M. Künzer Abgabe bis Fr 18.05.18

Algebraische Zahlentheorie, SS 18

Blatt 5

Aufgabe 16 (3+3 Punkte) Man berechne folgende Diskriminanten.

(1) $\Delta_{\mathbf{Q}(\sqrt{d})}$ für $d \in \mathbf{Z} \smallsetminus \{0,1\}$ quadratfrei.

(2) $\Delta_{\mathbf{Q}(\sqrt{3},\sqrt{13})}$.

Aufgabe 18 (8 Punkte) Sei $K|\mathbf{Q}$ eine endliche Körpererweiterung.
Ein $\mathbf{Z}$-*Gitter* in K ist ein $\mathbf{Z}$-Teilmodul von K von der Form ${}_{\mathbf{Z}}\langle \underline{y} \rangle$ für eine $\mathbf{Q}$-lineare Basis $\underline{y}$ von K.
Eine $\mathbf{Z}$-*Ordnung* in K ist ein $\mathbf{Z}$-Gitter in K, das zudem ein Teilring ist.

(1) Zu zeigen ist folgendes. Es ist $\mathcal{O}_K$ eine $\mathbf{Z}$-Ordnung in K. Jede $\mathbf{Z}$-Ordnung in K liegt in $\mathcal{O}_K$.

(2) Seien G und H zwei $\mathbf{Z}$-Gitter in K mit $G \subseteq H$.

Man zeige, daß $|H/G|$ endlich und gleich $|G^\#/H^\#|$ ist.

(3) Sei R eine $\mathbf{Z}$-Ordnung in K. Wir schreiben $R = {}_{\mathbf{Z}}\langle \underline{y} \rangle$ für eine $\mathbf{Q}$-lineare Basis $\underline{y}$ von K. Sei $\Delta_{K|\mathbf{Q},\underline{y}}$ quadratfrei.

Man zeige $R = \mathcal{O}_K$.

(4) Sei $\alpha \in \mathbf{C}$ eine Nullstelle des irreduziblen Polynoms $X^3 + X + 1 \in \mathbf{Q}[X]$. Sei $K := \mathbf{Q}(\alpha)$. Man zeige $\mathcal{O}_K = \mathbf{Z}[\alpha]$ und berechne Δ_K.

Aufgabe 19 (2+4 Punkte) Wir betrachten $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})|\mathbf{Q}$ und schreiben $\delta := \sqrt[3]{2}$.

(1) Man bestimme $\mathbf{Z}[\delta]^\#$.

(2) Man zeige $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\delta)} = \mathbf{Z}[\delta]$ und bestimme $\Delta_{\mathbf{Q}(\delta)}$.

Aufgabe 20 (5 Punkte) Sei K ein perfekter Körper.
Seien $L'|K$ und $L''|K$ linear disjunkte endliche Körpererweiterungen.
Sei $L|K$ ein Kompositum von $L'|K$ und $L''|K$, mittels $\varphi' : L' \longrightarrow L$ und $\varphi'' : L'' \longrightarrow L$. Zu zeigen ist folgendes.

(1) Ist $\tilde{L}|K$, mit $\tilde{\varphi}'$, $\tilde{\varphi}''$, ein weiteres Kompositum von $L'|K$ und $L''|K$, dann gibt es einen eindeutigen Körpermorphismus $\alpha : L \xrightarrow{\sim} \tilde{L}$ mit $\alpha \circ \varphi' = \tilde{\varphi}'$ und $\alpha \circ \varphi'' = \tilde{\varphi}''$, und dieser ist ein Isomorphismus.

(2) Ist $M|K$ eine endliche Körpererweiterung und sind Körpermorphismen $L' \xrightarrow{\psi'} M$ und $L'' \xrightarrow{\psi''} M$ mit $\psi'|_K^K = \psi''|_K^K = \mathrm{id}_K$ gegeben, dann gibt es einen eindeutigen Körpermorphismus $\beta : L \longrightarrow M$ mit $\beta \circ \varphi' = \psi'$ und $\beta \circ \varphi'' = \psi''$.