M. Künzer Abgabe bis Fr 11.05.18

Algebraische Zahlentheorie, SS 18

Blatt 4

Aufgabe 14 (4+2+3 Punkte) Zu zeigen ist folgendes.

(1) Sei $n \geqslant 0$. Sei $A \in \mathbf{Z}^{n\times n}$ mit $\det(A) \neq 0$. Dann ist $|\mathbf{Z}^{n\times 1}/A\mathbf{Z}^{n\times 1}| = |\det(A)|$.

(2) Sei $n \geqslant 0$. Sei X ein endlich erzeugt freier $\mathbf{Z}$-Modul mit $\mathbf{Z}$-linearer Basis $\underline{x} = (x_i : i \in [1,n])$. Sei $Y \subseteq X$ ein $\mathbf{Z}$-Teilmodul mit $\mathbf{Z}$-linearer Basis $\underline{y} = (y_j : j \in [1,n])$. Sei $y_j = \sum_{i\in[1,n]} a_{i,j}x_i$ für $j \in [1,n]$, wobei $A := (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{Z}^{n\times n}$.
Dann ist $|X/Y| = |\det(A)|$.

(3) Sei $K|\mathbf{Q}$ eine endliche Körpererweiterung. Sei $\underline{y} := (\, y_i \,:\, i \in [1,n]\,)$ eine $\mathbf{Q}$-lineare Basis von K, die in $\mathcal{O}_K$ liegt. Sei $X := {}_{\mathbf{Z}}\langle \underline{y}\rangle \subseteq K$. Dann ist $|X^{\#}/X| = |\Delta_{K|\mathbf{Q},\,\underline{y}}|$.

Aufgabe 15 (2*+2 Punkte) Man zeige oder widerlege.
Sei $L|K$ eine endliche Körpererweiterung mit K perfekt. Sei $\ell := [L : K]$. Sei $A \subseteq K$ ein ganzabgeschlossener Teilring mit $\mathrm{Quot}(A) = K$. Sei $B \subseteq \Gamma_L(A)$ ein Teilring.
Sei $\underline{g} := (\, g_i \,:\, i \in [1,\ell]\,)$ eine K-lineare Basis von L mit $B = {}_A\langle \underline{g}\rangle$.

(1) Ist $[L : K]$ ungerade, dann ist $\det(\mathrm{Vand}_{L|K,\underline{g}}) \in A$.

(2) Ist $L|K$ galoisch und $[L : K]$ ungerade, dann ist $\det(\mathrm{Vand}_{L|K,\underline{g}}) \in A$.

Aufgabe 17 (6+3 Punkte)

(1) Sei $n \geqslant 1$. Man zeige, daß $\mathbf{Q}(\zeta_n)|\mathbf{Q}$ galoisch ist, mit einem Gruppenisomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{U}(\mathbf{Z}/(n)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_n)|\mathbf{Q}) \\ k + (n) & \longmapsto & (\zeta_n \mapsto \zeta_n^k)\ . \end{array}$$

(2) Für $n \geqslant 1$ sei $\Phi_n(X) := \mu_{\zeta_n,\mathbf{Q}}(X) \in \mathbf{Z}[X]$ das n-te Kreisteilungspolynom. Man zeige

$$X^n - 1 \;=\; \prod_{d\in\mathbf{Z}_{\geqslant 1},\; n\equiv_d 0} \Phi_d(X)\ .$$

Aufgabe 22 (4 Punkte) Sei $K|\mathbf{Q}$ eine endliche Körpererweiterung.
Dann ist $\Delta_K \equiv_4 0$ oder $\Delta_K \equiv_4 1$.
Hinweis: Man schreibe $\det(\mathrm{Vand}_{K|\mathbf{Q},\,\underline{g}}) = P - N$, wobei in P die Terme aus der Leibnizformel mit positivem Vorzeichen stehen. Man zeige, daß $P + N$ und PN in $\mathbf{Z}$ liegen.

www.mathematik.uni-stuttgart.de/fachbereich/Kuenzer/az18/