Algebraische Zahlentheorie, SS 18

Blatt 10

Aufgabe 38 (4 Punkte) Sei A ein Dedekindbereich. Sei $K := \mathrm{Quot}(A)$ perfekt.
Seien $L'|K$ und $L''|K$ linear disjunkte endliche Körpererweiterungen.
Sei L eine gemeinsame Körpererweiterung von L' und L'', welche ein Kompositum von $L'|K$ und $L''|K$ ist.
Wir schreiben $\ell' := [L' : K]$ und $\ell'' := [L'' : K]$.
Sei $\mathfrak{d}_{L'|K,A} + \mathfrak{d}_{L''|K,A} = (1)$.
Man zeige $\mathfrak{d}_{L|K,A} \;=\; \mathfrak{d}_{L'|K,\,A}^{\ell''} \cdot \mathfrak{d}_{L''|K,A}^{\ell'}$.

Aufgabe 39 (4+4+2 Punkte)
Sei $K := \mathbf{Q}$, sei $L := \mathbf{Q}(\sqrt{13})$, sei $L' := \mathbf{Q}(\sqrt{3})$ und sei $M := \mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{13})$. Cf. Aufgabe 16.(2).
Sei $A := \mathbf{Z}$, sei $B := \Gamma_L(A)$, sei $B' := \Gamma_L(A)$ und sei $C := \Gamma_M(A)$.

(1) Man bestimme $\mathfrak{D}_{L|K,A}$, $\mathfrak{D}_{M|L,B}$ und damit $\mathfrak{D}_{M|K,A}$.

(2) Man bestimme $\mathfrak{D}_{L'|K,A}$, $\mathfrak{D}_{M|L',B}$ und damit $\mathfrak{D}_{M|K,A}$ erneut.

(3) Man bestätige die Aussage von Lemma 96 für $L|K$, $L'|K$ und $M|K$ durch Vergleich der Resultate hier mit den Resultaten aus Aufgabe 16.(2).

Aufgabe 40 (8 Punkte) Sei V ein euklidischer Raum. Zu zeigen ist folgendes.
Für eine Teilmenge $X \subseteq V$ sind die folgenden Aussagen $(1, 2)$ äquivalent.
Für eine additive Untergruppe $X \subseteq V$ sind die folgenden Aussagen $(1, 2, 3, 4)$ äquivalent.

(1) Es ist X eine diskrete Teilmenge von V.

(2) Für alle $v \in V$ gibt es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $(\mathrm{B}_\varepsilon(v) \smallsetminus \{v\}) \cap X = \emptyset$.

(3) Es gibt ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_\varepsilon(0) \cap X = \{0\}$.

(4) Es gibt ein $r \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\mathrm{B}_r(0) \cap X$ endlich.