

Auflösungen

Antrittsvorlesung Stuttgart

Matthias Künzer

21. Oktober 2013

1 Prinzip des AuflöSENS

Das Prinzip des AuflöSENS besteht darin, kleine, aber komplizierte Objekte durch größere, aber einfacher handhabbare Objekte zu ersetzen und eine Anleitung zu geben, wie von letzteren wieder zu ersteren übergegangen werden kann.

Dieser Übergang kann daraus bestehen, eine Anleitung zu geben, wie aus der Auflösung das Original im wesentlichen rekonstruiert werden kann. Er kann aber auch daraus bestehen, einen Zusammenhang zwischen Ersatz und Original herzustellen, der eng genug ist, um den Ersatz zum Einsatz bringen zu können.

Die Funktionsweise dieses Prinzips soll anhand von wohlbekanntem Beispielen aus Algebra und Geometrie illustriert werden.

2 Präsentation von Gruppen

Diese Technik stammt von VON DYCK (1882).

Sei G eine Gruppe, erzeugt von Elementen $g_1, \dots, g_k \in G$. Das liefert einen surjektiven Gruppenmorphismus

$$\begin{array}{ccc} \text{FreieGruppe}(f_1, \dots, f_k) & \xrightarrow{r} & G \\ f_i & \mapsto & g_i. \end{array}$$

Der Kern von r sei als Normalteiler erzeugt von *Relationen* w_1, \dots, w_ℓ , wobei die w_j Elemente in dieser freien Gruppe sind, also Wörter in f_1^\pm, \dots, f_k^\pm .

Diese freie Gruppe wird als Auflösung betrachtet, die Relationen als Anleitung, wie von der Auflösung

zum Original übergegangen werden soll. Denn es ist

$$\langle f_1, \dots, f_k : w_1, \dots, w_\ell \rangle := \frac{\text{FreieGruppe}(f_1, \dots, f_k)}{\text{Normalteilererzeugnis}(w_1, \dots, w_\ell)} \xrightarrow{\bar{r}} G.$$

So ist z.B.

$$\begin{aligned} \langle s, t : s^2, t^6, (ts)^5, (tst^{-1}s)^3, (t^i st^{-i} s)^2 \text{ für } i \in [2, 4] \rangle &\xrightarrow{\sim} S_6 \\ s &\mapsto (1, 2) \\ t &\mapsto (1, 2, 3, 4, 5, 6), \end{aligned}$$

was wir als Identifikation verwenden. Auf diese Weise konstruiert man den Automorphismus

$$\begin{aligned} S_6 &\xrightarrow{\sigma} S_6 \\ s = (1, 2) &\mapsto (1, 2)(3, 4)(5, 6) = \sigma(s) \\ t = (1, 2, 3, 4, 5, 6) &\mapsto (1, 4)(3, 5, 6) = \sigma(t) \end{aligned}$$

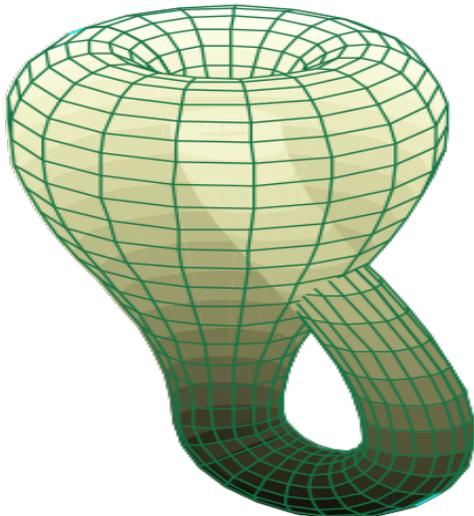
durch Nachrechnen der Relationen auf den Bildern, i.e. $\sigma(s)^2 \stackrel{!}{=} \text{id}$, $\sigma(t)^6 \stackrel{!}{=} \text{id}$, $(\sigma(t) \circ \sigma(s))^5 \stackrel{!}{=} \text{id}$, ...

Es ist σ nicht inner, i.e. nicht durch Konjugation mit einem Element aus S_6 gegeben. Einen solchen nichtinneren Automorphismus gibt es für S_n im Falle $n \neq 6$ nicht, wie HÖLDER (1895) feststellte.

Dagegen gibt es nach GASCHÜTZ (1966) für jede Gruppe von Primpotenzordnung ≥ 3 einen nichtinneren Automorphismus. Hierfür bemüht man das Verschwinden einer zweiten Cohomologiegruppe.

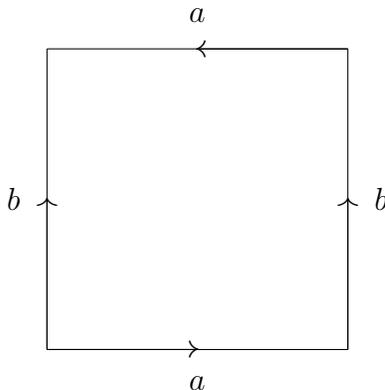
3 Kleinsche Flasche

Schneidet man einen Torus entlang eines kleinen Rings auf und klebt den einen dabei entstehenden Kreis statt von vorne nun von hinten an den anderen – was im \mathbf{R}^3 nur mit Selbstdurchdringung der Oberfläche möglich ist –, so erhält man eine nach KLEIN (1882) benannte Kleinsche Flasche (¹).



¹Graphik von Wikipedia, en.wikipedia.org/wiki/Klein_bottle.

Aufgelöst kann eine solche Kleinsche Flasche als Viereckfläche mit einer Anleitung zum Zusammenkleben der Seiten dargestellt werden.



Entsprechend wird die Fundamentalgruppe

$$\pi_1(\text{Kleinsche Flasche}) \simeq \langle a, b : abab^{-1} \rangle,$$

und also die erste Homologiegruppe

$$H_1(\text{Kleinsche Flasche}) \simeq \langle a, b : abab^{-1} \rangle^{\text{abelsch}} \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2.$$

Das universelle Koeffiziententheorem liefert hieraus und aus $H_0(\text{Kleinsche Flasche}) \simeq \mathbf{Z}$ die erste Cohomologiegruppe

$$H^1(\text{Kleinsche Flasche}) \simeq \mathbf{Z}.$$

4 Schnittmultiplizitäten

Sei A der lokale Ring einer algebraischen Varietät an einem Punkt. Sei A als regulär vorausgesetzt. Seien dort $I, J \subseteq A$ die Ideale zu Teilvarietäten. Sei $A/(I+J)$ von endlicher Länge, was geometrisch bedeutet, daß der Schnitt der Teilvarietäten lokal nicht aus mehr als dem genannten Punkt besteht.

Wir können z.B. den lokalen Ring $A = \mathbf{C}[X, Y]_{(X, Y)}$ der Ebene im Ursprung, das Ideal $I = (Y - 0)$ zur X -Achse und das Ideal $J = (Y - X^2)$ zur Normalparabel nehmen.

Die Schnittmultiplizität der beiden Teilvarietäten definiert man, unter der Voraussetzung nach SERRE (1958) durch

$$\chi(A/I, A/J) := \sum_{k \geq 0} (-1)^k \ell_A \text{Tor}_k^A(A/I, A/J).$$

Hierbei bezeichnen wir mit Tor_k^A den k -ten Torsionsmodul und mit ℓ_A die Länge eines A -Moduls; cf. §5.2.3.

Z.B. ist die Schnittmultiplizität der X -Achse mit der Normalparabel im Ursprung gleich 2, wozu nur der Term für $k = 0$ einen Beitrag leistet.

Serre vermutete, daß $\chi(A/I, A/J) \geq 0$ ist, und zeigte dies unter einschränkenden Voraussetzungen.

GABBER (1995) zeigte diese Vermutung im allgemeinen. Ein Schritt dabei war die Ersetzung von A/I durch einen regulären Ring unter Verwendung einer *Alteration*: einer abgeschwächten Variante der Auflösung von Singularitäten; bei letzterer verlangt man einen Isomorphismus der Funktionenkörper von Original und Auflösung, bei ersterer läßt man eine endliche Erweiterung zu.

Eine Auflösung von Singularitäten ist in Charakteristik 0 dank HIRONAKA (1964) möglich, in positiver Charakteristik aber unbekannt.

Die von Gabber benötigte Alteration wurde von DE JONG (1995) konstruiert.

5 Komplexe

5.1 Kontext

Seien R und S Ringe.

Sei $\mathcal{A} := R\text{-Mod}$ die Kategorie der R -Linksmoduln. Sei $\mathcal{B} := S\text{-Mod}$.

Z.B. für $R = \mathbf{Z}$ ist \mathcal{A} die Kategorie der abelschen Gruppen. Für $R = \mathbf{Q}[T]$ ist \mathcal{A} die Kategorie der Paare $(X, \tau : X \rightarrow X)$, wobei X ein \mathbf{Q} -Vektorraum ist und τ eine \mathbf{Q} -lineare Abbildung.

Sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor.

Es kann F z.B. Hom- oder Tensorproduktfunktor mit einem Bimodul sein.

Ein kommutatives Viereck

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{\varphi'} & N' \\ \mu \uparrow & & \uparrow \nu \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

in \mathcal{A} heißt *schwaches Quadrat*, wenn seine Diagonalsequenz

$$M \xrightarrow{(\mu \ \varphi)} M' \oplus N \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi' \\ -\nu \end{pmatrix}} N'$$

exakt in der Mitte ist.

5.2 Klassisch: 2-Komplexe

5.2.1 Homotopiekategorie

Die folgende Theorie geht im wesentlichen zurück auf H. CARTAN und EILENBERG (1953) sowie auf GROTHENDIECK und VERDIER (1963).

Sei $C_{(2)}^+(\mathcal{A})$ die Kategorie der kommutativen Diagramme in \mathcal{A} der Form

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \longrightarrow \cdots \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & 0 \longrightarrow X_{0+1/2} \xrightarrow{x} \cdots \\
 & & & & & & \uparrow x \\
 & & & & & & 0 \longrightarrow X_{2/1} \xrightarrow{x} X_{0+1/1} \longrightarrow \cdots \\
 & & & & & & \uparrow x \\
 & & & & & & 0 \longrightarrow X_{1/0} \xrightarrow{x} X_{2/0} \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \uparrow x \\
 & & & & & & 0 \longrightarrow X_{0/2-1} \xrightarrow{x} X_{1/2-1} \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \uparrow x \\
 \vdots & & & & & & \vdots
 \end{array}$$

für welche die Einträge nach links unten irgendwann konstant 0 werden.

Ein solches Diagramm heiße hier (nach unten beschränkter) *2-Komplex*, ist aber **nichts anderes als ein Komplex im üblichen Sinne**, etwas aufwendig dargestellt und indiziert, der Regel $(\beta/\alpha)^{+1} = \alpha^{+1}/\beta$ folgend. Klassisch wird $C_{(2)}^+(\mathcal{A})$ kurz als $C^+(\mathcal{A})$ bezeichnet.

Ein 2-Komplex mit einem identischen Morphismus in beliebiger Position und ansonsten Nullobjekten heiße *elementar split-azyklisch*.

Ein 2-Komplex heiße *split-azyklisch*, wenn er direkte Summe elementar split-azyklischer Komplexe ist.

Sei

$$K_{(2)}^+(\mathcal{A})$$

die *Homotopiekategorie* von 2-Komplexen, bestehend aus 2-Komplexen als Objekten und aus Homotopieklassen von Morphismen in $C_{(2)}^+(\mathcal{A})$ als Morphismen. Dabei liegen zwei Morphismen aus $C_{(2)}^+(\mathcal{A})$ in derselben Homotopiekategorie, wenn ihre Differenz über einen split-azyklischen 2-Komplex faktorisiert. Als Exaktheitsstruktur trägt $K_{(2)}^+(\mathcal{A})$ eine Triangulation ⁽²⁾. Klassisch wird $K_{(2)}^+(\mathcal{A})$ kurz als $K^+(\mathcal{A})$ bezeichnet.

5.2.2 Derivierte Kategorie

Ein 2-Komplex heißt *azyklisch*, wenn er aus schwachen Quadraten besteht, klassisch gesagt also, wenn er an jeder Stelle exakt ist. So ist z.B. ein split-azyklischer 2-Komplex azyklisch.

²Es ist $C_{(2)}^+(\mathcal{A})$ eine Frobeniuskategorie und $K_{(2)}^+(\mathcal{A})$ die zugehörige stabile Kategorie.

Wir haben einen universellen exakten Funktor triangulierter Kategorien

$$K_{(2)}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{L_{(2)}} D_{(2)}^+(\mathcal{A})$$

bezüglich der Eigenschaft, daß $L_{(2)}$ azyklische 2-Komplexe auf Null schickt.

Hierbei ist $L_{(2)}$ der *Lokalisierungsfunktor* und $D_{(2)}^+(\mathcal{A})$ die *derivierte Kategorie* im klassischen Sinne, kurz auch als $D^+(\mathcal{A})$ bezeichnet. Für diese Konstruktion werden Objekte mittels $L_{(2)}$ identisch abgebildet und in $D_{(2)}^+(\mathcal{A})$ Brüche von Morphismen gebildet.

Es hat $L_{(2)}$ einen Rechtsadjungierten,

$$K_{(2)}^+(\mathcal{A}) \xleftarrow{\text{IRes}_{(2)}} D_{(2)}^+(\mathcal{A}),$$

was

$$\text{Hom}_{K_{(2)}^+(\mathcal{A})}(X, \text{IRes}_{(2)} Y) \simeq \text{Hom}_{D_{(2)}^+(\mathcal{A})}(L_{(2)} X, Y)$$

bedeutet und

$$L_{(2)} \dashv \text{IRes}_{(2)}$$

geschrieben wird. Hierbei schickt $\text{IRes}_{(2)}$ einen Komplex auf eine injektive Auflösung dieses Komplexes. Wir haben eine zugehörige Einheit $X \xrightarrow{\varepsilon_X} \text{IRes}_{(2)} L_{(2)} X$ mit $L_{(2)} \varepsilon_X$ Isomorphismus. Das Auflösen liefert also, in $D_{(2)}^+(\mathcal{A})$ betrachtet, einen vollwertigen Ersatz. Die Konstruktion von IRes folgt folgendem Prinzip.

$$\begin{array}{ccc}
 \cdots \longrightarrow X_{1/0} & \xrightarrow{x} & X_{2/0} \longrightarrow \cdots \\
 \swarrow \bullet & \nearrow \bullet & \swarrow \bullet \\
 \text{pushout} & & \text{pushout} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots \longrightarrow I_{1/0} & \xrightarrow{i} & I_{2/0} \longrightarrow \cdots
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 X \\
 \downarrow \bullet \varepsilon_X \\
 \text{IRes}_{(2)} L_{(2)} X
 \end{array}$$

Hierbei sind $\bullet \rightarrow$ Monomorphismen und die Objekte $I_{\beta/\alpha}$ injektiv.

5.2.3 Rechtsabgeleiteter Funktor

Der *rechtsabgeleitete Funktor* von F ist definiert als Kompositum

$$\begin{aligned}
 (D_{(2)}^+(\mathcal{A}) &\xrightarrow{R_{(2)} F} D_{(2)}^+(\mathcal{B})) := \\
 (D_{(2)}^+(\mathcal{A}) &\xrightarrow{\text{IRes}_{(2)}} K_{(2)}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{K_{(2)}^+(F)} K_{(2)}^+(\mathcal{B}) \xrightarrow{L_{(2)}} D_{(2)}^+(\mathcal{B})),
 \end{aligned}$$

wobei $K_{(2)}^+(F)$ das punktweise Anwenden von F bezeichne.

Klassisch schreibt man $R_{(2)} F$ kurz $RF : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{B})$, und auch $R^k F := H^k \circ RF|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ für $k \geq 0$. Dies liefert viele bekannte Cohomologietheorien.

Ein 3-Komplex aus einem Teildiagramm der Form

$$M \longleftarrow M \longrightarrow M \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ccc} M & \longleftarrow & M \\ \parallel & & \parallel \\ M & \longleftarrow & M \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c} M \\ \parallel \\ M \\ \parallel \\ M \end{array}$$

in beliebiger Position und ansonsten Nullobjekten heiße *elementar split-azyklisch*.

Ein *split-azyklischer* 3-Komplex ist direkte Summe elementar split-azyklischer 3-Komplexe.

Die Faktorkategorie von $C_{(3)}^+(\mathcal{A})$ modulo den split-azyklischen 3-Komplexen ist die *Homotopiekategorie*

$$K_{(3)}^+(\mathcal{A}) ,$$

welche ebenfalls trianguliert ist ⁽³⁾.

5.3.2 Derivierte Kategorie

Ein 3-Komplex heißt *azyklisch*, wenn er aus schwachen Quadraten besteht. So ist z.B. ein split-azyklischer 3-Komplex azyklisch.

Wir haben einen universellen exakten Funktor triangulierter Kategorien

$$K_{(3)}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{L_{(3)}} D_{(3)}^+(\mathcal{A})$$

bezuglich der Eigenschaft, daß $L_{(3)}$ azyklische 3-Komplexe auf Null schickt. Sei

$$L_{(3)} \dashv \text{IRes}_{(3)} .$$

5.3.3 Rechtsabgeleiteter Funktor

Wir definieren den rechtsabgeleiteten Funktor

$$\begin{aligned} (D_{(3)}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{R_{(3)}F} D_{(3)}^+(\mathcal{B})) &:= \\ (D_{(3)}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{\text{IRes}_{(3)}} K_{(3)}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{K_{(3)}^+(F)} K_{(3)}^+(\mathcal{B}) \xrightarrow{L_{(3)}} D_{(3)}^+(\mathcal{B})) , \end{aligned}$$

wobei $K_{(3)}^+(F)$ das punktweise Anwenden von F bezeichne.

³Es ist $C_{(3)}^+(\mathcal{A})$ eine Frobeniuskategorie und $K_{(3)}^+(\mathcal{A})$ die zugehörige stabile Kategorie.

5.3.4 Shifts

Auf $D_{(3)}^+(\mathcal{A})$ operieren Funktoren.

Der naive Shiftfunktork

$$\begin{aligned} D_{(3)}^+(\mathcal{A}) &\xrightarrow{\sim} D_{(3)}^+(\mathcal{A}) \\ X &\longmapsto \Sigma_{\text{naiv}} X \end{aligned}$$

ist durch $(\Sigma_{\text{naiv}} X)_{\beta/\alpha} := X_{(\beta+1)/(\alpha+1)}$ erklärt, wobei die Indizes $2+1$ und 0^{+1} zu identifizieren sind; i.e. Σ_{naiv} zieht einen 3-Komplex um eine Stufe nach unten links.

Der Heller-Shiftfunktork

$$\begin{aligned} D_{(3)}^+(\mathcal{A}) &\xrightarrow{\sim} D_{(3)}^+(\mathcal{A}) \\ X &\longmapsto \Sigma_{\text{Heller}} X \end{aligned}$$

entstammt der Triangulierung auf $D_{(3)}^+(\mathcal{A})$. Dieser Shift involviert direkte Summen in nicht ganz offensichtlicher Weise.

Ferner ist noch der äußere Shiftfunktork

$$\begin{aligned} D_{(3)}^+(\mathcal{A}) &\xrightarrow{\sim} D_{(3)}^+(\mathcal{A}) \\ X &\longmapsto \Sigma_{\text{außen}} X \end{aligned}$$

durch $(\Sigma_{\text{außen}} X)_{\beta/\alpha} = X_{\alpha+1/\beta}$ erklärt; es zieht mithin $\Sigma_{\text{außen}}$ einen 3-Komplex nach unten links und spiegelt ihn.

Diese drei Operationen erzeugen eine abelsche Gruppe und erfüllen die Relationen

$$\Sigma_{\text{naiv}}^4 = \Sigma_{\text{außen}}^2, \quad \Sigma_{\text{Heller}}^3 = \Sigma_{\text{außen}},$$

so daß insgesamt $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2$ operiert. Auf $D_{(2)}^+(\mathcal{A})$ operiert hingegen nur \mathbf{Z} .

5.4 Funktoren zwischen $D_{(3)}^+(\mathcal{A})$ und $D_{(2)}^+(\mathcal{A})$

Wir haben eine monotone Abbildung von $\{1, 2\}$ in die den 3-Komplexen zugrundeliegende teilgeordnete Menge, die

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 2/0 \\ 2 &\longmapsto 3/1 \end{aligned}$$

abbildet. Diese induziert den Funktor V in folgender Liste, in welcher jeweils nur Bereiche von $1/0$ bis $0^{+1}/2$ resp. $0^{+1}/3$ für die Bilder von Objekten angegeben sind, Bereiche, die “periodisch fortgesetzt”

zu denken sind.

$$\begin{array}{ccc}
 & D_{(3)}^+(\mathcal{A}) & \longleftrightarrow & D_{(2)}^+(\mathcal{A}) \\
 \left(\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & \longrightarrow & Y_{0+1/1} & \\
 & & & \uparrow & & \uparrow \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} & \\
 & & & 0 & \longrightarrow & Y_{2/1} & \xrightarrow{(-y \ 1)} & Y_{0+1/1} \oplus Y_{2/1} \\
 & & & \uparrow & & \uparrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \\
 & & & -y & \uparrow & & & \\
 & & & 0 & \longrightarrow & Y_{1/0} & \xrightarrow{y} & Y_{2/0} & \xrightarrow{-y} & Y_{2/1} \\
 & & & \uparrow & & \uparrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \uparrow & & \\
 & & & Y_{1/2-1} & \xrightarrow{(0 \ 1)} & Y_{1/0} \oplus Y_{1/2-1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}} & Y_{1/0} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & 0 & \longrightarrow & Y_{1/0} & \xrightarrow{y} & Y_{2/0} & \longrightarrow & 0
 \end{array} \right) & \xleftarrow{U} & Y \\
 \\
 X & \xrightarrow{V} & \left(\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & \longrightarrow & X_{1+1/3} & \\
 & & & \uparrow & & \uparrow x & \\
 & & & 0 & \longrightarrow & X_{3/2} \oplus X_{0+1/1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x \\ -x \end{pmatrix}} & X_{0+1/2} \\
 & & & \uparrow & & \uparrow \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} & & \uparrow \\
 & & & X_{2/0} & \xrightarrow{x} & X_{3/1} & \longrightarrow & 0
 \end{array} \right) \\
 \\
 \left(\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & \longrightarrow & Y_{0+1/2} & \\
 & & & \uparrow & & \uparrow y & \\
 & & & 0 & \longrightarrow & Y_{2/1} & \xrightarrow{-y} & Y_{0+1/1} \\
 & & & \uparrow & & \uparrow \begin{pmatrix} -y \\ 1 \end{pmatrix} & & \uparrow -y \\
 & & & 0 & \longrightarrow & Y_{2/0} & \xrightarrow{(1 \ y)} & Y_{2/0} \oplus Y_{2/1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & Y_{2/1} \\
 & & & \uparrow & & \uparrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \uparrow & & \\
 & & & Y_{1/2-1} & \xrightarrow{-y} & Y_{1/0} & \xrightarrow{y} & Y_{2/0} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & 0 & \longrightarrow & Y_{1/0} & \xrightarrow{y} & Y_{2/0} & \longrightarrow & 0
 \end{array} \right) & \xleftarrow{W} & Y
 \end{array}$$

Dann ist

$$\dots \dashv U \dashv V \dashv W \dashv \dots$$

Sei z.B. $M \xrightarrow{\varphi} N$ in \mathcal{A} gegeben. Sei $\text{Conc}(M \xrightarrow{\varphi} N)$ der 3-Komplex mit $M \xrightarrow{\varphi} N$ an Positionen $1/0 \rightarrow 2/0$, und 0 sonst.

Wir bilden einen Pushout

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Inj.} & \longrightarrow & Z \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 M & \xrightarrow{\varphi} & N
 \end{array}$$

So ist Z ein "etwas korrigierter Cokern" von φ .

Sei $\text{Conc}(Z)$ der 2-Komplex mit Z an Position $1/0$ und 0 sonst.

Dann wird

$$(H^k \circ V \circ R_{(3)}F)(\text{Conc}(M \xrightarrow{\varphi} N)) \simeq (H^k \circ R_{(2)}F)(\text{Conc}(Z)) \stackrel{\text{klassisch}}{\text{geschrieben}} (R^k F)Z ;$$

es trägt also $(R_{(3)}F)(\text{Conc}(M \xrightarrow{\varphi} N))$ u.a. diese klassische Information ⁽⁴⁾.

5.5 Ein 3-Komplex für einen Morphismus zwischen 2-Komplexen

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus von 2-Komplexen in $C_{(2)}^+(\mathcal{A})$.

Wir können folgenden 3-Komplex zuordnen.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & \longrightarrow & Y_{0+1/2} \oplus X_{1+1/2} \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & -x \end{pmatrix} \\
 & & & & 0 & \longrightarrow & X_{0+1/1} \xrightarrow{(xf-x)} Y_{0+1/2} \oplus X_{0+1/2} \\
 & & & & \uparrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & & \uparrow \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & & & & 0 & \longrightarrow & Y_{2/1} \xrightarrow{(10)} Y_{2/1} \oplus X_{0+1/1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & 0 \\ f & -x \end{pmatrix}} Y_{0+1/1} \oplus X_{0+1/2} \\
 & & & & \uparrow \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & & \uparrow \begin{pmatrix} y & 0 \\ f & -x \end{pmatrix} \\
 & & & & 0 & \longrightarrow & Y_{1/0} \oplus X_{2/0} \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} Y_{2/0} \oplus X_{2/0} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & -x \end{pmatrix}} Y_{2/0} \oplus X_{2/1} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow
 \end{array}$$

Dieser enthält, in $K_{(2)}^+(\mathcal{A})$ betrachtet, sowohl X als auch Y als auch den Kegel von f in $K_{(2)}^+(\mathcal{A})$.

Sind X und Y (split) azyklisch, dann auch dieser 3-Komplex. Folglich liefert die Konstruktion einen Funktor von $D_{(2)}^+(\mathcal{A}^{\bullet \rightarrow \bullet})$ nach $D_{(3)}^+(\mathcal{A})$, wobei $\mathcal{A}^{\bullet \rightarrow \bullet}$ die Diagrammkategorie auf $\bullet \rightarrow \bullet$ mit Werten in \mathcal{A} bezeichne.

Dank

Für Kommentare und Korrekturen danke ich S. THOMAS und N. STEIN.

⁴Als Anwendung in eine andere Richtung kann man \mathcal{A} durch eine Heller-triangulierte Kategorie \mathcal{C} ersetzen und zusätzlich fordern, daß die ganzen so entstehenden Funktoren U, V, W etc. höhere Triangeln bewahren. Das löst aber wohl noch nicht die Frage, was eine monoidale Struktur \otimes auf \mathcal{C} bezüglich der Heller-Triangulierung erfüllen sollte. Wäre das Tensorprodukt $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}$ Heller-trianguliert, so könnte man Exaktheit von $\otimes : \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ fordern.