M. Künzer Abgabe bis Fr 13.07.18

Algebraische Zahlentheorie, SS 18

Blatt 12

Aufgabe 45 (2 Punkte) Sei $m \geqslant 1$. Seien $a_i \in \mathbf{R}_{>0}$ für $i \in [1,m]$.
Man zeige

$$\frac{1}{m} \sum_{i \in [1,m]} a_i \;\geqslant\; \Big(\prod_{i \in [1,m]} a_i \Big)^{1/m} .$$

Aufgabe 46 (10 Punkte)

(1) Man zeige $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\sqrt{-23})}) \simeq \mathrm{C}_3$.

(2) Man zeige $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\sqrt{-47})}) \simeq \mathrm{C}_5$.

Aufgabe 47 (5 Punkte) Ist $\mathbf{Z}[\sqrt[3]{2}]$ ein Hauptidealbereich?

Aufgabe 49 (9 Punkte)
Sei A ein Dedekindbereich. Sei $K = \mathrm{Quot}(A)$ perfekt.
Sei $L|K$ eine endliche Körpererweiterung. Schreibe $\ell := [L:K]$. Sei $B := \Gamma_L(A)$.
Zu zeigen ist folgendes.

(1) Es gibt den Gruppenmorphismus $\mathrm{N}_{L|K} : \mathrm{Cl}(B) \longrightarrow \mathrm{Cl}(A)$, $[\mathfrak{h}] \longmapsto [\mathrm{N}_{L|K}(\mathfrak{h})]$.

(2) Es gibt den Gruppenmorphismus $\mathrm{ind}_{L|K} : \mathrm{Cl}(A) \longrightarrow \mathrm{Cl}(B)$, $[\mathfrak{g}] \longmapsto [B\mathfrak{g}]$.

(3) Ist $|\mathrm{Cl}(A)|$ teilerfremd zu ℓ, dann ist die Abbildung $\mathrm{ind}_{L|K}$ aus (2) injektiv und die Abbildung $\mathrm{N}_{L|K}$ aus (1) surjektiv.

Aufgabe 51 (6 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring. Sei $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{r} M''$ eine kurz exakte Sequenz von R-Moduln und R-linearen Abbildungen, i.e. sei i injektiv, r surjektiv und sei $i(M) = \mathrm{Kern}(r)$.
Zu zeigen ist folgendes.

(1) Existiere eine R-lineare Abbildung $M \xleftarrow{s} M''$ mit $r \circ s = \mathrm{id}_{M''}$. Dann gibt es eine R-lineare Abbildung $M' \xleftarrow{t} M$ mit $t \circ i = \mathrm{id}_{M'}$, und es ist $M \simeq M' \oplus M''$.

(2) Sei $M'' \simeq R^{\oplus n}$ für ein $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Dann gibt es einen R-linearen Isomorphismus $M \xleftarrow{\sim} M' \oplus M''$, der $m' \in M'$ auf $i(m')$ schickt.