Algebraische Zahlentheorie, SS 18

Blatt 11

Aufgabe 41 (2 Punkte) Sei $K|\mathbf{Q}$ eine endliche Körpererweiterung.

Man gebe die Abbildungen $\operatorname{Tr}|^{\mathbf{R}}_{K_{\mathbf{R}}} : K_{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathbf{R}$ und $\operatorname{N}|^{\mathbf{R}}_{K_{\mathbf{R}}} : K_{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathbf{R}$ unter Verwendung von Koeffizienten bezüglich der Orthonormalbasis aus Bemerkung 112 an.

Man zeige, daß beide Abbildungen stetig sind.

Aufgabe 42 (8+4+6 Punkte) Sei A ein Dedekindbereich. Sei $K = \operatorname{Quot}(A)$ perfekt. Sei $L|K$ eine endliche Körpererweiterung. Schreibe $\ell := [L : K]$. Sei $B := \Gamma_L(A)$. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ideale}^{\times}_{\text{prim}}(A)$.

(1) Sei $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ideale}^{\times}_{\text{prim}}(B)$ mit $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$. Man zeige, daß $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{q}$ ist und $(B/\mathfrak{q})|(A/\mathfrak{p})$ eine endliche Körpererweiterung ist. Sei $f := [B/\mathfrak{q} : A/\mathfrak{p}]$. Man zeige $\operatorname{N}_{L|K}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}^f$.

(2) Sei $\mathfrak{p}B = \prod_{i\in[1,d]} \mathfrak{q}_i^{e_i}$ die Primidealfaktorzerlegung in B, wobei $d \geqslant 1$, wobei $\mathfrak{q}_i \in \operatorname{Ideale}^{\times}_{\text{prim}}(B)$ und $e_i \geqslant 1$ für $i \in [1, d]$ und wobei $\mathfrak{q}_i \neq \mathfrak{q}_j$ für $i, j \in [1, d]$ mit $i \neq j$. Wir schreiben $f_i := [B/\mathfrak{q}_i : A/\mathfrak{p}]$ für $i \in [1, d]$.

Zu zeigen ist
$$\ell \;=\; \sum_{i\in[1,d]} e_i f_i \;.$$

Hinweis: Man berechne $\operatorname{N}_{L|K}(\mathfrak{p}B)$ mit (1) und alternativ mit Aufgabe 33.(3).

(3) Man bestätige die Formel aus (2) im Falle $A = \mathbf{Z}$, $K = \mathbf{Q}$, $L = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ für $\mathfrak{p} \in \{(3), (5), (7)\}$. Cf. Aufgabe 30.(4).

Aufgabe 44 (10 Punkte)

(1) Seien $m, n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Seien $u_i \in \mathbf{R}_{>0}$ für $i \in [1, n]$; wir schreiben $u := (u_i)_{i\in[1,n]}$. Seien $v_i \in \mathbf{R}_{>0}$ für $i \in [1, m]$; wir schreiben $v := (v_i)_{i\in[1,m]}$.

Sei
$$\begin{aligned} Z_{u,v} \;:=\; & \{ (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m) \in \mathbf{R}^{n+2m} : \\ & \quad |x_i| \leqslant u_i \text{ für } i \in [1, n],\ 2^{-1/2}(y_i^2 + z_i^2)^{1/2} \leqslant v_i \text{ für } i \in [1, m] \} \\ \subseteq\; & \mathbf{R}^{n+2m} \;. \end{aligned}$$

Man zeige
$$\operatorname{vol}(Z_{u,v}) \;=\; 2^{n+m}\pi^m \Big(\prod_{i\in[1,n]} u_i\Big)\Big(\prod_{i\in[1,m]} v_i^2\Big) \;.$$

(2) Sei $R \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$. Seien $n, m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Sei
$$\begin{aligned} M_{n,m,R} \;:=\; & \Big\{ (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m) \in \mathbf{R}^{n+2m} : \\ & \quad \Big(\textstyle\sum_{i\in[1,n]} |x_i|\Big) + 2^{1/2}\Big(\textstyle\sum_{i\in[1,m]} (y_i^2 + z_i^2)^{1/2}\Big) \leqslant R \Big\} \\ \subseteq\; & \mathbf{R}^{n+2m} \;. \end{aligned}$$

Man zeige
$$\operatorname{vol}(M_{n,m,R}) \;=\; 2^n\pi^m \frac{R^{n+2m}}{(n+2m)!} \;.$$