M. Künzer Abgabe bis Fr 01.06.18

Algebraische Zahlentheorie, SS 18

Blatt 6

Aufgabe 21 (3 Punkte) Sei K ein Körper. Seien $m,\, n \geqslant 0$. Sei $A := (a_{i,j})_{i,j} \in K^{m\times m}$.
Sei $\alpha : [1,mn] \xrightarrow{\sim} [1,m]\times[1,n],\; k \longmapsto \alpha(k) =: (\alpha'(k), \alpha''(k))$ eine Bijektion.
Sei $B := (a_{\alpha'(k),\alpha'(\ell)}\partial_{\alpha''(k),\alpha''(\ell)})_{k,\ell} \in K^{mn\times mn}$.
Man zeige $\det(B) = \det(A)^n$.

Aufgabe 24 (2+4+2+4+3+2* Punkte) Sei R ein kommutativer Ring.
Zu zeigen ist folgendes.

(1) Die folgenden Aussagen (i) und (ii) sind äquivalent.
   (i) Jedes Ideal in R ist endlich erzeugt.
   (ii) Jede nichtleere Teilmenge von $\mathrm{Ideale}(R)$ hat ein maximales Element.

(2) Ist R noethersch, dann ist auch $R[X]$ noethersch.

(3) Ist R noethersch und $\mathfrak{a} \in \mathrm{Ideale}(R)$, dann ist auch $R/\mathfrak{a}$ noethersch.

(4) Sei R noethersch. Sei $m \geqslant 0$.
Sei $M \subseteq R^{\oplus m}$ ein R-Teilmodul. Dann ist M ein endlich erzeugter R-Modul.

(5) Sei A ein Dedekindbereich. Sei $K := \mathrm{Quot}(A)$ perfekt. Sei $L|K$ eine endliche Körpererweiterung. Sei $B := \Gamma_L(A)$.
Dann ist B noethersch. Ferner ist B ein endlich erzeugter A-Modul.

(6) Es ist $\prod_{i\in\mathbf{Z}_{\geqslant 1}} \mathbf{C}$, mit komponentenweiser Addition und Multiplikation, nicht noethersch.

Aufgabe 25 (2+2 Punkte) Sei A ein ganzabgeschlossener Integritätsbereich. Sei $K := \mathrm{Quot}(A)$.
Sei $L|K$ eine endliche Körpererweiterung. Sei $B := \Gamma_L(A)$. Zeige.

(1) Sei $f(X) \in A[X]$ normiert. Ist $f(X) = g(X)h(X)$ mit $g(X),\, h(X) \in K[X]$, dann liegen $g(X),\, h(X) \in A[X]$.

(2) Sei $y \in L$. Es ist $y \in B$ genau dann, wenn $\mu_{y,K}(X) \in A[X]$ liegt.

Aufgabe 27 (4+4+4 Punkte)

(1) Man finde $\mathfrak{a} \in \mathrm{Ideale}^{\times}(\mathbf{Z}[\sqrt{-5}])$ mit $\mathfrak{a}$ kein Hauptideal, aber $\mathfrak{a}^2$ Hauptideal.

(2) Man faktorisiere in $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ das Ideal (21) in Primideale. Man faktorisiere es auf drei wesentlich verschiedene Weisen in ein Produkt von Hauptidealen, die von irreduziblen Elementen erzeugt werden. Man zerlege die letzteren Faktorisierungen weiter zur Primidealfaktorzerlegung.

(3) Man finde einen Zahlkörper K und eine Primzahl $p \in \mathbf{Z}^{\times}$ so, daß in der Primidealfaktorzerlegung von $(p) \subseteq \mathcal{O}_K$ ein Faktor $\mathfrak{p}$ mit Exponent $\geqslant 2$ auftritt.
   (i) Hierbei soll $\mathfrak{p}$ kein Hauptideal sein.
   (ii) Hierbei soll $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal sein.