M. Künzer Abgabe bis Fr 20.07.18

Algebraische Zahlentheorie, SS 18

Blatt 13

Aufgabe 52 (8 Punkte)
Sei $d \in \mathbf{Z}_{\geqslant 2}$ quadratfrei.

(1) Man zeige, daß es genau ein $u \in \mathrm{U}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\sqrt{d})}) \cap \mathbf{R}_{>1}$ so gibt, daß für alle $v \in \mathrm{U}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\sqrt{d})})$ genau ein $m \in \mathbf{Z}$ mit $v \in \{-u^m, +u^m\}$ existiert.

(2) Man bestimme u wie in (1) für $d \in \{2, 3, 5\}$.

Aufgabe 54 (9 Punkte)
Man zeige, daß $\mathbf{Z}[\zeta_n]$ ein Hauptidealbereich ist für $n \in \{5, 7, 8\}$.

Aufgabe 57 (4+4+1 Punkte)
Sei $p \in \mathbf{Z}_{\geqslant 3}$ prim. Sei $a,\, b \in \mathbf{Z} \smallsetminus (p)$. Sei $a^* \in \mathbf{Z}$ mit $aa^* \equiv_p 1$ gegeben.
Das *Legendresymbol* ist gegeben durch

$$\left(\frac{a}{p}\right) := \begin{cases} +1 & \text{falls } a + (p) \in (\mathbf{F}_p^\times)^2 \\ -1 & \text{falls } a + (p) \not\in (\mathbf{F}_p^\times)^2 \,. \end{cases}$$

Sei $\tau := \sum_{a+(p) \in \mathrm{U}(\mathbf{Z}/(p))} \left(\frac{a}{p}\right) \zeta_p^a$.

(1) Man zeige $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv_p a^{(p-1)/2}$, $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$ und $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a^*}{p}\right)$.

(2) Man zeige $\tau^2 = \left(\frac{-1}{p}\right)p$.

(3) Man zeige, daß $\mathbf{Q}\left(\sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right)p}\,\right)$ ein Teilkörper von $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ ist.

Aufgabe 58 (2+4 Punkte)

(1) Man zeige, daß $\mathbf{Q}(\sqrt{-23})$ ein Teilkörper von $\mathbf{Q}(\zeta_{23})$ ist.

(2) Ist $\mathbf{Z}[\zeta_{23}]$ ein Hauptidealbereich?

Hinweis: Aufgabe 49 verwenden, um $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\sqrt{-23})}) \simeq \mathrm{C}_3$ aus Aufgabe 46.(1) zum Einsatz bringen zu können.

www.mathematik.uni-stuttgart.de/fachbereich/Kuenzer/az18/