) := X^n + \sum_{i\in[0,n-1]} \bar{a}_i X^i$. Zu zeigen ist folgendes.

(i) Wir haben einen Ringisomorphismus $\varphi : A[b]/(\mathfrak{a}\cdot A[b]) \xrightarrow{\sim} \bar{A}[X]/(\bar{\mu}_{b,K}(X))$ mit $\varphi(a+(\mathfrak{a}\cdot A[b])) = \bar{a}+(\bar{\mu}_{b,K}(X))$ für $a \in A$ und mit $\varphi(b+(\mathfrak{a}\cdot A[b])) = X+(\bar{\mu}_{b,K}(X))$.

(ii) Sei $\mathfrak{a}$ ein maximales Ideal von A. Man beachte, daß nun $\bar{A}$ ein Körper ist.
Wir schreiben $\bar{\mu}_{b,K}(X) = \bar{u}_1(X)^{\alpha_1} \cdot \bar{u}_2(X)^{\alpha_2} \cdots \bar{u}_k(X)^{\alpha_k}$ für ein $k \geqslant 1$, normierte Polynome $u_i(X) \in A[X]$ für $i \in [1,k]$, für welche $\bar{u}_i(X) \in \bar{A}[X]$ irreduzibel ist, wobei $\bar{u}_i(X) \neq \bar{u}_j(X)$ für $i,\, j \in [1,k]$ mit $i \neq j$, und für gewisse $\alpha_i \geqslant 1$ für $i \in [1,n]$.
Dann sind die maximalen Ideale über $\mathfrak{a}$ in $A[b]$ gegeben durch

$$\mathfrak{q}_i \;:=\; (u_i(b)) + \mathfrak{a}A[b]$$

für $i \in [1,k]$. Desweiteren ist $A[b]/\mathfrak{q}_i \xrightarrow{\sim} \bar{A}[X]/(\bar{u}_i(X))$, $b + \mathfrak{q}_i \longmapsto X + (\bar{u}_i(X))$ und also

$$[A[b]/\mathfrak{q}_i : \bar{A}] \;=\; [\bar{A}[X]/(\bar{u}_i(X)) : \bar{A}] \;=\; \deg(\bar{u}_i)$$

für $i \in [1,k]$.

(iii) Wir behalten die Bezeichnungen aus (ii) bei. Sei zudem vorausgesetzt, daß $A[b] = B$ ist. Dann ist

$$\mathfrak{a} \cdot A[b] \;=\; \mathfrak{q}_1^{\alpha_1}\mathfrak{q}_2^{\alpha_2}\cdots\mathfrak{q}_k^{\alpha_k}\,.$$

(3) Sei $d \in \mathbf{Z} \setminus \{0,1\}$ quadratfrei. Sei $p \in \mathbf{Z}^\times$ prim. Man gebe die Primidealfaktorzerlegung von $(p) \subseteq \mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\sqrt{d})}$ an. Hierbei darf $(\mathbf{F}_p^\times)^2 := \{\, s^2 \,:\, s \in \mathbf{F}_p^\times \,\}$ als bekannt vorausgesetzt werden. Was ergibt sich speziell für $d = -1$ und $p \in \{2,3,5\}$?

(4) Man finde jeweils die Primidealfaktorzerlegung von (2), (3), (5), $(7) \subseteq \mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})}$.

Aufgabe 31 (2 Punkte) Man finde einen Hauptidealbereich A mit $|\,\mathrm{Ideale}^\times_{\mathrm{prim}}(A)| = 2$.

Aufgabe 32 (10 Punkte) Sei D ein Dedekindbereich. Sei $S \subseteq D$ mit $1 \in S$ und $st \in S$ für $s,\, t \in D$ gegeben; cf. Aufgabe 10. Seien $\mathfrak{g},\, \mathfrak{h} \in \underline{\mathrm{Ideale}}^\times(D)$ gegeben. Zu zeigen ist folgendes.

(1) Es ist $S^{-1}\mathfrak{g} \in \underline{\mathrm{Ideale}}^\times(S^{-1}D)$.

(2) Es ist $S^{-1}(\mathfrak{g}\mathfrak{h}) = (S^{-1}\mathfrak{g})(S^{-1}\mathfrak{h})$ und $(S^{-1}\mathfrak{g})^{-1} = S^{-1}(\mathfrak{g}^{-1})$.

(3) Es ist $S^{-1}(\mathfrak{g}+\mathfrak{h}) = S^{-1}\mathfrak{g} + S^{-1}\mathfrak{h}$ und $S^{-1}(\mathfrak{g}\cap\mathfrak{h}) = S^{-1}\mathfrak{g} \cap S^{-1}\mathfrak{h}$.

(4) Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ideale}^\times_{\mathrm{prim}}(D)$. Es ist $\mathfrak{g}_\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_\mathfrak{p})^{\mathrm{v}_\mathfrak{p}(\mathfrak{g})}$.

(5) Es ist $\mathfrak{g} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Ideale}^\times_{\mathrm{prim}}(D)} \mathfrak{g}_\mathfrak{p}$.