

1. Prinzip des AuflöSENS

Kleine, aber komplizierte Objekte

ersetzen durch

größere, aber einfacher handhabbare Objekte,

samt

Übergang von letzteren zu ersteren.

Dieses Prinzip soll an wohlbekanntem Beispielen erläutert werden.

1. Prinzip des AuflöSENS

2. Präsentation von Gruppen

3. Kleinsche Flasche

4. Schnittmultiplizitäten

5. Komplexe

2. Präsentation von Gruppen

Sei G Gruppe, erzeugt von $g_1, \dots, g_k \in G$.

Surjektiver Gruppenmorphismus:

$$\begin{array}{ccc} \text{FreieGruppe}(f_1, \dots, f_k) & \xrightarrow{r} & G \\ f_i & \mapsto & g_i. \end{array}$$

Sei der Kern von r als Normalteiler erzeugt von *Relationen*

$$w_1, \dots, w_\ell,$$

wobei die w_j Elemente in dieser freien Gruppe sind, also Wörter in f_1^\pm, \dots, f_k^\pm .

Von der Auflösung zurück zum Original:

$$\langle f_1, \dots, f_k : w_1, \dots, w_\ell \rangle := \frac{\text{FreieGruppe}(f_1, \dots, f_k)}{\text{NtErzeugnis}(w_1, \dots, w_\ell)} \simeq G$$

1. Prinzip des
Auflösendes

2. Präsentation
von Gruppen

3. Kleinsche
Flasche

4. Schnittmulti-
plizitäten

5. Komplexe

Z.B. können wir identifizieren entlang

$$\left\langle s, t : s^2, t^6, (ts)^5, (tst^{-1}s)^3, \right. \\ \left. (t^i s t^{-i} s)^2 \text{ für } i \in [2, 4] \right\rangle \xrightarrow{\sim} S_6$$
$$s \longmapsto (1, 2)$$
$$t \longmapsto (1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Dies hilft bei der Konstruktion des Automorphismus

$$S_6 \xrightarrow{\sigma} S_6$$
$$s = (1, 2) \longmapsto (1, 2)(3, 4)(5, 6) = \sigma(s)$$
$$t = (1, 2, 3, 4, 5, 6) \longmapsto (1, 4)(3, 5, 6) = \sigma(t).$$

Dazu nur: $\sigma(s)^2 \stackrel{!}{=} \text{id}$, $\sigma(t)^6 \stackrel{!}{=} \text{id}$, $(\sigma(t) \circ \sigma(s))^5 \stackrel{!}{=} \text{id}$, ...

Es ist σ nicht inner, i.e. keine Konjugation in S_6 .

Tritt für S_n im Falle $n \neq 6$ nicht auf.

Gaschütz (1966): jede Gruppe von Primpotenzordnung ≥ 3 hat nichtinneren Automorphismus. Argument braucht Verschwinden einer zweiten Cohomologiegruppe.

1. Prinzip des
Auflösendes

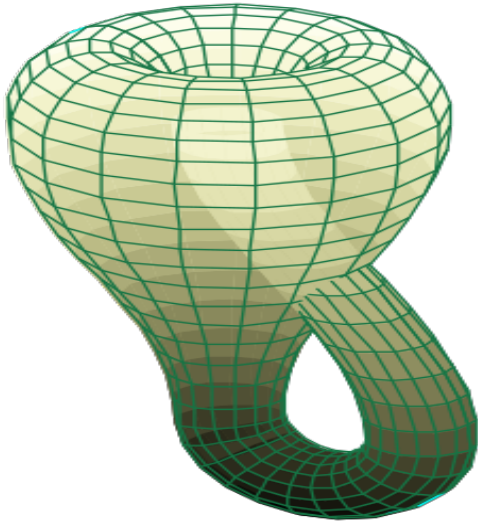
2. Präsentation
von Gruppen

3. Kleinsche
Flasche

4. Schnittmulti-
plizitäten

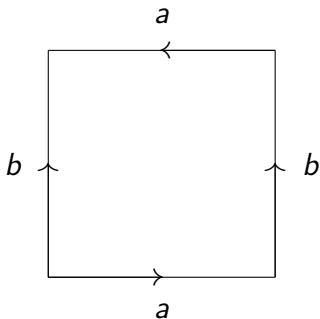
5. Komplexe

3. Kleinsche Flasche



1. Prinzip des Auflöserns
2. Präsentation von Gruppen
3. Kleinsche Flasche
4. Schnittmultiplizitäten
5. Komplexe

Aufgelöst :



Somit wird die Fundamentalgruppe

$$\pi_1(\text{Kleinsche Flasche}) \simeq \langle a, b : abab^{-1} \rangle ,$$

und also die erste Homologiegruppe

$$H_1(\text{Kleinsche Flasche}) \simeq \langle a, b : abab^{-1} \rangle^{\text{abelsch}} \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2 ,$$

dank universellem Koeffiziententheorem mithin die erste Cohomologiegruppe

$$H^1(\text{Kleinsche Flasche}) \simeq \mathbf{Z} .$$

1. Prinzip des Auflörens

2. Präsentation von Gruppen

3. Kleinsche Flasche

4. Schnittmultiplizitäten

5. Komplexe

4. Schnittmultiplizitäten

Sei A regulärer lokaler Ring einer alg. Varietät an einem Punkt. Seien dort $I, J \subseteq A$ die Ideale zu Teilvarietäten, die sich lokal nur in diesem Punkt schneiden.

Z.B. $A = \mathbf{C}[X, Y]_{(X, Y)}$ zur Ebene im Ursprung,
 $I = (Y - 0)$ zur X -Achse und $J = (Y - X^2)$ zur
Normalparabel.

Ihre *Schnittmultiplizität* ist

$$\chi(A/I, A/J) := \sum_{k \geq 0} (-1)^k \ell_A \operatorname{Tor}_k^A(A/I, A/J),$$

mit $\ell_A :=$ Länge und $\operatorname{Tor}_k^A := k$ -ter Torsionsmodul; cf. §5.2.3.

Z.B. ist die Schnittmultiplizität der X -Achse mit der
Normalparabel im Ursprung gleich 2; Beitrag nur von $k = 0$.

1. Prinzip des
Auflösend

2. Präsentation
von Gruppen

3. Kleinsche
Flasche

4. Schnittmulti-
plizitäten

5. Komplexe

Serre (1958): $\chi(A/I, A/J) \stackrel{?}{\geq} 0$.

Serre: ja, unter Voraussetzungen. Gabber (1995): ja.

Dazu Ersetzung von A/I durch **regulären** Ring mittels *Alteration*: einer abgeschwächten Variante einer Auflösung von Singularitäten. Als Funktionskörper darf die Ersetzung dabei eine endliche Erweiterung des Funktionskörpers des Originals haben.

Hironaka (1964): in Charakteristik 0 existiert Auflösung von Singularitäten.

De Jong (1995): stets existiert Alteration mit guten Eigenschaften; für unser A/I existiert **reguläre** Alteration.

1. Prinzip des Auflösens

2. Präsentation von Gruppen

3. Kleinsche Flasche

4. Schnittmultiplizitäten

5. Komplexe

5. Komplexe

5.1. Kontext

Seien R und S Ringe. Sei $\mathcal{A} := R\text{-Mod}$ die Kategorie der R -Linksmoduln. Sei $\mathcal{B} := S\text{-Mod}$.

Sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor.

Es kann F z.B. der Hom- oder Tensorproduktfunktor mit einem Bimodul sein.

Ein *schwaches Quadrat* in \mathcal{A}

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{\varphi'} & N' \\ \mu \uparrow & & \uparrow \nu \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

habe eine in der Mitte exakte Diagonalsequenz

$$M \xrightarrow{(\mu \ \varphi)} M' \oplus N \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi' \\ -\nu \end{pmatrix}} N' .$$

1. Prinzip des Auflörens

2. Präsentation von Gruppen

3. Kleinsche Flasche

4. Schnittmultiplizitäten

5. Komplexe

5.2. Klassisch: 2-Komplexe

5.2.1. Homotopiekategorie

Sei $C_{(2)}^+(\mathcal{A})$ die Kategorie der kommutativen Diagramme in \mathcal{A} der Form

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 0 \longrightarrow \cdots \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & 0 \longrightarrow X_{0+1/2} \xrightarrow{x} \cdots \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & x \uparrow \\ & & & & & & 0 \longrightarrow X_{2/1} \xrightarrow{x} X_{0+1/1} \longrightarrow \cdots \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & x \uparrow \\ & & & & & & 0 \longrightarrow X_{1/0} \xrightarrow{x} X_{2/0} \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & x \uparrow \\ & & & & & & 0 \longrightarrow X_{0/2-1} \xrightarrow{x} X_{1/2-1} \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & x \uparrow \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \vdots \end{array}$$

mit Einträgen nach links unten irgendwann konstant 0.

1. Prinzip des Auflöserns
2. Präsentation von Gruppen
3. Kleinsche Flasche
4. Schnittmultiplizitäten
5. Komplexe

Ein solches Diagramm heiße hier (nach unten beschrnchter) *2-Komplex*, ist aber nichts anderes als ein Komplex im üblichen Sinne, aufwendig dargestellt und indiziert. Klassisch wird $C_{(2)}^+(\mathcal{A})$ kurz als $C^+(\mathcal{A})$ bezeichnet.

Ein 2-Komplex mit einem identischen Morphismus in beliebiger Position und ansonsten Nullobjekten heiße *elementar split-azyklisch*; direkte Summen solcher dann *split-azyklisch*.

Zwei Morphismen von 2-Komplexen seien *homotop*, wenn ihre Differenz über einen split azyklischen faktorisiert.

Dies gibt die triangulierte *Homotopiekategorie*

$$K_{(2)}^+(\mathcal{A}) := C_{(2)}^+(\mathcal{A}) / (\text{split-azyklische}) ,$$

mit Objekten = 2-Komplexe und mit Morphismen = Homotopieklassen von Morphismen in $C_{(2)}^+(\mathcal{A})$.

Klassisch wird $K_{(2)}^+(\mathcal{A})$ kurz als $K^+(\mathcal{A})$ bezeichnet.

1. Prinzip des Auflösens

2. Präsentation von Gruppen

3. Kleinsche Flasche

4. Schnittmultiplizitäten

5. Komplexe

5.2.2. Derivierte Kategorie

Ein 2-Komplex heißt *azyklisch*, wenn er aus schwachen Quadraten besteht, also, klassisch gesagt, wenn er an jeder Stelle exakt ist.

Wir haben einen universellen exakten Funktor triangulierter Kategorien

$$K_{(2)}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{L_{(2)}} D_{(2)}^+(\mathcal{A})$$

bezüglich der Eigenschaft, azyklische 2-Komplexe auf Null zu schicken.

Hierbei ist $L_{(2)}$ der *Lokalisierungsfunktor* und $D_{(2)}^+(\mathcal{A})$ die *derivierte Kategorie* im klassischen Sinne, kurz als $D^+(\mathcal{A})$ bezeichnet. Für diese Konstruktion werden Objekte mittels $L_{(2)}$ identisch abgebildet und in $D_{(2)}^+(\mathcal{A})$ Brüche von Morphismen gebildet.

1. Prinzip des Auflösens

2. Präsentation von Gruppen

3. Kleinsche Flasche

4. Schnittmultiplizitäten

5. Komplexe

Es hat $L_{(2)}$ einen Rechtsadjungierten,

$$K_{(2)}^+(\mathcal{A}) \xleftarrow{\text{IRes}_{(2)}} D_{(2)}^+(\mathcal{A}),$$

was

$$\text{Hom}_{K_{(2)}^+(\mathcal{A})}(X, \text{IRes}_{(2)} Y) \simeq \text{Hom}_{D_{(2)}^+(\mathcal{A})}(L_{(2)}X, Y)$$

bedeutet und

$$L_{(2)} \dashv \text{IRes}_{(2)}$$

geschrieben wird. Es schickt $\text{IRes}_{(2)}$ einen Komplex auf seine injektive Auflösung:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & X_{1/0} & \xrightarrow{x} & X_{2/0} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \\
 & & \bullet & & \bullet & & \\
 & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & I_{1/0} & \xrightarrow{i} & I_{2/0} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \\
 & & \bullet & & \bullet & & \\
 & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \\
 & & \text{IRes}_{(2)} L_{(2)} X & & & &
 \end{array}$$

X
 $\downarrow \epsilon_X$
 $\text{IRes}_{(2)} L_{(2)} X$

Es ist $L_{(2)}\epsilon_X$ ein Isomorphismus – was den Übergang herstellt.

1. Prinzip des Auflöserns
2. Präsentation von Gruppen
3. Kleinsche Flasche
4. Schnittmultiplizitäten
5. Komplexe

5.2.3. Rechtsabgeleiteter Funktor

Der *rechtsabgeleitete Funktor* von $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ist das Kompositum

$$(D_{(2)}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{R_{(2)}F} D_{(2)}^+(\mathcal{B})) :=$$

$$(D_{(2)}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{\text{IRes}_{(2)}} K_{(2)}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{K_{(2)}^+(F)} K_{(2)}^+(\mathcal{B}) \xrightarrow{L_{(2)}} D_{(2)}^+(\mathcal{B})),$$

wobei $K_{(2)}^+(F)$ das punktweise Anwenden von F bezeichne.

Klassisch schreibt man $R_{(2)}F$ kurz $RF : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{B})$,
und auch $R^k F := H^k \circ RF|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ für $k \geq 0$.

So etwa resultiert $\text{Tor}_k^A(A/I, A/J)$ von §4 aus

$$\mathcal{A} = (A\text{-Mod})^\circ, \quad \mathcal{B} = (\mathbf{Z}\text{-Mod})^\circ, \quad F = A/I \otimes_A -.$$

Für die Cohomologiegruppe aus §2 nehmen wir für G geeignet
 $\mathcal{A} = \mathbf{Z}G\text{-Mod}$, $\mathcal{B} = \mathbf{Z}\text{-Mod}$, $F = (\text{Fixpunkte unter } G)$.

Für $H^1(\text{Kleinsche Flasche})$ aus §3 verallgemeinern wir:

$$\mathcal{A} = (\text{Garben}), \quad \mathcal{B} = \mathbf{Z}\text{-Mod}, \quad F = (\text{globale Schnitte})$$

1. Prinzip des
Auflösend

2. Präsentation
von Gruppen

3. Kleinsche
Flasche

4. Schnittmulti-
plizitäten

5. Komplexe

Alles folgende unter Vermutungsvorbehalt.

5.3. 3-Komplexe

5.3.1. Homotopiekategorie

Sei $C_{(3)}^+(\mathcal{A})$ die Kategorie der (nach unten beschränkten) 3-Komplexe, d.h. der kommutativen Diagramme der Form

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & & & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & & & & & & & \uparrow & & \\
 & & & & & & & & & & 0 & \longrightarrow & X_{0+1/3} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & & & & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & & & & & & & 0 & \longrightarrow & X_{3/2} & \xrightarrow{x} & X_{0+1/2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & & & & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & & & & & & & 0 & \longrightarrow & X_{2/1} & \xrightarrow{x} & X_{3/1} & \xrightarrow{x} & X_{0+1/1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & & & & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & & & & & & & 0 & \longrightarrow & X_{1/0} & \xrightarrow{x} & X_{2/0} & \xrightarrow{x} & X_{3/0} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & & & & & & & 0 & \longrightarrow & X_{0/3-1} & \xrightarrow{x} & X_{1/3-1} & \xrightarrow{x} & X_{2/3-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

mit Einträgen nach links unten irgendwann konstant 0.

1. Prinzip des Auflösens
2. Präsentation von Gruppen
3. Kleinsche Flasche
4. Schnittmultiplizitäten
5. Komplexe

Ein 3-Komplex aus einem Teildiagramm der Form

$$\begin{array}{c}
 M \rightrightarrows M \rightrightarrows M \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c} M \rightrightarrows M \\ \parallel \qquad \parallel \\ M \rightrightarrows M \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c} M \\ \parallel \\ M \\ \parallel \\ M \end{array}
 \end{array}$$

in beliebiger Position und ansonsten Nullobjekten heiße *elementar split-azyklisch*; direkte Summen solcher dann *split-azyklisch*.

Dies gibt die triangulierte *Homotopiekategorie*

$$K_{(3)}^+(\mathcal{A}) := C_{(3)}^+(\mathcal{A}) / (\text{split-azyklische}) .$$

Shifts darin sind komplizierter als erwartet.

1. Prinzip des Auflösens
2. Präsentation von Gruppen
3. Kleinsche Flasche
4. Schnittmultiplizitäten
5. Komplexe

5.3.2. Derivierte Kategorie

Ein 3-Komplex heißt *azyklisch*, wenn er aus schwachen Quadraten besteht.

Wir haben einen universellen exakten Funktor triangulierter Kategorien

$$K_{(3)}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{L_{(3)}} D_{(3)}^+(\mathcal{A})$$

der azyklische 3-Komplexe auf Null schickt. Sei

$$L_{(3)} \dashv \text{IRes}_{(3)} .$$

5.3.3. Rechtsabgeleiteter Funktor

Der *rechtsabgeleitete Funktor* ist definiert als Kompositum

$$(D_{(3)}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{R_{(3)}F} D_{(3)}^+(\mathcal{B})) :=$$

$$(D_{(3)}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{\text{IRes}_{(3)}} K_{(3)}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{K_{(3)}^+(F)} K_{(3)}^+(\mathcal{B}) \xrightarrow{L_{(3)}} D_{(3)}^+(\mathcal{B})) .$$

1. Prinzip des
Auflösens

2. Präsentation
von Gruppen

3. Kleinsche
Flasche

4. Schnittmulti-
plizitäten

5. Komplexe

5.4. Funktoren zwischen $D_{(3)}^+(\mathcal{A})$ und $D_{(2)}^+(\mathcal{A})$

Wir haben eine monotone Abbildung von $\{1, 2\}$ in die den 3-Komplexen zugrundeliegende teilgeordnete Menge, die

$$\begin{array}{l} 1 \mapsto 2/0 \\ 2 \mapsto 3/1 \end{array}$$

abbildet. Diese induziert den Funktor V in folgender Liste.

$$D_{(3)}^+(\mathcal{A}) \longleftrightarrow D_{(2)}^+(\mathcal{A})$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & \longrightarrow & Y_{0+1/1} \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \binom{1}{y} \\ & & & & 0 & \longrightarrow & Y_{2/1} \xrightarrow{(-y \ 1)} Y_{0+1/1} \oplus Y_{2/1} \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \binom{0 \ 1} \\ & & & & 0 & \longrightarrow & Y_{1/0} \xrightarrow{y} Y_{2/0} \xrightarrow{-y} Y_{2/1} \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \binom{1}{y} \\ & & & & 0 & \longrightarrow & Y_{1/0} \xrightarrow{y} Y_{2/0} \xrightarrow{-y} Y_{2/1} \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \binom{0 \ 1} \\ Y_{1/2-1} & \xrightarrow{(0 \ 1)} & Y_{1/0} \oplus Y_{1/2-1} & \xrightarrow{(1 \ y)} & Y_{1/0} & \longrightarrow & 0 \end{array} \right)$$

$$\xleftarrow{U} Y$$

$$X \xrightarrow{V}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & \longrightarrow & X_{1+1/3} \\ & & & & \uparrow & & \uparrow^x \\ & & & & 0 & \longrightarrow & X_{3/2} \oplus X_{0+1/1} \xrightarrow{\binom{-x}{-x}} X_{0+1/2} \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & X_{2/0} & \xrightarrow{x} & X_{3/1} \longrightarrow 0 \end{array} \right)$$

$$\xleftarrow{W} Y$$

Damit:

$$\dots \dashv U \dashv V \dashv W \dashv \dots$$

1. Prinzip des Auflörens

2. Präsentation von Gruppen

3. Kleinsche Flasche

4. Schnittmultiplizitäten

5. Komplexe

Sei z.B. $M \xrightarrow{\varphi} N$ in \mathcal{A} gegeben. Sei $\text{Conc}(M \xrightarrow{\varphi} N)$ der 3-Komplex mit $M \xrightarrow{\varphi} N$ an Positionen $1/0 \rightarrow 2/0$, und 0 sonst.

Wir bilden einen Pushout

$$\begin{array}{ccc} \text{Inj.} & \longrightarrow & Z \\ \uparrow & & \uparrow \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

So ist Z ein "etwas korrigierter Cokern" von φ .

Für $k \geq 0$ wird

$$\begin{aligned} & (\mathbb{H}^k \circ V \circ R_{(3)}F)(\text{Conc}(M \xrightarrow{\varphi} N)) \\ \simeq & (\mathbb{H}^k \circ R_{(2)}F)(\text{Conc}(Z)) \\ \stackrel{\text{klassisch}}{\underset{\text{geschrieben}}{=}} & (R^k F)Z ; \end{aligned}$$

es trägt also $(R_{(3)}F)(\text{Conc}(M \xrightarrow{\varphi} N))$ u.a. diese klassische Information.

1. Prinzip des Auflöserns

2. Präsentation von Gruppen

3. Kleinsche Flasche

4. Schnittmultiplizitäten

5. Komplexe

5.5. Ein 3-Komplex für einen Morphismus zwischen 2-Komplexen

Einem Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ von 2-Komplexen können wir folgenden 3-Komplex zuordnen.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & \longrightarrow & Y_{0+1/2} \oplus X_{1+1/2} \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & -x \end{pmatrix} \\
 & & & & 0 & \longrightarrow & X_{0+1/1} \xrightarrow{(xf-x)} Y_{0+1/2} \oplus X_{0+1/2} \\
 & & & & \uparrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & & \uparrow \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & & & & 0 & \longrightarrow & Y_{2/1} \xrightarrow{(10)} Y_{2/1} \oplus X_{0+1/1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & 0 \\ f & -x \end{pmatrix}} Y_{0+1/1} \oplus X_{0+1/2} \\
 & & & & \uparrow \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \uparrow \\
 & & & & 0 & \longrightarrow & Y_{1/0} \oplus X_{2/0} \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} Y_{2/0} \oplus X_{2/0} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & -x \end{pmatrix}} Y_{2/0} \oplus X_{2/1} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & Y_{1/0} \oplus X_{2/0} & & Y_{2/0} \oplus X_{2/1}
 \end{array}$$

Dieser enthält, in $K_{(2)}^+(\mathcal{A})$ betrachtet, sowohl X als auch Y als auch den Kegel von f in $K_{(2)}^+(\mathcal{A})$.

Sind X und Y (split) azyklisch, dann auch dieser 3-Komplex. Folglich liefert die Konstruktion einen Funktor von $D_{(2)}^+(\mathcal{A}^{\bullet \rightarrow \bullet})$ nach $D_{(3)}^+(\mathcal{A})$, wobei $\mathcal{A}^{\bullet \rightarrow \bullet}$ die Diagrammkategorie bezeichne.

1. Prinzip des Auflöserns
2. Präsentation von Gruppen
3. Kleinsche Flasche
4. Schnittmultiplizitäten
5. Komplexe