G. Nebe, M. Künzer

Algebra I, WS 04/05

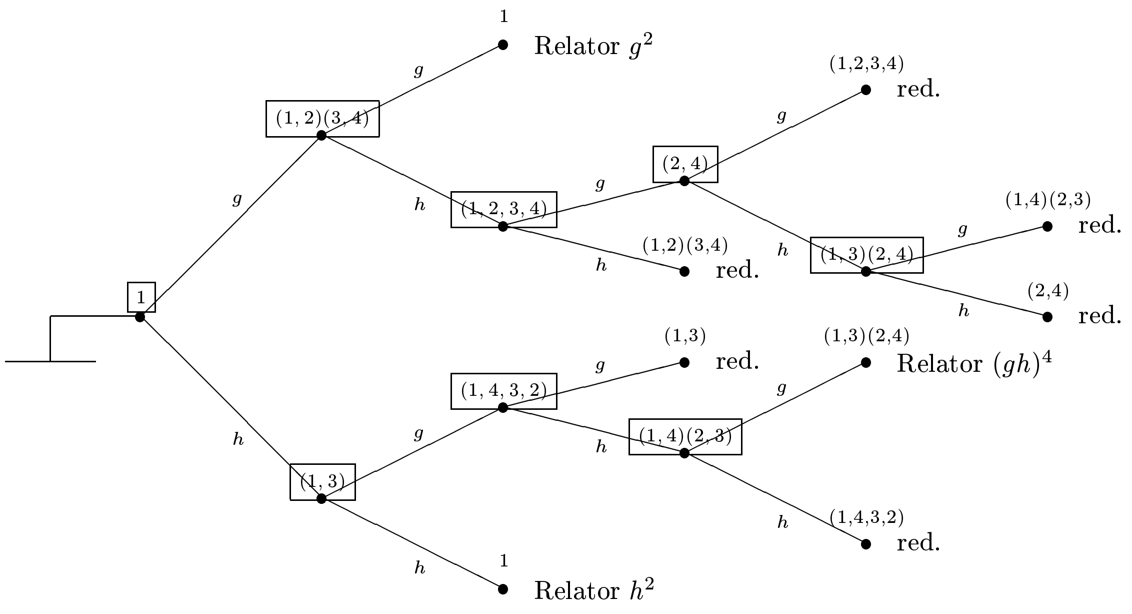
Lösung 6

Aufgabe 25.

Sei zunächst angemerkt, daß $\operatorname{Aut} G$ auf $(\operatorname{Aut} G)x \cup (\operatorname{Aut} G)y$ in der Tat treu operiert, da ein Automorphismus, der x und y festläßt, notwendig die Identität ist. In anderen Worten, es ist $\operatorname{Aut} G \longrightarrow \mathcal{S}_{(\operatorname{Aut} G)x\cup(\operatorname{Aut} G)y}$ injektiv.

Sei ferner angemerkt, daß aus $\tilde{G} \xrightarrow[\sim]{\varphi} G$ folgt, daß $\operatorname{Aut}\tilde{G} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Aut} G$ vermöge $\alpha \longmapsto \varphi\circ\alpha\circ\varphi^{-1}$.

(1) (a) Wir erstellen zur Durchführung des Bahnenalgorithmus für die Operation von $F = \langle g,h\rangle$ auf G folgenden Baum. Redundante *Normalteiler*erzeuger (also z.B. ein Konjugierter eines bereits aufgetretenen Erzeugers) werden mit 'red.' gekennzeichnet.



So war das eigentlich gedacht. Die in Text gefaßten Lösungen zu den Aufgaben 9 und 13 sollten die Prozedur des Erstellens eines solchen Baumes (oder wahlweise eines Graphen) darlegen – was mancherorts zu Mißverständnissen führte.

Es folgt der Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \tilde{G} \;=\; \langle g,h \;:\; g^2, h^2, (gh)^4\rangle & \xrightarrow{\sim} & \langle (1,2)(3,4),\ (1,3)\rangle \;=\; G \\ g & \longmapsto & (1,2)(3,4) \\ h & \longmapsto & (1,3) \end{array}$$

(b) Es ist

$$G/G' \;\simeq\; \tilde{G}/\tilde{G}' \;\simeq\; \langle g,h \;:\; g^2,h^2,(gh)^4,[g,h]\rangle \;\simeq\; \langle g,h \;:\; g^2,h^2,g^4h^4,[g,h]\rangle\,.$$

Damit können wir $\tilde{G}/\tilde{G}'$ auch als Cokern (i.e. als Bildbereich modulo Bild) der $\mathbf{Z}$-linearen Abbildung

$$\mathbf{Z}^3 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}2&0&4\\0&2&4\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}^2$$

schreiben. Die erste Spalte von $\left(\begin{smallmatrix}2&0&4\\0&2&4\end{smallmatrix}\right)$ stammt aus der Relation g^2, die zweite aus der Relation h^2, und die dritte schließlich aus g^4h^4.

Die Elementarteilerform (auch als *Invariantenteilerform* bekannt) der Matrix $\left(\begin{smallmatrix}2&0&4\\0&2&4\end{smallmatrix}\right)$ ist $\left(\begin{smallmatrix}2&0&0\\0&2&0\end{smallmatrix}\right)$. Damit wird

$$G/G' \;\simeq\; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \;\simeq\; C_2\times C_2\,.$$

(c) Berechnen wir die $\operatorname{Aut}\tilde{G}$, was wir nach eingangs gemachter Bemerkung dürfen.

Für einen Automorphismus φ von $\tilde{G}$, i.e. einen Gruppenmorphismus $\tilde{G} \xrightarrow{\varphi} \tilde{G}$, können wir g und h auf jeweils ein Element der Ordnung 2 schicken, d.h. auf je ein Element von $\{g,\, {}^h g, h,\, {}^g h, (gh)^2\}$. Die Relation $(\varphi(g)\varphi(h))^4 = 1$ ist für alle Paare von Bildelementen $(\varphi(g), \varphi(h))$ erfüllt, stellt also keine weitere Einschränkung dar.

Es ist $\tilde{G}$ wie folgt von 2 Elementen der Ordnung 2 erzeugbar.

$$\begin{array}{rcccccccc} \tilde{G} & = & \langle g,h\rangle & = & \langle g,\, {}^g h\rangle & = & \langle {}^h g, h\rangle & = & \langle {}^h g,\, {}^g h\rangle \\ & = & \langle h,g\rangle & = & \langle {}^g h, g\rangle & = & \langle h,\, {}^h g\rangle & = & \langle {}^g h,\, {}^h g\rangle \,. \end{array}$$

Alle anderen Paare von Elementen der Ordnung 2 erzeugen $\tilde{G}$ nicht. Dies überprüft man am einfachsten stattdessen im isomorphen Bild G.

Damit haben wir 4 Möglichkeiten, g abzubilden. Für jede dieser 4 Möglichkeiten gibt es noch 2 Möglichkeiten, h abzubilden. Es ist folglich $|\operatorname{Aut} G| = |\operatorname{Aut}\tilde{G}| = 8$.

Erzeugt wird $\operatorname{Aut}\tilde{G}$ von

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow[\sim]{\alpha} & \tilde{G} \\ g & \longmapsto & g \\ h & \longmapsto & {}^g h \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow[\sim]{\beta} & \tilde{G} \\ g & \longmapsto & h \\ h & \longmapsto & g\,, \end{array}$$

wie wir nun rechtfertigen wollen.

Numeriert man die Vereinigung der Orbits von g und h unter $\operatorname{Aut}\tilde{G}$, i.e. den Orbit von g, in folgender Reihenfolge

1	2	3	4
g	${}^h g$	h	${}^g h$

,

so erhält man den injektiven Gruppenmorphismus

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Aut}\tilde{G} & \hookrightarrow & \mathcal{S}_4 \\ \alpha & \longmapsto & (3,4) \\ \beta & \longmapsto & (1,3)(2,4) \end{array}$$

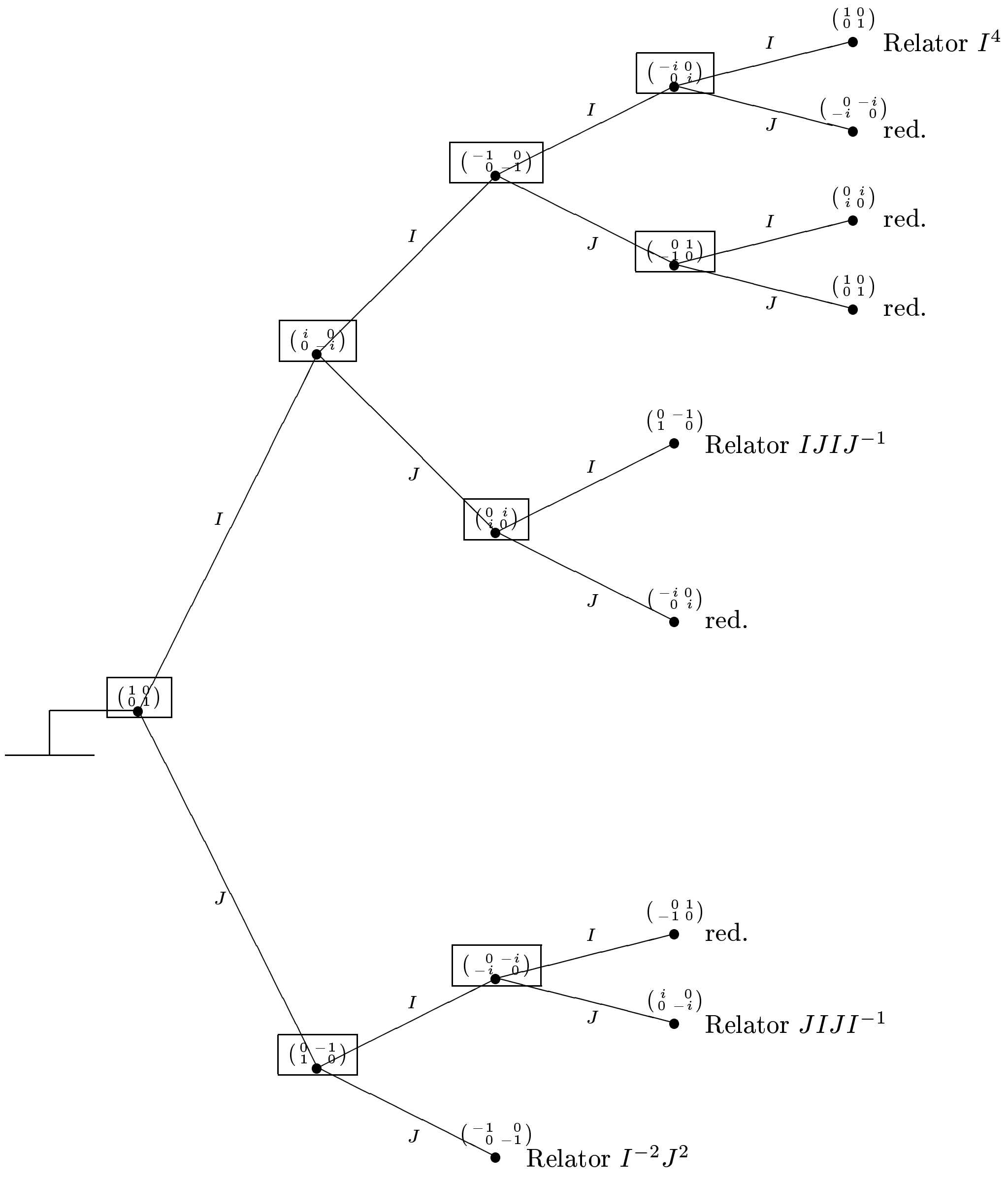
Man prüft nach, daß die Bilder von α und β in der Tat eine Untergruppe von Ordnung 8 in $\mathcal{S}_4$ erzeugen. Damit ist $\operatorname{Aut}\tilde{G} = \langle \alpha, \beta\rangle$ und der Morphismus so vollständig angegeben.

- Die hier gewählten Erzeuger von $G = D_8$ sind etwas unkonventionell. Üblicherweise verwendet man $x' = (1,2,3,4)$ und $y = (1,3)$, womit wir

$$D_8 \simeq \langle a, b : a^4,\ b^2,\ abab\rangle$$

  erhalten, wenn wir $a \longmapsto x'$ und $b \longmapsto y$ schicken.
- Aus der Einbettung in $\mathcal{S}_4$ aus (c) folgt $\operatorname{Aut} D_8 \simeq D_8$.

(2) (a) Wir erstellen zur Durchführung des Bahnenalgorithmus für die Operation von $F = \langle g,h\rangle$ auf G folgenden Baum.



Unter Verwendung von $IJI = J$, $I^4 = 1$ und $I^2 = J^2$ wird

$$JIJI^{-1} \;=\; J\underbrace{IJI}_{=J}I^2 \;=\; J^2I^2 \;=\; 1\,,$$

und somit ist auch der Relator $JIJI^{-1}$ redundant.
Beachte noch, daß modulo diesen Relatoren $J^4 = (J^2)^2 = (I^2)^2 = 1$ ist.
Es folgt der Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \tilde{G} \;=\; \langle I, J \;:\; I^4,\; I^2J^2,\; IJIJ^3\rangle & \xrightarrow{\sim} & \langle \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right),\; \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\rangle \;=\; G \\ I & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) \\ J & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\,. \end{array}$$

(b) Es ist

$$G/G' \;\simeq\; \tilde{G}/\tilde{G}' \;\simeq\; \langle I, J \;:\; I^4, I^2J^2, IJIJ^3, [I,J]\rangle \;\simeq\; \langle I, J \;:\; I^4, I^2J^2, I^2J^4, [I,J]\rangle\,.$$

Damit können wir $\tilde{G}/\tilde{G}'$ auch als Cokern (i.e. als Bildbereich modulo Bild) der $\mathbf{Z}$-linearen Abbildung

$$\mathbf{Z}^3 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}^2$$

schreiben. Die erste Spalte von $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ stammt aus der Relation I^4, die zweite aus der Relation I^2J^2, und die dritte schließlich aus I^2J^4.

Die Elementarteilerform der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 4&2&2\\ 0&2&4 \end{smallmatrix}\right)$ ist $\left(\begin{smallmatrix} 2&0&0\\ 0&2&0 \end{smallmatrix}\right)$. Damit wird

$$G/G' \;\simeq\; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \;\simeq\; C_2 \times C_2\;.$$

(c) Berechnen wir die $\operatorname{Aut}\tilde{G}$, was wir nach eingangs gemachter Bemerkung dürfen.
Ein Automorphismus von $\tilde{G}$ schickt I auf $I' \in \tilde{G}$ und J auf $J' \in \tilde{G}$ derart, daß $I'^4 = 1$, $I'^2 = J'^2$ und ${}^{J'}I' = I^{-1}$. Es sind I' und J' wieder von Ordnung 4.
Die Menge der Elemente der Ordnung 4 in $\tilde{G}$ ist $\{I, J, IJ, I^{-1}, J^{-1}, (IJ)^{-1}\}$.
Für I' haben wir also 6 Möglichkeiten. Für J' haben wir nach erfolgter Wahl von I' noch 4 Möglichkeiten, nämlich allen außer I' und I'^{-1}, um sowohl die Relationen zu erfüllen als auch sicherzustellen, daß $\tilde{G} = \langle I', J'\rangle$.
Es ist folglich $|\operatorname{Aut} G| = |\operatorname{Aut}\tilde{G}| = 24$.
Erzeugt wird $\operatorname{Aut}\tilde{G}$ von

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow[\sim]{\alpha} & \tilde{G} \\ I & \longmapsto & IJ \\ J & \longmapsto & J \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow[\sim]{\beta} & \tilde{G} \\ I & \longmapsto & J \\ J & \longmapsto & I\,, \end{array}$$

wie wir nun rechtfertigen wollen.
Numeriert man die Vereinigung der Orbits von I und J unter $\operatorname{Aut}\tilde{G}$, i.e. den Orbit von I, in folgender Reihenfolge

1	2	3	4	5	6
I	J	IJ	I^{-1}	J^{-1}	$(IJ)^{-1}$

,

so erhält man den injektiven Gruppenmorphismus

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Aut}\tilde{G} & \hookrightarrow & \mathcal{S}_6 \\ \alpha & \longmapsto & (1,3,4,6) \\ \beta & \longmapsto & (1,2)(3,6)(4,5) \end{array}$$

Man prüft nach, daß die Bilder von α und β in der Tat eine Untergruppe von Ordnung 24 in $\mathcal{S}_6$ erzeugen. Damit ist $\operatorname{Aut}\tilde{G} = \langle \alpha, \beta\rangle$ und der Morphismus so vollständig angegeben.

- Mittels 26 (4) sieht man vollends, daß
$$\operatorname{Aut} Q_8 \;\simeq\; \langle (1,3,4,6), (1,2)(3,6)(4,5)\rangle \;\simeq\; \mathcal{S}_4\;,$$
indem man wie in 26 (5) nachrechnet, daß man $(1,2,3,4)$ auf $(1,3,4,6)$ und $(1,2)$ auf $(1,2)(3,6)(4,5)$ schicken darf.
- Eine etwas redundante, aber schön symmetrische Form ergibt sich, wenn man zusätzlich $K = IJ$ einführt. Man erhält
$$Q_8 \;\simeq\; \langle I, J, K \;:\; I^4,\; J^4,\; K^4,\; IJK^{-1},\; JKI^{-1},\; KIJ^{-1}\rangle\;.$$

(3) (a) Der Bahnenalgorithmus kann hier umgangen werden, indem man ad hoc behauptet, daß

$$\begin{array}{rcl} \tilde{G} \;:=\; \langle g, h \;:\; g^4, h^4, [g,h]\rangle & \xrightarrow{\sim} & \langle (1,2,3,4), (5,6,7,8)\rangle \;=\; G \\ g & \longmapsto & (1,2,3,4) \\ h & \longmapsto & (5,6,7,8)\,, \end{array}$$

und dies im Nachhinein rechtfertigt.
Dieser Gruppenmorphismus ist wohldefiniert, wie wir durch Nachrechnen der Relationen auf den Bildern erkennen: $x^4 = 1$, $y^4 = 1$ und $[x, y] = 1$.
Er ist auch surjektiv, da die Bilder x und y der Erzeuger g und h der linken Seite die rechte Seite erzeugen.
Wir halten fest, daß $|G| = 16$.
Da nun auf der linken Seite $gh = hg$ sowie $g^4 = 1$ und $h^4 = 1$ gelten, kann dort jedes Element in der Form $g^i h^j$ mit $i,\, j \in [0, 3]$ geschrieben werden. Damit enthält die linke Seite *höchstens* 16 Elemente.
Somit ist der angegebene Morphismus auch injektiv, und somit ein Isomorphismus. Insbesondere enthält die linke Seite *genau* 16 Elemente.
Eine solche ad-hoc-Methode ist immer dann anwendbar, wenn man in der Lage ist, Relatoren in G zu sehen (wie hier x^4, y^4, $[x, y]$), aus welchen $|\tilde{G}| \le |G|$ folgt.
Es ist hier natürlich $G \simeq C_4 \times C_4$.

(b) Es ist G abelsch, mithin $G' = 1$ und $G/G' \simeq G \simeq C_4 \times C_4$.

(c) Ein Endomorphismus von $\tilde{G}$, i.e. ein Gruppenmorphismus $\tilde{G} \longrightarrow \tilde{G}$, ist gegeben durch die Angabe von zwei Elementen g' und h' in $\tilde{G}$, für die dieselben Relationen gelten wie für g und h, i.e. für die $g'^4 = 1$, $h'^4 = 1$ und $[g', h'] = 1$. Dies definiert dann den Endomorphismus $g \longmapsto g'$, $h \longmapsto h'$.

Nun können wir dafür g' und h' völlig beliebig aus $\tilde{G}$ wählen. Ist $g' = g^a h^c$, $h' = g^b h^d$, so schreiben wir diesen Endomorphismus in Matrixform $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^{2\times 2}$.

Die Komposition von zwei Endomorphismen ist gegeben durch die Matrixmultiplikation. In der Tat bildet die Komposition von $\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ verkettet mit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ die Elemente wie folgt ab.

$$\begin{array}{ccccccc} g & \longmapsto & g^a h^c & \longmapsto & (g^{a'} h^{c'})^a (g^{b'} h^{d'})^c & = & g^{a'a+b'c} h^{c'a+d'c} \\ h & \longmapsto & g^b h^d & \longmapsto & (g^{a'} h^{c'})^b (g^{b'} h^{d'})^d & = & g^{a'b+b'd} h^{c'b+d'd} \end{array}$$

Das Resultat ist also dasselbe, wie bei Matrixmultiplikation und nachfolgender Ausführung des Produktes als Endomorphismus.

Nun ist ein Automorphismus ein invertierbarer Endomorphismus. Es folgt $\operatorname{Aut} G \simeq \operatorname{Aut} \tilde{G} \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$. Mit dem Elementarteilersatz sieht man, daß

$$\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \;=\; \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle\,.$$

Wie in Aufgabe 23 sieht man, daß $|\operatorname{Aut} G| = |\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})| = 2^4 \cdot (2^2-1)(2^2-2) = 2^5 3^1 = 96$.

Numeriert man die Vereinigung der Orbits von g und h unter $\operatorname{Aut} \tilde{G}$, i.e. den Orbit von g, in folgender Reihenfolge

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
g^0h^1	g^0h^3	g^1h^0	g^1h^1	g^1h^2	g^1h^3	g^2h^1	g^2h^3	g^3h^0	g^3h^1	g^3h^2	g^3h^3

,

so erhält man den injektiven Gruppenmorphismus

$$\begin{array}{ccl} \operatorname{Aut} \tilde{G} & \hookrightarrow & \mathcal{S}_{12} \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) & \longmapsto & (3,4,5,6)(7,8)(9,12,11,10) \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) & \longmapsto & (1,4,7,10)(2,12,8,6)(5,11) \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) & \longmapsto & (1,2)(4,6)(7,8)(10,12) \end{array}$$

Aufgabe 26.

(1) Da die Relatoren für die Erzeuger von $\tilde{\mathcal{S}}_{n-1}$ eine Teilmenge der Relatoren für $\tilde{\mathcal{S}}_n$ ist, verschwinden die Relatoren unter dem Gruppenmorphismus $\mathrm{Fr}(s_1, \ldots, s_{n-1}) = \langle s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle \longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}_n$, $s_i \longmapsto s_i$. Damit wird ein Gruppenmorphismus $\tilde{\mathcal{S}}_{n-1} \xrightarrow{\varphi} \tilde{\mathcal{S}}_n$ wie angegeben induziert.

Wir wissen an dieser Stelle noch nicht, daß $\tilde{\mathcal{S}}_{n-1} \xrightarrow{\varphi} \tilde{\mathcal{S}}_n$ injektiv ist. Dies kann man aber als Konsequenz von (4) zeigen.

(2) Sei x ein beliebiges Element von $\tilde{\mathcal{S}}_n$. Wir wollen

$$x \in U \;\cup \bigcup_{t \in [1,n-1]} s_t s_{t+1} \cdots s_{n-1} U$$

zeigen. Sei hierzu

$$I \;:=\; \{f : [1, k_f] \longrightarrow [1, n-1] \;:\; k_f \geq 1,\ f(j) \neq f(j+1) \text{ für } j \in [1, k_f - 1]\}\,,$$

und ferner

$$I_x \;:=\; \{f \in I \;:\; s_{f(1)} s_{f(2)} \cdots s_{f(k_f)} = x\}\,.$$

Gibt es ein $f \in I_x$ mit $f(j) \neq n-1$ für alle $j \in [1, k_f]$, so ist $x \in U$, und wir sind fertig.

Wir können also annehmen, es gibt für alle $f \in I_x$ ein $j \in [1, k_f]$ mit $f(j) = n-1$.

Sei die *Leitposition* l_f von $f \in I_x$ das maximale Element $j \in [1, k_f]$ mit $f(j) = n-1$. Also $f(l_f) = n-1$, und $f(j) \neq n-1$ für $j \in [l_f + 1, k_f]$.

Sei nun eine Abbildung $f \in I_x$ mit minimaler Leitposition gewählt.

Sei nun angenommen, es gebe ein $j \in [1, l_f - 1]$ mit $f(j) + 1 \neq f(j+1)$. Wähle j damit maximal.
Falls $f(j) \leq f(j+1) - 2$, so ist

$$x = (s_{f(1)} \cdots s_{f(j-1)}) s_{f(j)} (s_{f(j+1)} \cdots s_{f(l_f)}) \cdots = (s_{f(1)} \cdots s_{f(j-1)}) (s_{f(j+1)} \cdots s_{f(l_f)}) s_{f(j)} \cdots$$

im Widerspruch zur minimalen Leitposition von f.
Falls $f(j) \geq f(j+1) + 1$, so ist wegen der Maximalität von j

$$\begin{array}{rcl} x & = & (s_{f(1)} \cdots s_{f(j-1)}) s_{f(j)} (s_{f(j+1)} s_{f(j+2)} \cdots s_{f(l_f)}) \cdots \\ & = & (s_{f(1)} \cdots s_{f(j-1)}) s_{f(j)} (s_{n-l_f+j} s_{n-l_f+j+1} \cdots s_{n-1}) \cdots \\ & = & (s_{f(1)} \cdots s_{f(j-1)}) (s_{n-l_f+j} \cdots s_{f(j)} s_{f(j)-1} s_{f(j)} s_{f(j)+1} \cdots s_{n-1}) \cdots \\ & = & (s_{f(1)} \cdots s_{f(j-1)}) (s_{n-l_f+j} \cdots s_{f(j)-1} s_{f(j)} s_{f(j)-1} s_{f(j)+1} \cdots s_{n-1}) \cdots \\ & = & (s_{f(1)} \cdots s_{f(j-1)}) (s_{n-l_f+j} \cdots s_{f(j)-1} s_{f(j)} s_{f(j)+1} \cdots s_{n-1}) s_{f(j)-1} \cdots \ , \end{array}$$

im Widerspruch zur minimalen Leitposition von f.
In beiden Fällen erhalten wir einen Widerspruch, und also ist $f(j) + 1 = f(j+1)$ für alle $j \in [1, l_f - 1]$. Damit ist

$$x = (s_{f(1)} \cdots s_{f(l_f)}) (s_{f(l_f+1)} \cdots s_{f(k_f)}) = (s_{n-l_f} s_{n-l_f+1} \cdots s_{n-1}) \underbrace{s_{f(l_f+1)} \cdots s_{f(k_f)}}_{\in U} ,$$

wie gewünscht.

(3) Wir führen eine Induktion nach n. Der Induktionsanfang ist durch die Gruppe $\tilde{\mathcal{S}}_2 = \langle s_1 \ : \ s_1^2 \rangle \simeq C_2$ von Ordnung 2 gesichert.
Nach Induktionsvoraussetzung können wir $|\tilde{\mathcal{S}}_{n-1}| \leq (n-1)!$ annehmen. Als Bild von $\tilde{\mathcal{S}}_{n-1}$ unter φ ist damit auch $|U| \leq |\tilde{\mathcal{S}}_{n-1}| \leq (n-1)!$. Mit (3) ist $[\tilde{\mathcal{S}}_n : U] \leq n$. Somit können wir auf

$$|\tilde{\mathcal{S}}_n| \ \leq \ n \cdot |U| \ \leq \ n \cdot (n-1)! \ = \ n!$$

schließen.

(4) Es liegt ein Gruppenmorphismus vor, da $(i, i+1)^2 = 1$ stets, da $[(i, i+1), (j, j+1)] = 1$ für $|i - j| \geq 2$, und da stets

$$(i, i+1)(i+1, i+2)(i, i+1) \ = \ (i, i+2) \ = \ (i+1, i+2)(i, i+1)(i+1, i+2) \ .$$

Mittels Konjugation sieht man zunächst, daß sämtliche Transpositionen in $\langle (1,2), (2,3), \ldots, (n-1, n) \rangle$ liegen. Also ist $\langle (1,2), (2,3), \ldots, (n-1, n) \rangle = \mathcal{S}_n$, und der angegebene Morphismus mithin surjektiv.
Da nun $|\tilde{\mathcal{S}}_n| \leq |\mathcal{S}_n|$ mit (3), folgt auch seine Bijektivität. In anderen Worten, es liegt ein Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{S}}_n & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{S}_n \\ s_i & \longmapsto & (i, i+1) \end{array}$$

vor.

(5) Wir konstruieren den gewünschten Automorphismus als Isomorphismus $\tilde{\mathcal{S}}_n \longrightarrow \mathcal{S}_n$ mittels einer Komposition mit dem Isomorphismus aus (4), welchen wir etwas mißbräuchlich als Identifikation verwenden. Beachte, daß $\alpha((2,3)) = \alpha(\,^{(1,2,3,4,5,6)}(1,2)) = \,^{\alpha((1,2,3,4,5,6))}\alpha((1,2)) = (2,3)(1,5)(4,6)$ sein sollte, etc. Wir erhalten so, daß notwendigerweise folgende Bilder auftreten müssen.

$$\begin{array}{rcl} \alpha(s_1) & = & (1,2)(3,4)(5,6) \\ \alpha(s_2) & = & (2,3)(1,5)(4,6) \\ \alpha(s_3) & = & (1,3)(2,4)(5,6) \\ \alpha(s_4) & = & (1,2)(3,5)(4,6) \\ \alpha(s_5) & = & (2,3)(1,4)(5,6) \end{array}$$

Nachrechnen der Relationen zeigt, daß dies möglich ist. In der Tat ist $\alpha(s_i)^2 = 1$ stets, $[\alpha(s_i), \alpha(s_j)] = 1$ falls $|i - j| \geq 2$, sowie

$$\begin{array}{rcccl} ^{\alpha(s_1)}\alpha(s_2) & = & (1,4)(2,6)(3,5) & = & ^{\alpha(s_2)}\alpha(s_1) \\ ^{\alpha(s_2)}\alpha(s_3) & = & (1,4)(2,5)(3,6) & = & ^{\alpha(s_3)}\alpha(s_2) \\ ^{\alpha(s_3)}\alpha(s_4) & = & (1,6)(2,5)(3,4) & = & ^{\alpha(s_4)}\alpha(s_3) \\ ^{\alpha(s_4)}\alpha(s_5) & = & (1,5)(2,6)(3,4) & = & ^{\alpha(s_5)}\alpha(s_4) \end{array}$$

Mit 19 (5) enthält $\mathcal{S}_6$ mit Aufgabe 19 (5) nur die Normalteiler 1, $\mathcal{A}_6$ und $\mathcal{S}_6$. In der Tat, ist $N \trianglelefteq \mathcal{S}_6$, so ist $N \cap \mathcal{A}_6 \trianglelefteq \mathcal{A}_6$, und somit $N = \mathcal{A}_6$ oder $N \cap \mathcal{A}_6 = 1$. Letzterenfalls ist $N = 1$ oder $N \simeq C_2$. Schließen wir noch $N \simeq C_2$ aus. Das Element $z \in N \smallsetminus \{1\}$ wäre dann in $\mathrm{Z}(\mathcal{S}_6)$, was mit der Lösung zu Aufgabe 6 nicht geht.

Nun enthält das Bild von α die drei verschiedenen Elemente 1, $(1,2)(3,4)(5,6)$ und $(1,2,3)(4,5)$, folgt mit dem Homomorphiesatz, daß $\operatorname{Kern}\alpha = 1$ gelten muß, und α damit ein Automorphismus ist.

Da α von der Konjugiertenklasse von $(1,2)$ in eine andere abbildet, ist $\alpha \notin \operatorname{Inn}\mathcal{S}_6$.

(6) Wir bestimmen hierzu die Elementarteiler der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2&0&0&0&3&0&0 \\ 0&2&0&0&3&3&0 \\ 0&0&2&0&0&3&3 \\ 0&0&0&2&0&0&3 \end{pmatrix}$$

deren Zeilen den Erzeugern $s_1, \ldots, s_{n-1}$ entsprechen, und deren Spalten den angeführten Relatoren. Beachte, daß die in den Relationen angeführten Kommutatoren unterschlagen werden dürfen, da sie Nullspalten lieferten.

Die Elementarteilerform ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&2&0&0&0 \end{pmatrix} .$$

Somit ist $\mathcal{S}_5/\mathcal{S}_5' \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \simeq C_2$.

Das hätte man auch wie folgt sehen können. Die Kommutatoruntergruppe von $\mathcal{S}_5$ ist wegen der Signumabbildung auf $\{-1,+1\}$ enthalten in $\mathcal{A}_5$, und darin a fortiori normal. Nun enthält $\mathcal{A}_5$ nach Vorlesung oder nach 19 (7) keine nichttrivialen Normalteiler. Die Kommutatoruntergruppe kann aber nicht gleich 1 sein, da $\mathcal{S}_5$ nicht abelsch ist. Es folgt $\mathcal{S}_5' = \mathcal{A}_5$, und somit $\mathcal{S}_5/\mathcal{S}_5' \simeq C_2$.