M. Künzer Abgabe bis Fr 27.04.18

Algebraische Zahlentheorie, SS 18

Blatt 2

Aufgabe 4 (3^* Punkte) Sei $p \in \mathbf{Z}_{\geqslant 3}$ eine Primzahl.
Schreibe $\mathcal{Z} = \mathbf{F}_p[T]$ und $\mathcal{Q} = \mathbf{F}_p(T)$. Sei $d(T) \in \mathcal{Z}$ quadratfrei.
Man gebe eine $\mathcal{Z}$-lineare Basis von $\Gamma_{\mathcal{Q}\left(\sqrt{d(T)}\right)}(\mathcal{Z})$ an.

Aufgabe 5 (2+2 Punkte) Seien $T|S|R$ Erweiterungen kommutativer Ringe.
Zu zeigen ist folgendes.

(1) Ist $T|S$ ganz und $S|R$ ganz, dann ist auch $T|R$ ganz.

(2) Sei $A \subseteq R$ ein Teilring. Sei $B := \Gamma_S(A)$. Es ist $\Gamma_T(A) = \Gamma_T(B)$.

Aufgabe 6 (2+3+3+4 Punkte) Zu zeigen ist folgendes.

(1) Sei R ein Hauptidealbereich. Es ist R ganzabgeschlossen.

(2) Es ist $\mathbf{Z}[\mathrm{i}]$ ein Hauptidealbereich.

(3) Es ist $\mathbf{Z}[\zeta_3]$ ein Hauptidealbereich.

(4) Es ist $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ kein Hauptidealbereich. Es ist $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ ganzabgeschlossen.

Aufgabe 7 (3+3+1+4 Punkte) Zu zeigen ist folgendes.

(1) Es ist $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)|\mathbf{Q}$ galoisch mit $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)|\mathbf{Q})$ isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3. Man bestimme alle Zwischenkörper dieser Erweiterung.

(2) Es ist $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$ Zerfällungskörper von $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})|\mathbf{Q}$.

(3) Es ist $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$ nicht Zerfällungskörper von $\mathbf{Q}(\zeta_3)|\mathbf{Q}$.

(4) Die Berechnungen von $\mathrm{Tr}_{\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})|\mathbf{Q}}(\sqrt[3]{2})$ und $\mathrm{N}_{\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})|\mathbf{Q}}(\sqrt[3]{2})$ jeweils einmal nach Definition und einmal unter Verwendung von Lemma 15 haben dasselbe Ergebnis.

Aufgabe 8 (2^* Punkte) Sei K perfekt. Sei $L|K$ eine endliche Erweiterung.
Man zeige, daß L perfekt ist.

www.mathematik.uni-stuttgart.de/fachbereich/Kuenzer/az18/