M. Künzer Abgabe bis Fr 20.04.18

Algebraische Zahlentheorie, SS 18

Blatt 1

Aufgabe 1 (1+3 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring.

(1) Man finde einen surjektiven Ringmorphismus $S \longrightarrow R$ mit S Integritätsbereich.

(2) Wir setzen die Cramersche Regel über Körpern als bekannt voraus. Man leite daraus die Cramersche Regel über R ab.

Hinweis: Ringmorphismen wie in (1) sind mit der Cramerschen Regel verträglich. Jeder Integritätsbereich ist Teilring eines Körpers.

Aufgabe 2 (2+3+3+3+2+2+3+2 Punkte) Sei R ein Hauptidealbereich. Sei $K := \mathrm{Quot}(R)$. Man zeige.

(1) Sei M eine nichtleere Menge von Idealen von R. Es gibt in M ein maximales Element.

(2) Ein Element in $R^\times$ ist genau dann irreduzibel, wenn es prim ist.

(3) Sei $x \in R^\times$ gegeben. Es gibt ein $n \geqslant 0$ und eine Faktorisierung $(x) = (p_1)(p_2)\cdots(p_n)$ mit p_i prim für alle $i \in [1,n]$; kurz, x hat eine Primfaktorzerlegung.

Sind $(x) = (p_1)(p_2)\cdots(p_n) = (p'_1)(p'_2)\cdots(p'_{n'})$ zwei Primfaktorzerlegungen, dann ist $n = n'$, und es gibt ein $\sigma \in \mathrm{S}_n$ mit $(p'_i) = (p_{\sigma(i)})$ für $i \in [1,n]$.

(4) Sei P die Menge der Primideale von R ungleich (0).

Sei $p \in R^\times$ prim. Definiere die *Bewertung* bei p durch $\mathrm{v}_p : K^\times \longrightarrow \mathbf{Z}$ derart, daß für $x \in K^\times$ sich $x = e \prod_{(p)\in P} p^{\mathrm{v}_p(x)}$ ergibt, wobei $e \in \mathrm{U}(R)$ und wobei $\{ (p) \in P : \mathrm{v}_p(x) \neq 0 \}$ endlich ist.

Wir setzen noch $\mathrm{v}_p(0) := \infty$, mit den Regeln $k \leqslant \infty$ und $k + \infty = \infty$ für $k \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$.

(5) Seien $x,\, y \in K$. Es ist $\mathrm{v}_p(xy) = \mathrm{v}_p(x) + \mathrm{v}_p(y)$ und $\mathrm{v}_p(x+y) \geqslant \min\{\mathrm{v}_p(x), \mathrm{v}_p(y)\}$. In letzerem gilt Gleichheit, falls $\mathrm{v}_p(x) \neq \mathrm{v}_p(y)$.

(6) Sei $p \in R^\times$ prim. Ein Element $z \in K$ heiße *p-ganz*, falls $\mathrm{v}_p(z) \geqslant 0$.

 (i) Die p-ganzen Elemente von K bilden einen Teilring.

 (ii) Es ist genau dann $z \in R$, wenn z ein q-ganzes Element ist für alle $q \in R^\times$ prim.

(7) Gegeben $f(X) \in R[X]$ normiert. Ist $f(X) = g(X)h(X)$ mit $g(X),\, h(X) \in K[X]$ normiert, dann sind $g(X),\, h(X) \in R[X]$.

(8) Sei A ein Hauptidealbereich. Sei $K := \mathrm{Quot}(A)$. Sei $L|K$ eine endliche Körpererweiterung. Sei $B := \Gamma_L(A)$. Sei $y \in L$ gegeben. Es ist $y \in B$ genau dann, wenn $\mu_{y,K}(X) \in A[X]$ liegt.

Aufgabe 3 (6 Punkte) Sei $d \in \mathbf{Z} \smallsetminus \{0,1\}$ quadratfrei, d.h. sei $\mathrm{v}_p(d) \in \{0,1\}$ für alle $p \in \mathbf{Z}^\times$ prim.

Sei $K := \mathbf{Q}(\sqrt{d})$. Man bestimme $\mathcal{O}_K$.

Was ergibt sich speziell im Falle $K = \mathbf{Q}(\mathrm{i})$? Im Falle $K = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$? Im Falle $K = \mathbf{Q}(\zeta_3)$?