G. Nebe, M. Künzer

Algebra I, WS 04/05

Lösung 5

Aufgabe 20.

(1) Wir haben einen Normalteiler $C_3 = \langle(1,2,3)\rangle$. Es ist mit $C_2 := \langle(1,2)\rangle$ der Schnitt $C_3 \cap C_2 = 1$, und folglich aus Ordnungsgründen $\mathcal{S}_3 = C_3C_2$. Wir erhalten $\mathcal{S}_3 \simeq C_3 \rtimes C_2$.

(2) Schreibe $I := \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$, $J := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $K := IJ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Wir beobachten zunächst, daß

$$I^4 = J^4 = K^4 = 1\,, \qquad IJ = K\,,\ \ JK = I\,,\ \ KI = J, \qquad \text{und daher } \ I^2 = J^2 = K^2\,.$$

Element der Ordnung 2 gibt es nur I^2, Elemente der Ordnung 4 gibt es I, I^3, J, J^3, K, K^3.

Es ist $\mathrm{Z}(Q_8) = \langle I^2\rangle \trianglelefteq Q_8$. Dies ist die einzige Untergruppe von Ordnung 2. Angenommen, es gäbe ein Komplement U zu $\mathrm{Z}(Q_8)$, d.h. $|U| = 4$ und $U \cap \mathrm{Z}(Q_8) = 1$. Sei $u \in U \smallsetminus \{1\}$. Dann ist, gemäß obiger Auflistung der Elemente in Q_8, das Element u von Ordnung 4, und $u^2 \in \mathrm{Z}(Q_8)$. Also $1 \neq u^2 \in \mathrm{Z}(Q_8) \cap U$, und das ist ein Widerspruch.

Es enthält Q_8 noch 3 Normalteiler von Ordnung 4, nämlich $\langle I\rangle$, $\langle J\rangle$ und $\langle K\rangle$. Weitere Untergruppen der Ordnung 4 gibt es keine, da auch jedes Element außerhalb $\mathrm{Z}(Q_8)$ zusammen mit $\mathrm{Z}(Q_8)$ eine dieser Untergruppen erzeugt.

Nun ist aber die einzige Untergruppe von Ordnung 2 in jedem dieser Normalteiler von Ordnung 4 enthalten. Damit hat auch keiner dieser Normalteiler ein Komplement.

So kommen wir zu dem Schluß, daß sich Q_8 nur trivial als semidirektes Produkt schreiben läßt.

(3) Wir verfügen über die nichttrivialen Normalteiler $V_4 = \langle(1,2)(3,4),(1,3)(2,4)\rangle$ und $\mathcal{A}_4$.

Wir wollen kurz begründen, daß es keine weiteren Normalteiler gibt.

Ein Normalteiler von Ordnung 3, 6 oder 12 muß einen Dreierzykel enthalten, und mit dem Beweis zu 19 (1) also $\mathcal{A}_4$ enthalten.

Sei angenommen, es gäbe einen Normalteiler $N \trianglelefteq \mathcal{S}_4$ von Ordnung 2, 4 oder 8 mit $N \neq V_4$. Es enthält N ein Element von Ordnung 2. Falls N ein Element aus ${}^{\mathcal{S}_4}(1,2)$ enthält, so enthält N via Konjugation in $\mathcal{S}_4$ alle Transpositionen, und ist somit gleich $\mathcal{S}_4$, Widerspruch. Also enthält N ein Element, und damit alle 3 Elemente aus ${}^{\mathcal{S}_4}(1,2)(3,4)$. Dies beläßt uns nur noch die Möglichkeit $|N| = 8$. Da es in $\mathcal{S}_4$ keine weiteren Elemente der Ordnung 2 gibt, enthält N noch ein Element der Ordnung 4, und damit ganz ${}^{\mathcal{S}_4}(1,2,3,4)$. Zusammen haben wir nun schon $1+3+6 = 10$ Elemente in N gefunden, Widerspruch.

Also gibt es nur die angeführten Normalteiler.

Es hat V_4 das Komplement $\mathcal{S}_3 := \langle(1,2,3),(1,2)\rangle$. In der Tat ist $V_4 \cap \mathcal{S}_3 = 1$, da jedes Element von $V_4 \smallsetminus \{1\}$ nicht im Stabilisator der 4 liegt. Also ist $\mathcal{S}_4 \simeq V_4 \rtimes \mathcal{S}_3$.

Es hat $\mathcal{A}_4$ das Komplement $C_2 := \langle(1,2)\rangle$, da $(1,2) \notin \mathcal{A}_4$. Also ist auch $\mathcal{S}_4 \simeq \mathcal{A}_4 \rtimes C_2$.

Aufgabe 21.

Wir schreiben kurz $q := p^a$.

(1) Es ist $|K^n \rtimes \mathrm{GL}_n(K)| = |K^n| \cdot |\mathrm{GL}_n(K)| = q^n \cdot \prod_{r\in[0,n-1]}(q^n - q^r)$.

Da K^n eine p-Gruppe ist, finden wir eine p-Sylowgruppe von $\mathrm{Aff}_n(K)$ als $K^n \rtimes P$, wobei P eine p-Sylowgruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$ ist. Denn dies ist zum einen in der Tat eine Untergruppe, da auch P auf K^n operiert, und sie hat auch die Ordnung einer p-Sylowgruppe, nämlich $q^n \cdot q^{n(n-1)/2} = q^{n(n+1)/2}$. Beachte hierbei, daß p den Faktor $q^{n-r} - 1$ nicht teilt für $r \in [0, n-1]$.

Nun hat die Untergruppe der unimodularen oberen Dreiecksmatrizen

$$P \ := \ \{(a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(K) \ : \ a_{i,j} = 0 \text{ für } i > j;\ a_{i,i} = 1 \text{ stets};\ a_{i,j} \text{ beliebig für } i < j\} \ \leq \ \mathrm{GL}_n(K)$$

in der Tat die gewünschte Ordnung $q^{n(n-1)/2}$.

(2) Es ist $\mathbf{F}_2 \rtimes \mathbf{F}_2^* \simeq C_2$ abelsch. Nehmen wir diesen Fall einmal aus, d.h. nehmen wir $|K| \geq 3$ oder $n \geq 2$ an.

Sei $(v, S) \in \mathrm{Z}(\mathrm{Aff}_n(K))$, $v \in K^n$, $S \in \mathrm{GL}_n(K)$. Dann muß für ein beliebiges Element $(w, T) \in \mathrm{Aff}_n(K)$, $w \in K^n$, $T \in \mathrm{GL}_n(K)$, gelten, daß

$$(v, S)(w, T) \;=\; (v + Sw, ST)$$

mit

$$(w, T)(v, S) \;=\; (w + Tv, TS)$$

übereinstimmt.

Angenommen, es sei $v \neq 0$. Wähle $w = 0$ und T so, daß $Tv \neq v$. Ist $|K| \geq 3$, so können wir für T eine skalare Matrix mit einem Skalar ungleich 1 wählen. Ist $n \geq 2$, so können wir v zu einer Basis (v, v') ergänzen, und $Tv = v'$ verlangen. Es folgt in jedem Falle, daß $(v, S)(0, T) \neq (0, T)(v, S)$, Widerspruch. Also ist $v = 0$.

Angenommen, es sei $S \neq E$. Wähle $T = E$ und für $w \in K^n$ einen Standardbasisvektor so, daß $Sw \neq w$. Es folgt $(0, S)(w, E) \neq (w, E)(0, S)$, Widerspruch.

Somit ist $\mathrm{Z}(\mathrm{Aff}_n(L)) = \{(0, E)\}$ gezeigt.

(3) Wegen des Morphismus $\mathrm{Aff}_n(K) \longrightarrow K^*$, $(v, S) \longmapsto \det S$ in die abelsche Gruppe $K^* = (K \smallsetminus \{0\}, \cdot)$ mit Kern $K^n \rtimes \mathrm{SL}_n(K)$ ist

$$\mathrm{Aff}_n(K)' \;\subseteq\; K^n \rtimes \mathrm{SL}_n(K)\,.$$

Wir wollen zeigen, daß die Gleichheit gilt.

Berechnen wir zunächst einen allgemeinen Erzeuger. Seien (v, S), $(w, T) \in \mathrm{Aff}_n(K)$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} [(v,S),(w,T)] & = & (v,S)^{-1}(w,T)^{-1}(v,S)(w,T) \\ & = & (-S^{-1}v, S^{-1})(-T^{-1}w, T^{-1})(v,S)(w,T) \\ & = & (-S^{-1}v - S^{-1}T^{-1}w + S^{-1}T^{-1}v + S^{-1}T^{-1}Sw, S^{-1}T^{-1}ST)\,. \end{array}$$

Insbesondere wird für $\lambda \in K^*$

$$[(0, S), (w, \lambda^{-1}E)] \;=\; (\lambda(E - S^{-1})w, E)\,.$$

Wir bezeichnen mit $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis von K^n. Sei für $j,\, k \in [1, n]$, $j \neq k$, und $\lambda \in K$ mit $E_{j,k}(\lambda) \in \mathrm{GL}_n(K)$ die Matrix bezeichnet, die an Position (i, i) eine 1 stehen hat für $i \in [1, n]$, die an Position (j, k) den Eintrag λ stehen hat, und deren Einträge ansonsten verschwinden.

Wir erhalten für $j \geq 2$ und $\lambda \in K^*$

$$[(0, E_{j,1}(1)), (e_1, \lambda^{-1}E)] \;=\; (\lambda(E - E_{j,1}(-1))e_1, E) \;=\; (\lambda e_j, E) \in \mathrm{Aff}_n(K)'\,.$$

Nun machen wir Gebrauch von $n \geq 2$ und erhalten für $\lambda \in K^*$ ganz ähnlich

$$[(0, E_{1,2}(1)), (e_2, \lambda^{-1}E)] \;=\; (\lambda(E - E_{1,2}(-1))e_2, E) \;=\; (\lambda e_1, E) \in \mathrm{Aff}_n(K)'\,.$$

Da mit (x, E) und (y, E) auch $(x, E)(y, E) = (x + y, E) \in \mathrm{Aff}_n(K)$, folgt $K^n \rtimes \{E\} \leq \mathrm{Aff}_n(K)'$.

Sei allgemein $G \xrightarrow{f} H$ ein surjektiver Morphismus von Gruppen, und sei $N \leq G'$ bekannt. Da $f(G') = H'$ (cf. 24 (2)), ist $G' = f^{-1}(H')$. In der Tat, ist $g \in f^{-1}(H')$, so gibt es ein $g' \in G'$ mit $f(g) = f(g')$, woraus $g \in g'N \subseteq G'$ folgt.

Wenden wir diese Tatsache an auf $(G \xrightarrow{f} H) = \big(\mathrm{Aff}_n(K) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K), (v, S) \longmapsto S\big)$, so sehen wir, daß es für die eingangs erhobene Behauptung nunmehr zu zeigen genügt, daß $\mathrm{GL}_n(K)' = \mathrm{SL}_n(K)$, wobei die Inklusion $\subseteq$ bereits bekannt ist.

Mit dem Gaußschen Algorithmus sehen wir, daß

$$\mathrm{SL}_n(K) \;=\; \langle E_{j,k}(\lambda) \;:\; \lambda \in K,\ j,\, k \,\in\, [1, n],\ j \neq k \rangle\,.$$

In der Tat können wir mittels $T_{j,k} := E_{j,k}(1)E_{k,j}(-1)E_{j,k}(1)$ die Zeilen j und k mit Einfügung eines Vorzeichens auch vertauschen, und mittels $T_{j,k}E_{k,j}(\lambda^{-1})E_{j,k}(-\lambda)E_{k,j}(\lambda^{-1})$ für $\lambda \in K^*$ die dann aus Gaußtransformationen resultierende Diagonalmatrix in $\mathrm{SL}_n(K)$ vollends zur Einheitsmatrix E machen.

Wir haben also zu zeigen, daß für gegebene $j,\, k \in [1, n]$ mit $j \neq k$ und gegebenes $\lambda \in K^*$ die Matrix $E_{j,k}(\lambda)$ in $\mathrm{Aff}_n(K)'$ liegt. **Dazu machen wir nun Gebrauch von** $n \geq 3$ und wählen uns ein $l \in [1, n] \smallsetminus \{j, k\}$. Es wird

$$[E_{l,k}(\lambda), E_{j,l}(-1)] \;=\; E_{l,k}(-\lambda)E_{j,l}(1)E_{l,k}(\lambda)E_{j,l}(-1) \;=\; E_{j,k}(\lambda)\,.$$

Aufgabe 22.

(1) Sei G eine Gruppe von Ordnung p^2. Gibt es ein Element der Ordnung p^2 in G, so ist $G \simeq C_{p^2}$.

Wir betrachten daher nun den Fall, daß alle Elemente von $G \smallsetminus \{1\}$ die Ordnung p haben.

Sei $a \in G \smallsetminus \{1\}$. Es ist mit 18 (2) die Untergruppe $\langle a \rangle$ normal in G. Sei $b \in G \smallsetminus \langle a \rangle$. Dann ist $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$, da die Möglichkeit $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = p$ entfällt. Da auch $\langle b \rangle$ normal in G ist, ist $G \simeq \langle a \rangle \times \langle b \rangle \simeq C_p \times C_p$.

Somit ist eine Gruppe von Ordnung p^2 stets isomorph zu C_{p^2} oder zu $C_p \times C_p$. Diese Gruppen sind nicht isomorph, da erstere ein Element der Ordnung p^2 enthält, nicht aber letztere.

(2) Sei $C_3 = \langle a \rangle$ eine 3-Sylowgruppe von G.

Fall $C_3 \trianglelefteq G$. Sei P eine 2-Sylowgruppe von G. Da $C_3 \cap P = 1$, ist P ein Komplement zu C_3.

Unterfall $P = \langle b \rangle \simeq C_4$. Es ist $G \simeq C_3 \rtimes C_4$. Da $\operatorname{Aut} C_3 \simeq C_2 = \langle \varphi \rangle$, gibt es hierfür zwei Möglichkeiten. Das von $b \longmapsto \varphi^0$ induzierte direkte Produkt, $G_1 := C_3 \times C_4$, und das von $b \longmapsto \varphi$ induzierte semidirekte Produkt $G_2 := C_3 \rtimes C_4$. Es sind G_1 und G_2 nicht isomorph, da G_1 abelsch ist, und G_2 nicht.

Unterfall $P = \langle b, c \rangle \simeq C_2 \times C_2$. Es ist $G \simeq C_3 \rtimes (C_2 \times C_2)$. Da $\operatorname{Aut} C_3 \simeq C_2 = \langle \varphi \rangle$, gibt es hierfür a priori vier Möglichkeiten. Zum einen gibt es das von $b \longmapsto \varphi^0$ und $c \longmapsto \varphi^0$ induzierte direkte Produkt $G_3 := C_3 \times C_2 \times C_2$.

Lemma. *Seien N und H Gruppen, sei $H \xrightarrow{\psi} \operatorname{Aut} N$ ein Morphismus, und sei $\chi \in \operatorname{Aut} H$. Dann gibt es einen Isomorphismus $N \rtimes_\psi H \xrightarrow{\sim} N \rtimes_{\psi \circ \chi} H$, $(n, h) \longmapsto (n, \chi^{-1}(h))$.*

Betrachte den Morphismus $C_2 \times C_2 \longrightarrow \operatorname{Aut} C_3$, $b \longmapsto \varphi^1$, $c \longmapsto \varphi^0$. Dieser liefert zunächst das semidirekte Produkt $G_4 := C_3 \rtimes (C_2 \times C_2)$. Es sind G_3 und G_4 nicht isomorph, da G_3 abelsch ist, G_4 aber nicht.

Nun liefert Komposition mit dem Automorphismus $b \longmapsto b$, $c \longmapsto bc$ den Morphismus $b \longmapsto \varphi^1$ und $c \longmapsto \varphi^1$. Das resultierende semidirekte Produkt ist mit dem angeführten Lemma isomorph zu G_4.

Schließlich liefert Komposition mit dem Automorphismus $b \longmapsto c$, $c \longmapsto b$ den Morphismus $b \longmapsto \varphi^0$ und $c \longmapsto \varphi^1$. Das resultierende semidirekte Produkt ist mit dem angeführten Lemma isomorph zu G_4.

Damit sind alle Morphismen von $C_2 \times C_2$ nach $\operatorname{Aut} C_3$ abgehandelt.

Fall $C_3 \ntrianglelefteq G$. Mit Sylow wissen wir, daß $|\operatorname{Syl}_3(G)| = 4$, und erhalten so einen Morphismus $G \longrightarrow \mathcal{S}_4$. Der Normalisator von C_3 in G ist nicht größer als C_3, da eine transitive G-Menge von Länge $4 = |G|/|\operatorname{N}_G(C_3)|$ vorliegt. Damit ist der Kern des Morphismus $G \longrightarrow \mathcal{S}_4$ in C_3 enthalten. Wäre dieser Kern gleich C_3, so wäre C_3 normal in G, im Widerspruch zuf Fallvoraussetzung. Also ist $G \hookrightarrow \mathcal{S}_4$ injektiv. Das Bild dieses Morphismus ist von Ordnung 12, also ein Normalteiler in $\mathcal{S}_4$ nach 18 (2), und damit isomorph zu $G_5 := \mathcal{A}_4$, vgl. Lösung zu 20 (3).

In verschiedenen Fällen oder Unterfällen erhaltene Gruppen sind wegen der jeweiligen Fallvoraussetzung nicht zueinander isomorph. Damit gibt es bis auf Isomorphie gerade die Gruppen $G_1 = C_3 \times C_4$, $G_2 = C_3 \rtimes C_4$, $G_3 = C_3 \times C_2 \times C_2$, $G_4 = C_3 \rtimes (C_2 \times C_2)$ und $G_5 \simeq \mathcal{A}_4$ der Ordnung 12.

Aufgabe 23.

(1) Wir betrachten die Reduktionsabbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/16\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2) \\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \end{array},$$

wobei die Einträge links als Repräsentanten modulo 16, und rechts als Repräsentanten modulo 2 zu lesen sind.

Da ein Element in $\mathbf{Z}/16\mathbf{Z}$ invertierbar ist genau dann, wenn seine Reduktion in $\mathbf{F}_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ invertierbar ist, ist diese Abbildung wohldefiniert (i.e. das jeweilige Bild ist in der Tat in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$), und surjektiv.

Der Kern berechnet sich zu

$$N \;=\; \operatorname{Kern} \rho \;=\; \{ \left(\begin{smallmatrix} 1+2a & 2b \\ 2c & 1+2d \end{smallmatrix}\right) \in (\mathbf{Z}/16\mathbf{Z})^{2\times 2} \;:\; a,\, b,\, c,\, d \,\in\, \mathbf{Z}/8\mathbf{Z} \} ,$$

insbesondere enthält er 8^4 Elemente.

(2) Mit dem Homomorphiesatz ergibt sich

$$\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2) \;\simeq\; \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/16\mathbf{Z})/N ,$$

und folglich

$$|\,\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/16\mathbf{Z})| \;=\; |N| \cdot |\,\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)| = 8^4 \cdot (2^2 - 1)(2^2 - 2) \;=\; 2^{13} \cdot 3 \;=\; 24576 \,.$$

(3) Wir berechnen $N_{(1)}$, $N_{(2)}$, ...

$N_{(1)}$ Es war $N_{(0)} := N$. Wir berechnen $\mathrm{Z}(N_{(0)})$. Für gegebenes $A = \begin{pmatrix} 1+2a & 2b \\ 2c & 1+2d \end{pmatrix}$ in $N_{(0)}$ vergleichen wir

$$AA' \;=\; \begin{pmatrix} 1+2a & 2b \\ 2c & 1+2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2a' & 2b' \\ 2c' & 1+2d' \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1+2(a+a')+4(aa'+bc') & 2(b+b')+4(ab'+bd') \\ 2(c+c')+4(ca'+dc') & 1+2(d+d')+4(cb'+dd') \end{pmatrix}$$

mit

$$A'A \;=\; \begin{pmatrix} 1+2a' & 2b' \\ 2c' & 1+2d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2a & 2b \\ 2c & 1+2d \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1+2(a+a')+4(aa'+b'c) & 2(b+b')+4(a'b+b'd) \\ 2(c+c')+4(c'a+d'c) & 1+2(d+d')+4(c'b+dd') \end{pmatrix}$$

wobei $A' = \begin{pmatrix} 1+2a' & 2b' \\ 2c' & 1+2d' \end{pmatrix} \in N_{(0)}$ beliebig sei. Allgemein sollten also

$$\begin{aligned} c'a + d'c &\equiv_4 ca' + dc' \\ b'c &\equiv_4 bc' \\ a'b + b'd &\equiv_4 ab' + bd' \end{aligned}$$

gelten.
Mit $A' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ erhalten wir die Bedingungen $c \equiv_4 0$ und $a \equiv_4 d$ an A.
Mit $A' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ erhalten wir die Bedingungen $b \equiv_4 0$ und $a \equiv_4 d$ an A.
Umgekehrt, erfüllt ein Element von N diese Bedingungen, so ist es zentral in $N_{(0)}$. Also ist

$$\mathrm{Z}(N_{(0)}) \;=\; \{\begin{pmatrix} 1+2a & 2b \\ 2c & 1+2d \end{pmatrix} \in N_{(0)} \;:\; b \equiv_4 c \equiv_4 0,\; a \equiv_4 d\}\,.$$

Insbesondere ist $|\mathrm{Z}(N_{(0)})| = 8 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$, und damit $|N_{(1)}| = |N_{(0)}|/|\mathrm{Z}(N_{(0)})| = 2^6$.

$N_{(2)}$ Ein Element in $N_{(1)}$ wird repräsentiert durch eine Matrix $\begin{pmatrix} 1+2a & 2b \\ 2c & 1+2d \end{pmatrix}$ und ist zentral, falls der Kommutator dieses Repräsentanten mit jedem anderen Repräsentanten in $\mathrm{Z}(N_{(0)})$ liegt. Da skalare Matrizen ohnehin in $\mathrm{Z}(N_{(0)})$ liegen, dürfen wir hierzu die Inverse bis auf einen skalaren Faktor $\lambda \in (\mathbf{Z}/16\mathbf{Z})^*$ bilden, und erhalten als Bedingung

$$\begin{aligned} [A, A'] \;&=\; A^{-1}A'^{-1}AA' \;=\; \lambda \left(\begin{smallmatrix} 1+2d & -2b \\ -2c & 1+2a \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1+2d' & -2b' \\ -2c' & 1+2a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2a & 2b \\ 2c & 1+2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2a' & 2b' \\ 2c' & 1+2d' \end{pmatrix} \\ &=\; \lambda \begin{pmatrix} 1+2(a+d+a'+d')+4((a+a')(d+d')+aa'+dd')+8u & 4(a'b+b'a+b'd+d'b)+8v \\ 4(a'c+c'a+c'd+d'c)+8w & 1+2(a+d+a'+d')+4((a+a')(d+d')+aa'+dd')+8x \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{Z}(N_{(0)}) \end{aligned}$$

mit unspezifizierten $\lambda \in (\mathbf{Z}/16\mathbf{Z})^*$ und $u,\, v,\, w,\, x \;\in\; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
Allgemein sollten also

$$\begin{aligned} a'b + b'a + b'd + d'b &\equiv_2 0 \\ a'c + c'a + c'd + d'c &\equiv_2 0 \end{aligned}$$

gelten.
Mit $A' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ erhalten wir die Bedingung $a \equiv_2 d$ an A.
Mit $A' = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ erhalten wir die Bedingungen $b \equiv_2 c \equiv_2 0$ an A.
Umgekehrt, erfüllt ein Element von N diese Bedingungen, so ist es zentral in $N_{(1)}$. Also ist

$$\mathrm{Z}(N_{(1)}) \;=\; \{\begin{pmatrix} 1+2a & 2b \\ 2c & 1+2d \end{pmatrix} \in N_{(1)} \;:\; b \equiv_2 c \equiv_2 0,\; a \equiv_2 d\}\,.$$

Insbesondere ist $|\mathrm{Z}(N_{(1)})| = 8 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4/|\mathrm{Z}(N_{(0)})| = 2^3$, und damit $|N_{(2)}| = |N_{(1)}|/|\mathrm{Z}(N_{(1)})| = 2^3$.

$N_{(3)}$ Ein Element in $N_{(2)}$ wird repräsentiert durch eine Matrix $\begin{pmatrix} 1+2a & 2b \\ 2c & 1+2d \end{pmatrix}$ und ist zentral, falls der Kommutator dieses Repräsentanten mit jedem anderen Repräsentanten in $\mathrm{Z}(N_{(1)})$ liegt. Da skalare Matrizen ohnehin in $\mathrm{Z}(N_{(1)})$ liegen, dürfen wir hierzu die Inverse bis auf einen skalaren Faktor $\lambda \in (\mathbf{Z}/16\mathbf{Z})^*$ bilden, und erhalten als Bedingung, ähnlich wie im letzten Schritt,

$$\begin{aligned} [A, A'] \;&=\; A^{-1}A'^{-1}AA' \;=\; \lambda \left(\begin{smallmatrix} 1+2d & -2b \\ -2c & 1+2a \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1+2d' & -2b' \\ -2c' & 1+2a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2a & 2b \\ 2c & 1+2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2a' & 2b' \\ 2c' & 1+2d' \end{pmatrix} \\ &=\; \lambda \begin{pmatrix} 1+2(a+d+a'+d')+4u & 4v \\ 4w & 1+2(a+d+a'+d')+4x \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{Z}(N_{(1)}) \end{aligned}$$

mit unspezifizierten $\lambda \in (\mathbf{Z}/16\mathbf{Z})^*$ und $u,\, v,\, w,\, x \;\in\; \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$.
Dies ist aber stets erfüllt. In anderen Worten, $N_{(2)}$ ist abelsch, $\mathrm{Z}(N_{(2)}) = N_{(2)}$, und mithin $N_{(3)} = 1$.
Es folgt $|N_{(3)}| = 1$, und also auch $|N_{(k)}| = 1$ für $k \geq 1$.

Die Urbilder von $\mathrm{Z}(N_{(k)})$ in N bilden die sogenannte *Zentralreihe* von N. Für p-Gruppen terminiert die Zentralreihe bei der ganzen Gruppe (warum?).

Aufgabe 24.

(1) Die Aussage ist falsch. Sei z.B. $G = D_8 = \langle (1,2,3,4), (1,3) \rangle$. Wegen ${}^{(1,3)}(1,2,3,4) = (1,4,3,2) \neq (1,2,3,4)$ ist D_8 nicht abelsch. Wohl aber ist mit $\mathrm{Z}(D_8) = \langle (1,3)(2,4) \rangle$ der Quotient $D_8 / \langle (1,3)(2,4) \rangle \simeq C_2 \times C_2$ abelsch (oder, man verwende 22 (1)).

(2) Die Aussage ist richtig. In der Tat ist

$$\begin{array}{rcl} f(G') & = & f(\langle [x,y] \,:\, x,y \in G \rangle) \\ & = & \langle f([x,y]) \,:\, x,y \in G \rangle \\ & = & \langle [f(x), f(y)] \,:\, x,y \in G \rangle \\ & = & f(G)' \,. \end{array}$$

(3) Die Aussage ist falsch. Sei z.B. $G = \mathcal{S}_3$ und $f = \mathrm{sgn}$. Es ist $\mathrm{Z}(G) = \mathrm{Z}(\mathcal{S}_3) = 1$ (cf. 6 (5)), also $f(\mathrm{Z}(G)) = 1$, aber $\mathrm{Z}(f(G)) = \mathrm{Z}(\{\pm 1\}) = \{\pm 1\}$.

Hingegen ist stets $f(\mathrm{Z}(G)) \leq \mathrm{Z}(f(G))$.

(4) Die Aussage ist falsch. Sei eine einfache Gruppe G von Ordnung 16 als existent angenommen. Es ist G nicht abelsch, da G sonst ein Element und damit auch eine normale Untergruppe von Ordnung 2 enthielte (cf. 10 (4)). Also ist $\mathrm{Z}(G) \neq G$. Nun ist aber auch $\mathrm{Z}(G) \neq 1$, da G eine 2-Gruppe ist. Also ist $\mathrm{Z}(G)$ ein nichttrivialer Normalteiler von G, im Widerspruch zur Einfachheit von G.

(5) Die Aussage ist richtig. Wir führen eine Induktion über die Anzahl der verschiedenen Primteiler von $|G|$ durch. Seien $p_1, \ldots, p_n$ die Primteiler von $|G|$. Sei P_i *die* p_i-Sylowgruppe von G.

Sei $H = P_2 \cdots P_n$. Nun ist P_i für $i \in [2,n]$ auch eine p_i-Sylowgruppe von H, da zum einen $P_i \leq H$, und zum anderen $|H|$ ein Teiler von $|G|$ ist. Nach Induktion ist also $H \simeq P_2 \times \cdots \times P_n$. Insbesondere ist $|H| = |G|/|P_1|$.

Es ist $P \cap H = 1$, da ein Element darin nur Ordnung 1 haben kann. Damit ist auch $|P_1 H| = |P_1||H| = |G|$, und also $P_1 H = G$, was uns $G \simeq P_1 \rtimes H$ beschert, wobei H, als Produkt von Normalteilern, auch normal in $P_1 \rtimes H$ ist.

Für $x \in P$ und $h \in H$ liegt also ${}^{(x,1)}(1,h) = (x\,{}^h x^{-1}, h) \in H$, d.h. $x\,{}^h x^{-1} = 1$. Hieraus ersehen wir, daß H trivial auf P operiert, und also $G \simeq P \times H$ ist. Da, wie eben festgestellt, $H \simeq P_2 \times \cdots \times P_n$, erhalten wir insgesamt $G \simeq P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$.

(6) Die Aussage ist richtig. In der Tat haben wir eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl} H/(H \cap K) & \longrightarrow & HK/K \\ h(H \cap K) & \longmapsto & hK \\ h(H \cap K) & \longleftarrow\!\!\!\!| & hK \end{array}$$

Zeigen wir die Wohldefiniertheit der Abbildung $h(H \cap K) \longmapsto hK$. Sind h und h' in H mit $h(H \cap K) = h'(H \cap K)$ gegeben, so ist $h' = hk$ mit einem $k \in H \cap K$. Also ist auch $hK = h'K$.

Zeigen wir die Wohldefiniertheit ihrer Umkehrabbildung $h(H \cap K) \longleftarrow\!\!\!\!| \; hK$. Sind h und h' in H mit $hK = h'K$ gegeben, so ist $h' = hk$ mit einem $k \in K$. Nun ist wegen $k = h^{-1}h' \in H$ sogar $k \in H \cap K$. Also ist $h(H \cap K) = h'(H \cap K)$.

Insbesondere ist die Folgerung $|HK| = |H||K||H \cap K|^{-1}$ manchmal von Nutzen.

(7) Die Aussage ist falsch. Betrachte

$$G \;:=\; D_8 \;=\; \langle (1,2,3,4), (1,3) \rangle \;=\; \{\mathrm{id},\ (1,2,3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4,3,2),\ (1,3),\ (1,2)(3,4),\ (2,4),\ (1,2)(3,4)\}\,.$$

Der Normalteiler $\langle (1,2,3,4) \rangle$ hat die Komplemente $\langle (1,3) \rangle$ und $\langle (1,2)(3,4) \rangle$, und diese Untergruppen sind noch nicht einmal in $\mathcal{S}_4$ konjugiert, geschweige denn in D_8.

Zwei Komplemente H und K eines Normalteilers $N \trianglelefteq G$ sind wegen $H \simeq G/N \simeq K$ dagegen sicher isomorph.

Die Konjugationsklassen von Komplementen werden durch eine *Cohomologiegruppe* parametrisiert.