Algebraische Zahlentheorie, SS 18

Blatt 3

Aufgabe 9 (2+2 Punkte) Wir betrachten $U := \mathrm{S}_3 \leqslant \mathrm{S}_4 =: G$.

(1) Wieviele Teilmengen $T \subseteq \mathrm{S}_4$ gibt es mit $G = \bigsqcup_{\sigma \in T} \sigma U$?

(2) Man finde unter den Teilmengen von (1) zwei, die zueinander nichtisomorphe Untergruppen von G sind.

Aufgabe 10 (6+4 Punkte) Sei A ein Integritätsbereich. Sei $K := \mathrm{Quot}(A)$.
Zu zeigen ist folgendes.

(1) Sei $S \subseteq A$ mit $1 \in S$ und mit $st \in S$ für $s,\ t \in S$ gegeben. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Sei

$$S^{-1}\mathfrak{a} \;:=\; \{\, \frac{a}{s} \in K \;:\; a \in \mathfrak{a},\, s \in S \,\} \;\subseteq\; K$$

Es sind $A \subseteq S^{-1}A \subseteq K$ Inklusionen von Teilringen.

Für jeden kommutativen Ring B und jeden Ringmorphismus $\varphi : A \longrightarrow B$ mit $\varphi(S) \subseteq \mathrm{U}(B)$ gibt es genau einen Ringmorphismus $\psi : S^{-1}A \longrightarrow B$ mit $\psi|_A = \varphi$.

Es ist $S^{-1}\mathfrak{a} \subseteq S^{-1}A$ ein Ideal.

Sei $\mathrm{Ideale}_{\mathrm{prim}}^{A \smallsetminus S}(A)$ die Menge der Primideale von A, die leeren Schnitt mit S haben.

Dies gibt eine Bijektion von $\mathrm{Ideale}_{\mathrm{prim}}^{A \smallsetminus S}(A)$ nach $\mathrm{Ideale}_{\mathrm{prim}}(S^{-1}A)$.

(2) Sei $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal. Sei $S := A \smallsetminus \mathfrak{p}$. Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ setzen wir $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} := S^{-1}\mathfrak{a}$.

Die Primideale von A, die in $\mathfrak{p}$ liegen, stehen in Bijektion zu den Primidealen von $A_\mathfrak{p}$.

Es ist $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ das einzige maximale Ideal in $A_\mathfrak{p}$.

Es ist $\mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p})$ isomorph zu $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$.

Ist $\mathfrak{p} \subseteq A$ maximal, dann ist $A/\mathfrak{p}$ isomorph zu $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$.

Aufgabe 11 (2+2 Punkte) Zu zeigen ist folgendes.

(1) Sei L ein Körper. Sei $A \xrightarrow{\varphi} L$ die Einbettung eines Teilrings. Es gibt genau einen Körpermorphismus $\mathrm{Quot}(A) \xrightarrow{\psi} L$ mit $\psi|_A = \varphi$.

(2) Sei A ein Integritätsbereich. Sei $A \subseteq B \subseteq \mathrm{Quot}(A)$, mit B Teilring von $\mathrm{Quot}(A)$. Wir haben den Isomorphismus $\mathrm{Quot}(A) \longrightarrow \mathrm{Quot}(B)$, $x/y \longmapsto x/y$, wobei $x \in A$ und $y \in A^\times$.

Aufgabe 13 (4+6 Punkte)

(1) Sei R ein kommutativer Ring mit $1_R \neq 0_R$. Seien $k,\ \ell \geqslant 0$ mit $R^{\oplus k} \simeq R^{\oplus \ell}$ gegeben.

Man zeige $k = \ell$.

Ist M ein R-Modul mit $M \simeq R^{\oplus k}$ für ein $k \geqslant 0$, so heißt M *endlich erzeugt frei* und $\mathrm{rk}_R(M) := k$ der *Rang* von M.

(2) Sei R ein Hauptidealbereich. Sei M ein endlich erzeugt freier R-Modul. Sei $N \subseteq M$ ein Teilmodul. Man zeige, daß auch N ein endlich erzeugt freier R-Modul ist mit $\mathrm{rk}_R(N) \leqslant \mathrm{rk}_R(M)$.